Untersuchung
des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.

Von
Hrn. BESSEL.

[Der Akademie der Wissenschaften vorgelegt am 29. Januar 1824.]

1.

Die Störungen der elliptischen Bewegung eines Planeten durch einen anderen bestehen aus zwei Theilen: der eine rührt von der Anziehung her, welche der gestörte Planet durch den störenden erfährt; der andere, von der Bewegung der Sonne, welche der letztere erzeugt. Beide Theile sind in den bisherigen Entwickelungen der planetarischen Störungen zusammengenommen; allein es ist zweckmäfsiger, jeden derselben abgesondert zu untersuchen. Der letztere nämlich kann, wie ich in gegenwärtiger Abhandlung zeigen werde, direct und vollständig entwickelt werden und verdient deshalb eine Trennung von dem ersteren, bei welchem dieses noch nicht geleistet worden ist; die Trennung wird sogar nothwendig, wenn man die bisher allgemeine Annahme, dafs der störende Planet auf den gestörten und die Sonne mit gleicher Masse wirkt, einer Prüfung unterwerfen will.

Diese Annahme ist eine Folge des Satzes, dafs die Körper ihren Massen proportional anziehen. Newton leitete denselben bekanntlich aus Erfahrungssätzen, verbunden mit der nothwendigen Gleichheit der

Wirkung und Gegenwirkung ab. Aber abgesehen davon, dafs die Erfahrungssätze innerhalb gewisser Grenzen bezweifelt werden können, kann man auch nachweisen, dafs die Data, welche Newton seiner Annahme zum Grunde legte, andere Systeme keinesweges ausschliefsen, so dafs also anderweitige Erfahrungen entscheiden müssen, ob der Satz von der den Massen proportionalen Anziehung der Körper wirklich das allgemeine Gesetz der Natur ist. Da dieses den angenommenen Vorstellungen entgegen ist, so wird es mir erlaubt sein, diese Abhandlung durch eine nähere Untersuchung der Gründe zu eröffnen, wodurch Newton diesen Theil seines Systems unterstützte.

Um dieses kurz und deutlich thun zu können, werde ich die beschleunigende Kraft, mit welcher der Körper x in der Entfernung 1 auf den Körper y wirkt, durch $\binom{x}{y}$ bezeichnen. Nach dieser Bezeichnung hat man die Sätze, auf welche Newton's Annahme sich gründet, folgendermafsen:

$$1 \ldots\ldots \binom{0}{1} = \binom{0}{2} = \binom{0}{3} = \text{u. s. w.}$$

wo 0 die Sonne und 1, 2, 3 . . . Planeten bedeuten: denn das dritte Keplersche Gesetz erfordert, dafs die beschleunigende Kraft, womit die Sonne auf die Planeten wirkt, auf gleiche Entfernung reducirt, gleich ist;

$$2 \ldots\ldots \binom{p}{I} = \binom{p}{II} = \binom{p}{III} = \text{u. s. w.}$$

wo p den Jupiter oder Saturn und $I, II, III \ldots$ ihre Monde bezeichnen: denn auch bei diesen bewährt sich dasselbe Keplersche Gesetz;

$$3 \ldots\ldots \binom{t}{u} = \binom{t}{v} = \binom{t}{w} = \text{u. s. w.} = \binom{t}{I}$$

wo t die Erde, $u, v, w \ldots$ irdische Körper und I den Mond bedeuten: denn Newton's Versuche über die Pendelschwingungen verschiedenartiger Körper und die Vergleichung derselben mit der Bewegung des Mondes, zeigten, dafs die be-

schleunigende Kraft, womit die Erde auf diese Körper wirkt, gleich ist;

$$4. \ldots\ldots \binom{\circ}{p} = \binom{\circ}{I} = \binom{\circ}{II} = \text{u. s. w.}$$

denn wenn diese beschleunigenden Kräfte nicht gleich wären, so müfsten die Bewegungen der Monde Ungleichheiten zeigen, welche die Bewegungen nicht verrathen.

$$5. \ldots\ldots \binom{x}{y} y = \binom{y}{x} x$$

wo y und x die Massen der Körper y und x bezeichnen; die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung erfordert dieses, von welcher Beschaffenheit auch die Wirkung sein mag.

Dafs diese fünf Sätze nicht allein mit der Annahme der Anziehung im Verhältnifse der Massen, sondern noch mit anderen Hypothesen vereinbar sind, glaube ich am besten zeigen zu können, wenn ich eine dieser Hypothesen mit denselben vergleiche: ich nehme die Körper als aus verschiedenen Elementen $a, b, c \ldots$ zusammengesetzt an, so dafs a nur a, b nur b, u. s. w... nicht aber das eine Element das andere anzieht; von diesen Elementen enthalte die Sonne gleiche Quantitäten, und alles, was zu einem Hauptplaneten gehört, sowohl seine einzelnen Theile als seine Monde, sei, in Beziehung auf diese Elemente, ähnlich, wenn auch nicht gleich gemischt.

Denkt man sich zwei Körper x und y, deren erster von den verschiedenen Elementen die Quantitäten $\overset{x}{a}, \overset{x}{b}, \overset{x}{c} \ldots$ enthält, der andere $\overset{y}{a}, \overset{y}{b}, \overset{y}{c} \ldots$, so ist die Anziehung des einen durch den anderen

$$\overset{x}{a}\overset{y}{a} + \overset{x}{b}\overset{y}{b} + \overset{x}{c}\overset{y}{c} + \ldots.$$

allgemein übereinstimmend mit der fünften Forderung; die beschleunigende Kraft, womit der erste Körper auf den anderen wirkt, ist diese Anziehung dividirt durch die Masse des angezogenen, oder

$$\binom{x}{y} = \frac{\overset{x}{a}\overset{y}{a} + \overset{x}{b}\overset{y}{b} + \overset{x}{c}\overset{y}{c} + \ldots.}{\overset{y}{a} + \overset{y}{b} + \overset{y}{c} + \ldots.}$$

Behält man nun die oben schon angewandten Bezeichnungen der Sonne, der Planeten, Monde und irdischen Körper bei, und setzt man, der Hypothese zufolge,

$$\overset{o}{a} = \overset{o}{b} = \overset{o}{c} = \text{u. s. w.}$$

$$\overset{p}{a} : \overset{I}{a} : \overset{II}{a} : \ldots\ldots = \overset{p}{b} : \overset{I}{b} : \overset{II}{b} : \ldots\ldots = \overset{p}{c} : \overset{I}{c} : \overset{II}{c} : \ldots\ldots = \text{u. s. w.}$$

$$\overset{t}{a} : \overset{I}{a} : \overset{u}{a} : \ldots\ldots = \overset{t}{b} : \overset{I}{b} : \overset{u}{b} : \ldots\ldots = \overset{t}{c} : \overset{I}{c} : \overset{u}{c} : \ldots\ldots = \text{u. s. w.}$$

so hat man

$$\binom{o}{1} = \frac{\overset{o\,1}{a\,a} + \overset{o\,1}{a\,b} + \overset{o\,1}{a\,c} + \ldots\ldots}{\overset{1}{a} + \overset{1}{b} + \overset{1}{c} + \ldots\ldots} = \overset{o}{a},$$

also den ersten Erfahrungssatz

$$\binom{o}{1} = \binom{o}{2} = \binom{o}{3} = \text{u. s. w.};$$

ferner hat man

$$\binom{p}{I} = \frac{\overset{p\,I}{a\,a} + \overset{p\,I}{b\,b} + \overset{p\,I}{c\,c} + \ldots\ldots}{\overset{I}{a} + \overset{I}{b} + \overset{I}{c} + \ldots\ldots}$$

welches, mit $\overset{p}{a} : \overset{I}{a} = \overset{p}{b} : \overset{I}{b} = \overset{p}{c} : \overset{I}{c} = \text{u. s. w.} = 1 : \lambda$ verbunden,

$$\binom{p}{I} = \frac{\binom{p}{a}^2 \lambda + \binom{p}{b}^2 \lambda + \binom{p}{c}^2 \lambda + \ldots\ldots}{\overset{p}{a} \,.\, \lambda + \overset{p}{b} \,.\, \lambda + \overset{p}{c} \,.\, \lambda + \ldots\ldots} = \frac{\binom{p}{a}^2 + \binom{p}{b}^2 + \binom{p}{c}^2 + \ldots\ldots}{\overset{p}{a} + \overset{p}{b} + \overset{p}{c} + \ldots\ldots}$$

und daher den zweiten Erfahrungssatz

$$\binom{p}{I} = \binom{p}{II} = \binom{p}{III} = \text{u. s. w.}$$

giebt; der dritte und vierte Erfahrungssatz folgen aus denselben Betrachtungen, wodurch die Behauptung, dafs die Hypothese denselben

Gründen entspreche, aus welchen Newton die seinige ableitete, gerechtfertigt ist. Dieselbe Hypothese giebt aber

$$\binom{n}{0} = \frac{a^{0}\left(a^{n} + b^{n} + c^{n} + \ldots\right)}{a^{0} + b^{0} + c^{0} + \ldots}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{a^{1}a^{n} + b^{1}b^{n} + c^{1}c^{n} + \ldots}{a^{1} + b^{1} + c^{1} + \ldots}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{a^{2}a^{n} + b^{2}b^{n} + c^{2}c^{n} + \ldots}{a^{2} + b^{2} + c^{2} + \ldots}$$

u. s. w.

also die beschleunigenden Kräfte, womit der Planet n auf die Sonne und die übrigen Planeten wirkt, im Allgemeinen verschieden.

Die Hypothese, vermöge welcher hier den fünf Sätzen genügt worden ist, verwandelt sich in die Newtonsche, wenn man nur ein Element annimmt; sie ist so gewählt, dafs sie der letzteren so nahe als möglich kömmt, übrigens aber nur als ein Mittel aufgestellt, wodurch gezeigt werden sollte, dafs Newton's Hypothese nicht eine Folge der fünf Sätze ist. Ein Planet kann also so viele verschiedene Massen (um den gewöhnlichen Sprachgebrauch beizubehalten) zeigen, als Körper vorhanden sind, auf welche er wirkt; betrachtet man aber die gegenseitigen Bewegungen von n Planeten und der Sonne, so finden, vermöge des fünften Satzes, unter den $n\,(n+1)$ Massen, $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Bedingungsgleichungen statt, und, wenn man auch den ersten Satz als wahr annimmt, $\frac{1}{2}n\,(n+1)$, so dafs nur $\frac{1}{2}n\,(n+1)$ Massen unbekannt bleiben. Setzt man z. B. für drei Planeten

$$\binom{0}{1} = 1\ ;\ \binom{0}{2} = 1\ ;\ \binom{0}{3} = 1$$

$$\binom{1}{0} = m'\ ;\ \binom{1}{2} = m'i\ ;\ \binom{1}{3} = m'k$$

$$\binom{2}{0} = m''\ ;\ \binom{2}{1} = m''i'\ ;\ \binom{2}{3} = m''l$$

$$\binom{3}{0} = m'''\ ;\ \binom{3}{1} = m'''k'\ ;\ \binom{3}{2} = m'''l'$$

so hat man die Gleichungen

$$i = i' \; ; \; k = k' \; ; \; l = l'$$

wodurch die Zahl der unbekannten Gröfsen von 9 auf 6 reducirt wird.

Es ist übrigens klar, dafs man die vier ersten Sätze, welche durch Erfahrung gegeben sind, innerhalb gewisser Grenzen bezweifeln kann, welche, namentlich bei den beiden ersten derselben, vielleicht nicht so eng sind, als der Schärfe der heutigen Beobachtungen angemessen wäre. Ob aber die astronomischen Theorien allenthalben in so grofser Uebereinstimmung mit den Beobachtungen sind, dafs dadurch jeder Zweifel an der Wahrheit der Newtonschen Annahme zurückgewiesen wird, dieses ist eine Frage, welche wohl Niemand bejahen wird, deren genaue Erörterung jedoch sehr wichtig ist und die gröfsten Fortschritte der Wissenschaft verheifst.

Der Erste welcher die Anziehung im Verhältnisse der Massen bezweifelte, ist Johann Tobias Mayer (1); ich habe aber geglaubt, eine von der seinigen verschiedene Ansicht aufstellen zu dürfen, weil es mir wesentlich zu sein schien, zu zeigen, dafs unter den Werthen von

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots.$$

Verschiedenheiten sein können, nicht etwa nur von der Ordnung der Planetenmassen, sondern von jeder beliebigen Gröfse.

2.

Den Planeten, dessen Bewegung untersucht werden soll, werde ich im Folgenden durch p bezeichnen, den störenden durch p'; als Einheit der Kräfte werde ich

$$\binom{0}{p} + \binom{p}{0}$$

annehmen, und, in diesem Mafse ausgedrückt,

$$\binom{p'}{0} \text{ und } \binom{p'}{p}$$

durch m und m' andeuten.

---

(1) *Comment. Soc. Reg. Scient. Gottingensis ad A. MDCCCIV-VIII.*

Wenn x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten und r den Radius-Vector von p bedeuten, x', y', z', r' dasselbe für p' und

$$\varrho = \sqrt{\left\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right\}}$$

$$R = \frac{m(xx' + yy' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\varrho^3}$$

so hat man

$$0 = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) + \frac{x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) + \frac{y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \frac{z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right)$$

Die störenden Kräfte, parallel mit dem Radius-Vector, senkrecht auf denselben in der Ebene und nach der Richtung der Bewegung, und senkrecht auf diese beiden, bezeichne ich durch A', B', C'; die letzte ist positiv, wenn sie von oben nach unten gerichtet ist, für einen Beobachter welcher, von der Sonne aus, die Bewegung des Planeten von der Rechten nach der Linken sieht. Ich werde zuerst die Ausdrücke dieser, Kräfte durch die Differentialquotienten von R, in Beziehung auf die Elemente von p, angeben und dabei folgende Bezeichnungen anwenden:

Länge des aufsteigenden Knotens . . . . . n
Neigung der Bahn i
Entfernung des Perihels vom Knoten . . . . . ω
Excentricität . . . . . e
halbe grofse Axe . . . . . a
$\sqrt{a(1-ee)}$ . . . . . h
wahre, excentrische, mittlere Anomalie . . . . . ϕ, ε, μ
für den störenden Planeten . . . . . $n', i', \omega', e', a', h', \phi', \varepsilon', \mu'$.

Man hat bekanntlich

$$x = r\left\{\operatorname{Cos} n \operatorname{Cos}(\omega+\phi) - \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \operatorname{Cos} i\right\}$$

$$y = r\left\{\operatorname{Sin} n \operatorname{Cos}(\omega+\phi) + \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \operatorname{Cos} i\right\}$$

$$z = r \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \operatorname{Sin} i$$

$$rA' = \left(\frac{dR}{dx}\right) x + \left(\frac{dR}{dy}\right) y + \left(\frac{dR}{dz}\right) z$$

$$rB' = \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right)$$

$$rC' = \left(\frac{dR}{dx}\right) r \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} i - \left(\frac{dR}{dy}\right) r \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} i + \left(\frac{dR}{dz}\right) r \operatorname{Cos} i$$

also

$$[1] \ldots rA' = \left(\frac{dR}{dr}\right) r = \left(\frac{dR}{da}\right) a$$

$$[2] \ldots rB' = \left(\frac{dR}{d\omega}\right)$$

Multiplicirt man den Ausdruck für $r\ C'$ mit $\operatorname{Sin}(\omega + \phi)$ und setzt man in dem Producte für

$$r \operatorname{Sin}(\omega + \phi) \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} i; \; - r \operatorname{Sin}(\omega + \phi) \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} i; \; r \operatorname{Sin}(\omega + \phi) \operatorname{Cos} i$$

ihre Ausdrücke, nämlich

$$\left(\frac{dx}{di}\right); \left(\frac{dy}{di}\right); \left(\frac{dz}{di}\right)$$

so erhält man

$$[3] \ldots r\ C' \operatorname{Sin}(\omega + \phi) = \left(\frac{dR}{di}\right)$$

Man hat ferner die Gleichungen

$$\left(\frac{dR}{d\omega}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right)$$

$$\left(\frac{dR}{dn}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dn}\right) + \left(\frac{dR}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dn}\right)$$

und

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right) \operatorname{Cos} i - \left(\frac{dx}{dn}\right) = r \operatorname{Cos}(\omega + \phi) \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} i^2$$

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right) \operatorname{Cos} i - \left(\frac{dy}{dn}\right) = - r \operatorname{Cos}(\omega + \phi) \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} i^2$$

$$\left(\frac{dz}{d\omega}\right) \operatorname{Cos} i - \left(\frac{dz}{dn}\right) = r \operatorname{Cos}(\omega + \phi) \operatorname{Cos} i \operatorname{Sin} i$$

also, wenn man $\left(\frac{dR}{d\omega}\right)$ mit $\operatorname{Cos} i$ multiplicirt und $\left(\frac{dR}{dn}\right)$ davon abzieht,

$$[4] \ldots r\ C' \operatorname{Cos}(\omega + \phi) = \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \operatorname{Cot} i - \left(\frac{dR}{dn}\right) \operatorname{Cosec} i$$

Mehrerer Einfachheit halber werde ich, im Folgenden, die Bahn des störenden Planeten zur festen Ebene wählen, die Winkel ω und ω' von dem aufsteigenden Knoten der Bahn des gestörten auf dieser Ebene anrechnen, und unter I die Neigung derselben Bahn gegen die feste Ebene verstehen, wodurch man erhält:

$$[5] \ldots r\, C' \operatorname{Sin}(\omega + \phi) = \left(\frac{dR}{dI}\right)$$

$$[6] \ldots r\, C' \operatorname{Cos}(\omega + \phi) = \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \operatorname{Cotg} I + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right) \operatorname{Cosec} I$$

3.

Durch diese störenden Kräfte A', B', C' habe ich früher ([1]) die Veränderungen der Elemente von p ausgedrückt; jetzt werde ich unmittelbar die Störungen des Radius-Vectors $= \delta r$, der wahren Länge in der Bahn $= \delta v$ und der Breite über der mittleren Ebene der Bahn $= \delta s$ angeben, dabei aber nur die erste Potenz der störenden Masse berücksichtigen. Man hat ([2])

$$0 = \frac{d \,.\, r \frac{dr}{dt}}{dt} + \frac{1}{a} - \frac{1}{r} + r\, A'$$

woraus, unter Vernachlässigung von δr^2 u. s. w., folgt

$$0 = \frac{d^2 \,.\, r \delta r}{dt^2} + \frac{r \delta r}{r^3} + r A' + \delta \frac{1}{a} \cdot$$

Setzt man für $\delta \frac{1}{a}$ seinen Ausdruck durch die störenden Kräfte, nämlich

$$2 \int \left\{ A' \frac{dr}{dt} + B' \frac{h}{r} \right\} dt$$

$$= 2 \int \left\{ \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\omega}\right) d\upsilon \right\} = 2 \int \left\{ \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\upsilon}\right) d\upsilon \right\}$$

oder, da das in Beziehung auf die Coordinaten von p genommene Differential von R

$$= \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\upsilon}\right) d\upsilon = \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

([1]) Untersuchungen über den Kometen von 1807. II. Abtheilung.

([2]) Ebendaselbst S. 52.

ist,

$$\delta \frac{1}{a} = 2\int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu;$$

so hat man

$$0 = \frac{d^2 r\delta r}{dt^2} + \frac{r\delta r}{r^3} + a\left(\frac{dR}{da}\right) + 2\int\left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

welche Gleichung *Méc. Cél.* Buch II. §. 46. folgendermafsen integrirt ist:

$$[7] \ldots \delta r = aa\sqrt{(1-ee)}\left\{\operatorname{Cos}\phi\int\frac{Q\operatorname{Sin}\phi}{1+e\operatorname{Cos}\phi}d\mu - \operatorname{Sin}\phi\int\frac{Q\operatorname{Cos}\phi}{1+e\operatorname{Cos}\phi}d\mu\right\}$$

wo, um abzukürzen, Q für

$$a\left(\frac{dR}{da}\right) + 2\int\left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

geschrieben ist.

Den Ausdruck von δv giebt Herr Laplace durch den von δr; ich werde ihn aber unmittelbar auf die störenden Kräfte zurückführen. Man hat

$$0 = \frac{d\, rr\frac{dv}{dt}}{dt} + rB', \text{ oder}$$

$$0 = rr\frac{d\delta v}{dt} + 2r\,\delta r\,.\,\frac{dv}{dt} + \int rB'\,dt,$$

und wenn man mit $\frac{dt}{rr}$ multiplicirt und integrirt

$$\delta v = -2\int\frac{\delta r}{r}dv - \int\frac{dt}{rr}\int rB'\,dt.$$

Das erste Glied dieses Integrals findet man, wenn man für δr seinen Ausdruck [7] setzt,

$$= -\frac{a}{\sqrt{(1-ee)}}\left\{\left(2\operatorname{Sin}\phi + \frac{e}{2}\operatorname{Sin}2\phi\right)\int\frac{Q\operatorname{Sin}\phi}{1+e\operatorname{Cos}\phi}d\mu\right.$$
$$+\left(\frac{3}{2}e + 2\operatorname{Cos}\phi + \frac{e}{2}\operatorname{Cos}2\phi\right)\int\frac{Q\operatorname{Cos}\phi}{1+e\operatorname{Cos}\phi}d\mu$$
$$\left.-2\int Q\,d\mu + e\int d\phi\int\frac{Q\operatorname{Sin}\phi}{1+e\operatorname{Cos}\phi}d\mu\right\}$$

Wenn man das letzte Glied dieses Ausdrucks mit dem letzten Gliede des Ausdrucks von δv vereinigt, so ist die Summe

$$= -\int \frac{dt}{rr} \int \left\{ \frac{a^{\frac{3}{2}} e \operatorname{Sin} \phi \,.\, Q}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} + r B' \frac{dt}{d\mu} \right\} d\mu$$

$$= -\int \frac{dt}{rr} \int \left\{ \frac{Q r dr}{h} + r B' dt \right\}$$

und wenn man für Q und B' ihre Werthe setzt, auch $\left(\frac{dR}{d\omega}\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{d\omega}\right) d\phi = \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

eliminirt,

$$= -\int \frac{dt}{rr} \int \left\{ \frac{2r\, dr}{h} \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu + \frac{rr}{h} \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu \right\}$$

$$= -\frac{1}{h} \int dt \int \left(\frac{dR}{d\mu}\right) d\mu$$

$$= -\frac{a}{2\sqrt{(1-ee)}} \int Q\, d\mu + \frac{a}{2\sqrt{(1-ee)}} \int a \left(\frac{dR}{da}\right) d\mu$$

Man hat daher

$$[8] \ldots \delta v = -\frac{2a}{\sqrt{(1-ee)}} \left(\operatorname{Sin} \phi + \frac{e}{4} \operatorname{Sin} 2\phi\right) \int \frac{Q \operatorname{Sin} \phi}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} d\mu$$

$$- \frac{2a}{\sqrt{(1-ee)}} \left(\frac{3}{4} e + \operatorname{Cos} \phi + \frac{e}{4} \operatorname{Cos} 2\phi\right) \int \frac{Q \operatorname{Cos} \phi}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} d\mu$$

$$+ \frac{3a}{2\sqrt{(1-ee)}} \int Q\, d\mu + \frac{a}{2\sqrt{(1-ee)}} \int a \left(\frac{dR}{da}\right) d\mu$$

Die Breite über der mittleren Ebene der Bahn ist

$$\delta s = \delta i \operatorname{Sin} (\omega + \phi) - \delta n \operatorname{Cos} (\omega + \phi) \operatorname{Sin} i$$

Man hat aber (a. a. O. S. 56)

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = -\frac{r C'}{h} \operatorname{Cos} (\omega + \phi)$$

$$\left(\frac{dn}{dt}\right) = -\frac{r C'}{h} \operatorname{Sin} (\omega + \phi) \operatorname{Cosec} i$$

und wenn man [3] und [4] substituirt

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = -\frac{1}{h} \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \operatorname{Cotg} i + \frac{1}{h} \left(\frac{dR}{dn}\right) \operatorname{Cosec} i$$

$$\left(\frac{dn}{dt}\right) = -\frac{1}{h} \left(\frac{dR}{di}\right) \operatorname{Cosec} i$$

welche Ausdrücke sich in der vortreflichen, von Herrn Laplace dem Bureau *des Longitudes* am 17ten August 1808 vorgelegten Abhandlung, nicht in dieser Form finden. Setzt man die Integrale derselben in den Ausdruck von δs, so erhält man

$$\delta s = \frac{-a}{\sqrt{(1-ee)}} \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \int \left\{ \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \operatorname{Cotg} i - \left(\frac{dR}{dn}\right) \operatorname{Cosec} i \right\} d\mu$$
$$+ \frac{a}{\sqrt{(1-ee)}} \operatorname{Cos}(\omega+\phi) \int \left(\frac{dR}{di}\right) d\mu$$

oder, nach [5] und [6]

$$[9] \ldots \delta s = \frac{-a}{\sqrt{(1-ee)}} \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \int \left\{ \left(\frac{dR}{d\omega}\right) \operatorname{Cotg} I + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right) \operatorname{Cosec} I \right\} d\mu$$
$$+ \frac{a}{\sqrt{(1-ee)}} \operatorname{Cos}(\omega+\phi) \int \left(\frac{dR}{dI}\right) d\mu$$

4.

Der Theil der Störungen des Radius-Vectors, der Länge in der Bahn und der Breite über der mittleren Ebene derselben, welcher den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, entsteht aus dem ersten Theile von R; ich werde daher

$$R = \frac{mr}{r'r'} \left\{ \operatorname{Cos}(\omega+\phi) \operatorname{Cos}(\omega'+\phi') + \operatorname{Sin}(\omega+\phi) \operatorname{Sin}(\omega'+\phi') \operatorname{Cos} I \right\}$$

setzen und diesem Ausdrucke die Form

$$[10] \ldots R = \frac{mr}{r'r'} \left\{ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2} I^2 \operatorname{Cos}(\phi-\phi'+\omega-\omega') + \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2} I^2 \operatorname{Cos}(\phi+\phi'+\omega+\omega') \right\}$$

geben.

Die Entwickelung dieses R in eine Reihe, welche nach den Cosinussen der Zeit proportional wachsender Bögen fortgeht, hängt von den Entwickelungen von

$$r \operatorname{Cos}\phi,\ r \operatorname{Sin}\phi,\ \frac{1}{r'r'} \operatorname{Cos}\phi',\ \frac{1}{r'r'} \operatorname{Sin}\phi'$$

ab; diese letzteren werden aus einer besonderen, unten folgenden Untersuchung hervorgehen; für jetzt aber werde ich

$$r \operatorname{Cos} \phi = a \overset{i}{c} \operatorname{Cos} i\mu ; \qquad r \operatorname{Sin} \phi = a \overset{i}{s} \operatorname{Sin} i\mu$$

$$\frac{a'a'}{r'r'} \operatorname{Cos} \phi' = \overset{k}{\gamma} \operatorname{Cos} k\mu' ; \qquad \frac{a'a'}{r'r'} \operatorname{Sin} \phi' = \overset{k}{\sigma} \operatorname{Sin} k\mu'$$

setzen und unter i und k alle ganze, sowohl positive als negative Zahlen, 0 nicht ausgenommen, verstehen. Erinnert man sich an die Bemerkung im 48sten Satze des 2ten Buchs der *Mécanique Céleste*, so findet man leicht

$$\begin{aligned}
\frac{a'a'r}{r'r'a} \operatorname{Cos} (\phi - \phi' + \omega - \omega') = {} & \tfrac{1}{4} (\overset{k}{\gamma} + \overset{k}{\sigma}) (\overset{i}{c} + \overset{i}{s}) \operatorname{Cos} (i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \\
& + \tfrac{1}{4} (\overset{k}{\gamma} + \overset{k}{\sigma}) (\overset{i}{c} - \overset{i}{s}) \operatorname{Cos} (-i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \\
& + \tfrac{1}{4} (\overset{k}{\gamma} - \overset{k}{\sigma}) (\overset{i}{c} - \overset{i}{s}) \operatorname{Cos} (-i\mu + k\mu' + \omega - \omega') \\
& + \tfrac{1}{4} (\overset{k}{\gamma} - \overset{k}{\sigma}) (\overset{i}{c} + \overset{i}{s}) \operatorname{Cos} (i\mu + k\mu' + \omega - \omega')
\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\overset{i}{c} = \overset{-i}{c} ; \quad \overset{i}{s} = - \overset{-i}{s} ; \quad \overset{k}{\gamma} = \overset{-k}{\gamma} ; \quad \overset{k}{\sigma} = - \overset{-k}{\sigma}$$

und daher, wenn man, um abzukürzen,

$$\overset{k}{\gamma} + \overset{k}{\sigma} \text{ durch } \overset{k}{\alpha} , \quad \overset{i}{c} + \overset{i}{s} \text{ durch } \overset{i}{a}$$

bezeichnet,

$$\overset{k}{\gamma} - \overset{k}{\sigma} = \overset{-k}{\alpha} , \quad \overset{i}{c} - \overset{i}{s} = \overset{-i}{a}$$

wodurch der gegebene Ausdruck die Bezeichnung

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{4} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} (i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \tfrac{1}{4} \overset{k}{\alpha} \overset{-i}{a} \operatorname{Cos} (-i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \\
+ & \tfrac{1}{4} \overset{-k}{\alpha} \overset{-i}{a} \operatorname{Cos} (-i\mu + k\mu' + \omega - \omega') + \tfrac{1}{4} \overset{-k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} (i\mu + k\mu' + \omega - \omega')
\end{aligned}$$

erhält. Da er für alle ganze i zu nehmen ist, so sind das erste und zweite, so wie das dritte und vierte Glied einander gleich, so dafs man ihn schreiben kann:

$$\tfrac{1}{2} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} (i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \tfrac{1}{2} \overset{-k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} (i\mu + k\mu' + \omega - \omega')$$

und da auch diese beiden Glieder, für alle ganze k genommen, einander gleich sind, so hat man den Ausdruck

$$= \overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\,\mathrm{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$

und eben so das zweite Glied von R [10]: folglich ist

$$[11] \ldots R = \frac{m\,a}{a'\,a'}\,\overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\left\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,I^2\,\mathrm{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,I^2\,\mathrm{Cos}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

Hieraus folgt

$$[12] \ldots a\left(\frac{dR}{da}\right) = R$$

$$\left(\frac{dR}{d\mu}\right) = -\frac{a\,m}{a'\,a'}\,i\,.\,\overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\left\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,I^2\,\mathrm{Sin}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,I^2\,\mathrm{Sin}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

und wenn $\frac{d\mu'}{d\mu} = \nu$ gesetzt wird,

$$2\int\left(\frac{dR}{d\mu}\right)d\mu = \frac{a\,m}{a'\,a'}\,\overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\left\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,I^2\cdot\frac{2i}{i-k\nu}\,\mathrm{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,I^2\cdot\frac{2i}{i+k\nu}\,\mathrm{Cos}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

woraus, nach [7], folgt,

$$[13] \ldots Q = \frac{a\,m}{a'\,a'}\,\overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\left\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,I^2\cdot\frac{3i-k\nu}{i-k\nu}\,\mathrm{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') + \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,I^2\cdot\frac{3i+k\nu}{i+k\nu}\,\mathrm{Cos}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

Man hat ferner

$$[14] \ldots \left(\frac{dR}{d\omega}\right)\mathrm{Cotg}\,I + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right)\mathrm{Cosec}\,I$$

$$= \frac{a\,m}{a'\,a'}\,\overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,I\left\{\mathrm{Sin}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') - \mathrm{Sin}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

$$[15] \ldots \left(\frac{dR}{dI}\right)$$

$$= \frac{-a\,m}{a'\,a'}\,\overset{k}{\alpha}\,\overset{i}{a}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,I\left\{\mathrm{Cos}\,(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') - \mathrm{Cos}\,(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

5.

Die Störung der Radius-Vectors setzt, nach [7], die Integrationen von

$$\frac{Q \operatorname{Sin} \phi}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} d\mu \text{ und } \frac{Q \operatorname{Cos} \phi}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} d\mu$$

oder, was dasselbe ist, von

$$\frac{1}{a(1-ee)} Qr \operatorname{Sin} \phi \, d\mu \text{ und } \frac{1}{a(1-ee)} Qr \operatorname{Cos} \phi \, d\mu$$

voraus. Nach der im vorigen Artikel angewandten Bezeichnung ist

$$r \operatorname{Sin} \phi = a \overset{h}{s} \operatorname{Sin} h\mu \, ; \; r \operatorname{Cos} \phi = a \overset{h}{c} \operatorname{Cos} h\mu$$

wo h alle ganze Zahlen bedeutet; verbindet man dieses mit [13], so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{Q \operatorname{Sin} \phi}{1 + e \operatorname{Cos} \phi} &= \frac{am}{a'a'} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \Big\{ \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} I^2 . \frac{3i - k\nu}{i - k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{1 - ee} \operatorname{Cos} (i\mu - k\mu' + \omega - \omega') \operatorname{Sin} h\mu \\
&\quad + \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} I^2 . \frac{3i + k\nu}{i + k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{1 - ee} \operatorname{Cos} (i\mu + k\mu' + \omega + \omega') \operatorname{Sin} h\mu \Big\} \\
&= \frac{am}{a'a'} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \Big\{ \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} I^2 . \frac{3i - k\nu}{i - k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{1 - ee} \operatorname{Sin} \Big((i + h)\mu - k\mu' + \omega - \omega' \Big) \\
&\quad + \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} I^2 . \frac{3i + k\nu}{i + k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{1 - ee} \operatorname{Sin} \cdot \Big((i + h)\mu + k\mu' + \omega + \omega' \Big) \Big\}
\end{aligned}$$

wenn man mit $d\mu$ multiplicirt und integrirt, auch mit dem zweiten Theile des Ausdrucks [7] ganz ähnlich verfährt:

$$\begin{aligned}
[16] \ldots \delta r = \frac{-a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} I^2 \Big\{ \frac{3i - k\nu}{i - k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{i + h - k\nu} \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \Big((i+h)\mu - k\mu' + \omega - \omega' \Big) \\
+ \frac{3i - k\nu}{i - k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{c}}{i + h - k\nu} \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \Big((i+h)\mu - k\mu' + \omega - \omega' \Big) \Big\} \\
- \frac{a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} I^2 \Big\{ \frac{3i + k\nu}{i + k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{s}}{i + h + k\nu} \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \Big((i+h)\mu + k\mu' + \omega + \omega' \Big) \\
+ \frac{3i + k\nu}{i + k\nu} \cdot \frac{\overset{h}{c}}{i + h + k\nu} \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \Big((i+h)\mu + k\mu' + \omega + \omega' \Big) \Big\}
\end{aligned}$$

Setzt man nun noch

$$\operatorname{Cos} \phi = \overset{g}{C} \operatorname{Cos} g\mu, \quad \operatorname{Sin} \phi = \overset{g}{S} \operatorname{Sin} g\mu$$

und vereinigt man die Glieder, welche gleiche Cosinus enthalten, so hat man

$$\delta r = \frac{-a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \frac{3i-k\nu}{i-k\nu} \cdot \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}I^2}{i+h-k\nu} \left\{ \overset{h}{s} \overset{g}{C} - \overset{h}{c} \overset{g}{S} \right\} \operatorname{Cos}\left((i+h+g)\mu - k\mu' + \omega - \omega'\right)$$

$$- \frac{a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \frac{3i+k\nu}{i+k\nu} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}I^2}{i+h+k\nu} \left\{ \overset{h}{s} \overset{g}{C} - \overset{h}{c} \overset{g}{S} \right\} \operatorname{Cos}\left((i+h+g)\mu + k\mu' + \omega + \omega'\right)$$

Setzt man endlich

$$i + h + g = f, \quad h = f - i - g$$

so erhält man

$$[17] \ldots \delta r = \frac{-a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \cdot \frac{3i-k\nu}{i-k\nu} \cdot \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}I^2}{f-g-k\nu} \left\{ \overset{(f-i-g)}{s} \overset{g}{C} - \overset{(f-i-g)}{c} \overset{g}{S} \right\} \operatorname{Cos}(f\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$

$$- \frac{a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \cdot \frac{3i+k\nu}{i+k\nu} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}I^2}{f-g+k\nu} \left\{ \overset{(f-i-g)}{s} \overset{g}{C} - \overset{(f-i-g)}{c} \overset{g}{S} \right\} \operatorname{Cos}(f\mu + k\mu' + \omega + \omega')$$

Die Berechnung des Coefficienten eines bestimmten Cosinus, für welchen also f und k gegebene Zahlen sind, erfordert eine doppelte Summation des Ausdrucks

$$\overset{i}{a} \cdot \frac{3i-k\nu}{i-k\nu} \cdot \frac{1}{f-g-k\nu} \left\{ \overset{(f-i-g)}{s} \overset{g}{C} - \overset{(f-i-g)}{c} \overset{g}{S} \right\}$$

sowohl für i als für g; man kann für i nach und nach

$$0, \begin{matrix} +1, & +2, & +3, & \text{u. s. w.} \\ -1, & -2, & -3, & \text{u. s. w.} \end{matrix}$$

setzen und für jede dieser Voraussetzungen alle g nehmen. Diese Rechnung läfst sich erleichtern, wenn man die Logarithmen der wiederholt vorkommenden Gröfsen in Tafeln bringt, so dafs die erste derselben, mit den Argumenten k und i,

$$\operatorname{Log}\left\{ \frac{-a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \overset{k}{\alpha} \overset{i}{a} \cdot \frac{3i-k\nu}{i-k\nu} \operatorname{Cos}\frac{1}{2}I^2 \right\}$$

die andere, mit den Argumenten x und g

$$\operatorname{Log}\left\{ \overset{x}{s} \overset{g}{C} - \overset{x}{c} \overset{g}{S} \right\}$$

angiebt. Wenn der in Cos $\frac{1}{2} I^2$ multiplicirte Theil bereits berechnet ist, so findet man den in Sin $\frac{1}{2} I^2$ multiplicirten dadurch, dafs man den ersten mit

$$\frac{\overset{-k}{\alpha}}{\underset{\alpha}{\overset{k}{}}} \text{Tang } \tfrac{1}{2} I^2$$

multiplicirt und unter dem Cosinuszeichen ω' in $-\omega'$ verwandelt.

Man rechnet aber noch leichter, wenn man in [16] $i + h = n$ und $h = n - i$ setzt, wodurch man den Coefficienten von Cos ϕ Cos $(n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$= -\frac{a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \cdot \frac{\overset{k}{\alpha} \text{Cos } \frac{1}{2} I^2}{n - k\nu} \cdot \Sigma \left\{ \frac{3i - k\nu}{i - k\nu} \cdot \overset{i}{a} \cdot \overset{(n-i)}{s} \right\}$$

und den Coefficienten von Sin ϕ Sin $(n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$= -\frac{a^3 m}{a'a'\sqrt{(1-ee)}} \cdot \frac{\overset{k}{\alpha} \text{Cos } \frac{1}{2} I^2}{n - k\nu} \cdot \Sigma \left\{ \frac{3i - k\nu}{i - k\nu} \cdot \overset{i}{a} \cdot \overset{(n-i)}{c} \right\}$$

findet, beide durch eine Summation in Beziehung auf i allein; nennt man diese Coefficienten $A^{(n)}$ und $B^{(n)}$, so sind die beiden ersten Glieder von δr

$$= A^{(n)} \text{Cos } \phi \text{ Cos } (n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$
$$+ B^{(n)} \text{Sin } \phi \text{ Sin } (n\mu - k\mu' + \omega - \omega')$$

und ergeben daher, wenn man $n + g = f$ setzt, den Coefficienten von Cos $(f\mu - k\mu' + \omega - \omega')$

$$= A^{(f)} \overset{0}{C} + (A^{(f-1)} + A^{(f+1)}) \overset{1}{C} + (A^{(f-2)} + A^{(f+2)}) \overset{2}{C} + \text{u.s.w.}$$
$$- B^{(f)} \overset{0}{S} - (B^{(f-1)} - B^{(f+1)}) \overset{1}{S} - (B^{(f-2)} - B^{(f+2)}) \overset{2}{S} - \text{u.s.w.}$$

Die beiden letzten Glieder erhalten einen ganz ähnlichen Ausdruck.

6.

Die Störung der Länge in der Bahn findet man auf ganz ähnliche Art, aus dem Ausdrucke [8];

$$[18]\ldots\delta v=\frac{a\,a\,m\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}I^2}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\alpha^{k}a^{i}\left\{\frac{(2\,\mathrm{Sin}\,\phi+\frac{e}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\phi)}{1-ee}\cdot\frac{3i-kv}{i-kv}\cdot\frac{\overset{h}{s}}{i+h-kv}\mathrm{Cos}\left((i+h)\mu-k\mu'+\omega-\omega'\right)\right.$$
$$-\frac{(2\,\mathrm{Cos}\,\phi+\frac{e}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\phi+\frac{3}{2}e)}{1-ee}\cdot\frac{3i-kv}{i-kv}\cdot\frac{\overset{h}{c}}{i+h-kv}\mathrm{Sin}\left((i+h)\mu-k\mu'+\omega-\omega'\right)$$
$$\left.+\frac{5i-2kv}{(i-kv)^2}\,\mathrm{Sin}\left(i\mu-k\mu'+\omega-\omega'\right)\right\}$$

$$+\frac{a\,a\,m\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}I^2}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\alpha^{k}a^{i}\left\{\frac{(2\,\mathrm{Sin}\,\phi+\frac{e}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\phi)}{1-ee}\cdot\frac{3i+kv}{i+kv}\cdot\frac{\overset{h}{s}}{i+h+kv}\mathrm{Cos}\left((i+h)\mu+k\mu'+\omega+\omega'\right)\right.$$
$$-\frac{(2\,\mathrm{Cos}\,\phi+\frac{e}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\phi+\frac{3}{2}e)}{1-ee}\cdot\frac{3i+kv}{i+kv}\cdot\frac{\overset{h}{c}}{i+h+kv}\mathrm{Sin}\left((i+h)\mu+k\mu'+\omega+\omega'\right)$$
$$\left.+\frac{5i+2kv}{(i+kv)^2}\,\mathrm{Sin}\left(i\mu+k\mu'+\omega+\omega'\right)\right\}$$

Setzt man hier

$$2\,\mathrm{Sin}\,\phi+\frac{e}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\,\phi=(1-ee)\,\overset{g}{S'}\,\mathrm{Sin}\,g\mu$$
$$\frac{3}{2}e+2\,\mathrm{Cos}\,\phi+\frac{e}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\,\phi=(1-ee)\,\overset{g}{C'}\,\mathrm{Cos}\,g\mu$$

und, so wie bei der vorigen Entwickelung, $i+h+g=f$, so erhält man

$$[19]\ldots\delta v=\frac{aam}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\left\{\begin{array}{l}+\left\{\begin{array}{l}\alpha^{k}a^{i}\frac{3i-kv}{i-kv}\cdot\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}I^2}{f-g-kv}\left\{\overset{(f-i-g)}{s}\,\overset{g}{S'}-\overset{(f-i-g)}{c}\,\overset{g}{C'}\right\}\\+\alpha^{k}a^{f}\cdot\frac{5f-2kv}{(f-kv)^2}\end{array}\right\}\mathrm{Sin}\,(f\mu-k\mu'+\omega-\omega')\\+\left\{\begin{array}{l}\alpha^{k}a^{i}\frac{3i+kv}{i+kv}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}I^2}{f-g+kv}\left\{\overset{(f-i-g)}{s}\,\overset{g}{S'}-\overset{(f-i-g)}{c}\,\overset{g}{C'}\right\}\\+\alpha^{k}a^{f}\cdot\frac{5f+2kv}{(f+kv)^2}\end{array}\right\}\mathrm{Sin}\,(f\mu+k\mu'+\omega+\omega')\end{array}\right.$$

Von der Berechnung dieses Ausdrucks gilt alles das, was bei Gelegenheit von δr gesagt worden ist; der Vortheil, auch hier nach [18] zu rechnen, wird noch dadurch vergröfsert, dafs die bei der Berechnung von δr schon angewandten, durch A^f und B^f u.s.w. bezeichneten Summen, hier wieder eine Anwendung finden.

7.

Die Störung der Breite ist, nach [9], wenn man, um abzukürzen, für

$$\int\left\{\left(\frac{dR}{d\omega}\right)\operatorname{Cotg} I + \left(\frac{dR}{d\omega'}\right)\operatorname{Cosec} I\right\} d\mu \text{ und} \int\left(\frac{dR}{dI}\right) d\mu$$

P und P' schreibt,

$$\delta s = -\frac{a}{\sqrt{(1-ee)}}\left\{P \operatorname{Sin}(\omega+\phi) - P' \operatorname{Cos}(\omega+\phi)\right\}$$
$$= -\frac{a}{\sqrt{(1-ee)}}\left\{(P\operatorname{Sin}\omega - P'\operatorname{Cos}\omega)\operatorname{Cos}\phi + (P\operatorname{Cos}\omega + P'\operatorname{Sin}\omega)\operatorname{Sin}\phi\right\}$$

Nach [14] und [15] ist

$$P = -\frac{am}{a'a'}\cdot\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin} I\cdot \overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}\left\{\frac{1}{i-k\nu}\operatorname{Cos}(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') - \frac{1}{i+k\nu}\operatorname{Cos}(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

$$P' = -\frac{am}{a'a'}\cdot\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin} I\cdot \overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}\left\{\frac{1}{i-k\nu}\operatorname{Sin}(i\mu - k\mu' + \omega - \omega') - \frac{1}{i+k\nu}\operatorname{Sin}(i\mu + k\mu' + \omega + \omega')\right\}$$

Wenn man dieses in den letzten Ausdruck von δs setzt, so wird er

$$\delta s = \frac{aam\operatorname{Sin} I}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}}{2}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Sin}\phi\left\{\frac{\operatorname{Cos}(i\mu - k\mu' - \omega')}{i-k\nu} - \frac{\operatorname{Cos}(i\mu + k\mu' + \omega')}{i+k\nu}\right\}\\ -\operatorname{Cos}\phi\left\{\frac{\operatorname{Sin}(i\mu - k\mu' - \omega')}{i-k\nu} - \frac{\operatorname{Sin}(i\mu + k\mu' + \omega')}{i+k\nu}\right\}\end{array}\right\}$$

und wenn man Sin ϕ und Cos ϕ nach der oben schon angewandten Bezeichnung entwickelt,

$$\delta s = \frac{aam\operatorname{Sin} I}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}\overset{i}{a}}{2}\{\overset{g}{S} - \overset{g}{C}\}\left\{\frac{1}{i-k\nu}\operatorname{Sin}\big((i+g)\mu - k\mu' - \omega'\big) - \frac{1}{i+k\nu}\operatorname{Sin}\big((i+g)\mu + k\mu' + \omega'\big)\right\}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $i+g=f$, $i=f-g$, so wird er

$$[20]\ldots\ \delta s = \frac{aam\operatorname{Sin} I}{a'a'\sqrt{(1-ee)}}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}\overset{(f-g)}{a}}{2}\{\overset{g}{S} - \overset{g}{C}\}\left\{\frac{\operatorname{Sin}(f\mu - k\mu' - \omega')}{f-g-k\nu} - \frac{\operatorname{Sin}(f\mu + k\mu' + \omega')}{f-g+k\nu}\right\}$$

und erfordert daher, für gegebene f und k, nur eine Summation, in Beziehung auf g.

8.

Diese vollständige Auflösung der Aufgabe erfordert nun noch die Bestimmung der durch c, γ, C, C' und s, σ, S, S' bezeichneten Coefficienten; man erhält dieselbe nach der Methode, welche ich der Akademie am 2ten Julius 1818 vorgelegt habe. Man hat nämlich

$$2\pi \overset{i}{c} = \int \frac{r}{a} \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{s} = \int \frac{r}{a} \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{\gamma} = \int \frac{a'a'}{r'r'} \operatorname{Cos} \phi' \cdot \operatorname{Cos} i\mu' \cdot d\mu'$$

$$2\pi \overset{i}{\sigma} = \int \frac{a'a'}{r'r'} \operatorname{Sin} \phi' \cdot \operatorname{Sin} i\mu' \cdot d\mu'$$

$$2\pi \overset{i}{C} = \int \operatorname{Cos} \phi \cdot \operatorname{Cos} i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{S} = \int \operatorname{Sin} \phi \cdot \operatorname{Sin} i\mu \cdot d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{C'} = \int \left\{ \tfrac{3}{2} e + 2 \operatorname{Cos} \phi + \tfrac{1}{2} e \operatorname{Cos} 2\phi \right\} \frac{\operatorname{Cos} i\mu}{1 - ee} d\mu$$

$$2\pi \overset{i}{S'} = \int \left\{ 2 \operatorname{Sin} \phi + \tfrac{1}{2} e \operatorname{Sin} 2\phi \right\} \frac{\operatorname{Sin} i\mu}{1 - ee} d\mu$$

sämmtliche Integrale von ϕ, ε oder $\mu = 0$ bis 2π genommen. Die sechs ersten derselben lassen sich leicht auf

$$\int \operatorname{Cos} i\mu \cdot \operatorname{Cos} \varepsilon d\varepsilon \text{ und} \int \operatorname{Sin} i\mu \cdot \operatorname{Sin} \varepsilon d\varepsilon$$

zurückführen, die beiden letzten auf die Coefficienten der Entwickelung der Mittelpunktsgleichung. Denn man hat

1.... $\frac{r}{a} \operatorname{Cos} \phi = \operatorname{Cos} \varepsilon - e$, also

$$2\pi \overset{i}{c} = \int (\operatorname{Cos} \varepsilon - e) \operatorname{Cos} i\mu \, d\mu = \frac{1}{i} \operatorname{Sin} i\mu (\operatorname{Cos} \varepsilon - e) + \frac{1}{i} \int \operatorname{Sin} i\mu \cdot \operatorname{Sin} \varepsilon d\varepsilon$$

wo das erste Glied, ausgenommen für $i = 0$, verschwindet; daher

$$[21] \ldots 2\pi \overset{0}{c} = -3\pi e; \quad 2\pi \overset{i}{c} = \frac{1}{i}\int \mathrm{Sin}\, i\mu \cdot \mathrm{Sin}\, \varepsilon d\varepsilon$$

$$2 \ldots \frac{r}{a}\, \mathrm{Sin}\, \phi = \sqrt{(1-ee)}\, \mathrm{Sin}\, \varepsilon$$

$$2\pi \overset{i}{s} = \sqrt{(1-ee)}\int \mathrm{Sin}\, i\mu\, \mathrm{Sin}\, \varepsilon \cdot d\mu = \frac{-\sqrt{(1-ee)}}{i}\, \mathrm{Cos}\, i\mu\, \mathrm{Sin}\, \varepsilon + \frac{\sqrt{(1-ee)}}{i}\int \mathrm{Cos}\, i\mu\, \mathrm{Cos}\, \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$[22] \ldots 2\pi \overset{0}{s} = 0; \quad 2\pi \overset{i}{s} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{i}\int \mathrm{Cos}\, i\mu \cdot \mathrm{Cos}\, \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$3 \ldots \frac{d\left(\frac{r}{a}\, \mathrm{Sin}\, \phi\right)}{d\mu} = \frac{e + \mathrm{Cos}\, \phi}{\sqrt{(1-ee)}}, \text{ oder } \mathrm{Cos}\, \phi = \sqrt{(1-ee)}\, \frac{d\left(\frac{r}{a}\, \mathrm{Sin}\, \phi\right)}{d\mu} - e$$

Das allgemeine Glied von $\frac{r}{a}\, \mathrm{Sin}\, \phi$ ist $= \overset{i}{s}\, \mathrm{Sin}\, i\mu$, also das allgemeine Glied von $\mathrm{Cos}\, \phi = i \cdot \overset{i}{s}\, \sqrt{(1-ee)}\, \mathrm{Cos}\, i\mu$; daher

$$[23] \ldots 2\pi\, \overset{0}{C} = -2\pi e; \quad 2\pi\, \overset{i}{C} = (1-ee)\int \mathrm{Cos}\, i\mu \cdot \mathrm{Cos}\, \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$4 \ldots \frac{d\left(\frac{r}{a}\, \mathrm{Cos}\, \phi\right)}{d\mu} = \frac{-\mathrm{Sin}\, \phi}{\sqrt{(1-ee)}}, \text{ oder } \mathrm{Sin}\, \phi = -\sqrt{(1-ee)}\, \frac{d\left(\frac{r}{a}\, \mathrm{Cos}\, \phi\right)}{d\mu}$$

Das allgemeine Glied von $\frac{r}{a}\, \mathrm{Cos}\, \phi$ ist $= \overset{i}{c}\, \mathrm{Cos}\, i\mu$, also das allgemeine Glied von $\mathrm{Sin}\, \phi = i \cdot \overset{i}{c}\, \sqrt{(1-ee)}\, \mathrm{Sin}\, i\mu$; daher

$$[24] \ldots 2\pi\, \overset{i}{S} = \sqrt{(1-ee)}\int \mathrm{Sin}\, i\mu\, \mathrm{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$5 \ldots \frac{d\, \mathrm{Sin}\, \phi}{d\mu} = \frac{aa}{rr}\sqrt{(1-ee)}\, \mathrm{Cos}\, \phi, \text{ oder } \frac{aa}{rr}\, \mathrm{Cos}\, \phi = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}\, \frac{d\, \mathrm{Sin}\, \phi}{d\mu}, \text{ folglich}$$

$$[25] \ldots 2\pi \overset{i}{\gamma} = i\int \mathrm{Sin}\, i\mu'\, \mathrm{Sin}\, \varepsilon'\, d\varepsilon'$$

$$6 \ldots \frac{d\, \mathrm{Cos}\, \phi}{d\mu} = \frac{-aa}{rr}\sqrt{(1-ee)}\, \mathrm{Sin}\, \phi, \text{ oder } \frac{aa}{rr}\, \mathrm{Sin}\, \phi = \frac{-1}{\sqrt{(1-ee)}} \cdot \frac{d\, \mathrm{Cos}\, \phi}{d\mu}, \text{ folglich}$$

$$[26] \ldots 2\pi \overset{i}{\sigma} = i\sqrt{(1-e'e')}\int \mathrm{Cos}\, i\mu'\, \mathrm{Cos}\, \varepsilon'\, d\varepsilon'$$

$$7\ldots\ \frac{\frac{3}{2}e + 2\,\mathrm{Cos}\,\phi + \frac{1}{2}e\,\mathrm{Cos}\,2\phi}{1-ee} = \frac{1-ee}{e\,(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)^2} - \frac{1}{e}$$

$$\frac{d\phi}{d\mu} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\frac{3}{2}e + 2\,\mathrm{Cos}\,\phi + \frac{1}{2}e\,\mathrm{Cos}\,2\phi}{1-ee} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{e}\cdot\frac{d\phi}{d\mu} - \frac{1}{e}$$

Wenn man daher die Mittelpunktsgleichung durch

$$\phi - \mu = 2A'\,\mathrm{Sin}\,\mu + 2A''\,\mathrm{Sin}\,2\mu + \text{u.s.w.}$$

bezeichnet, so hat man

$$[27]\ldots\ \overset{o}{C}{}' = \frac{-1+\sqrt{(1-ee)}}{e};\quad \overset{i}{C}{}' = \frac{i\sqrt{(1-ee)}}{e}\,A^{(i)}$$

$$8\ldots\ \frac{d\phi}{de} = \frac{\mathrm{Sin}\,\phi}{1-ee}\,(2+e\,\mathrm{Cos}\,\phi) = \frac{(2\,\mathrm{Sin}\,\phi + \frac{1}{2}e\,\mathrm{Sin}\,2\phi)}{1-ee}, \text{ also}$$

$$[28]\ldots\ \overset{i}{S}{}' = \frac{dA^{(i)}}{de}.$$

Die beiden in den sechs ersten Formeln vorkommenden Integrale

$$\int \mathrm{Cos}\,i\mu\cdot\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon \text{ und} \int \mathrm{Sin}\,i\mu\cdot\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,d\varepsilon$$

kann man leicht auf $\int \mathrm{Cos}\,(h\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$ reduciren, wo h eine ganze Zahl bedeutet; dieses letzte Integral werde ich durch

$$\int \mathrm{Cos}\,(h\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\pi\,\mathrm{I}^h_k$$

bezeichnen. Man hat nämlich

$$\int \mathrm{Cos}\,i\mu\cdot\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon = \int \mathrm{Cos}\,i\mu\Big(1 - (1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)\Big)\frac{d\varepsilon}{e}$$

$$= \frac{1}{e}\int \mathrm{Cos}\,i\mu\cdot d\varepsilon - \frac{1}{e}\int \mathrm{Cos}\,i\mu\cdot d\mu$$

wo der letzte Theil, von $\mu = 0$ bis $\mu = 2\pi$ genommen, verschwindet; also

$$[29]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int \mathrm{Cos}\,i\mu\cdot\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon = 2\pi\cdot\frac{1}{e}\,\mathrm{I}^i_{ie}$$

Ferner hat man

$$\int \mathrm{Sin}\,i\mu\cdot\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,d\varepsilon = \int \mathrm{Cos}\,i\mu\cdot\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon - \int \mathrm{Cos}\,(\varepsilon + i\mu)\,d\varepsilon$$

oder

$$[30] \ldots\ldots\ldots\ldots \int \mathrm{Sin}\, i\mu \cdot \mathrm{Sin}\, \varepsilon\, d\varepsilon = 2\pi \frac{1}{e} \mathrm{I}^{i}_{ie} - 2\pi \cdot \mathrm{I}^{i+1}_{ie}$$

Die Reihenentwickelung von I^{h}_{k} erhält man auf die, in meiner Abhandlung über die Keplersche Aufgabe angewandte Art (¹), nämlich

$$[31] \ldots \mathrm{I}^{h}_{k} = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{h}}{\Pi h} \left\{ 1 - \frac{1}{h+1}\left(\frac{k}{2}\right)^{2} + \frac{1}{1.2\,(h+1)\,(h+2)}\left(\frac{k}{2}\right)^{4} - \frac{1}{1.2.3\,(h+1)\,(h+2)\,(h+3)}\left(\frac{k}{2}\right)^{6} + \text{u.s.w.} \right\}$$

woraus also folgende Formeln für die Berechnung der Coefficienten der obigen Ausdrücke hervorgehen, wobei die Reihen

$$1 - \frac{1}{i+1} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^{2} + \frac{1}{1.2\,(i+1)\,(i+2)}\left(\frac{ie}{2}\right)^{4} - \text{u.s.w.}$$

$$1 - \frac{1}{i+2} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^{2} + \frac{1}{1.2\,(i+2)\,(i+3)}\left(\frac{ie}{2}\right)^{4} - \text{u.s.w.}$$

der Kürze wegen durch ϕi und $\phi' i$ bezeichnet sind:

$$\overset{i}{c} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2\,\Pi\, i} \left\{ \phi i - \frac{ee\,i}{2i+2}\, \phi' i \right\} \quad ; \quad \overset{0}{c} = -\tfrac{3}{2} e$$

$$\overset{i}{s} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2\,\Pi\, i} \sqrt{(1-ee)} \cdot \phi i \quad ; \quad \overset{0}{s} = 0$$

$$\overset{i}{C} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i}}{e\,\Pi\, i} (1-ee) \cdot \phi i \quad ; \quad \overset{0}{C} = -e$$

$$\overset{i}{S} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i}}{e\,\Pi\, i} \sqrt{(1-ee)} \left\{ \phi i - \frac{ee\,i}{2i+2}\, \phi' i \right\} \quad ; \quad \overset{0}{S} = 0$$

$$\overset{i}{\gamma} = \frac{i\left(\frac{ie'}{2}\right)^{i}}{e'\,\Pi\, i} \left\{ \phi i - \frac{e'e'\,i}{2i+2}\, \phi' i \right\} \quad ; \quad \overset{0}{\gamma} = 0$$

$$\overset{i}{\sigma} = \frac{i\left(\frac{ie'}{2}\right)^{i}}{e'\,\Pi\, i} \sqrt{(1-e'e')} \cdot \phi i \quad ; \quad \overset{0}{\sigma} = 0$$

$$\overset{i}{a} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2\,\Pi\, i} \left\{ \left(1 + \sqrt{(1-ee)}\right) \phi i - \frac{ee\,i}{2i+2}\, \phi' i \right\} ; \quad \overset{0}{a} = -\tfrac{3}{2} e$$

(¹) Abhandlungen der Akademie 1816-17. Mathemat. Klasse S. 55.

$$\overset{-i}{a} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{2\,\Pi\, i}\left\{\left(1 - \sqrt{(1-ee)}\right)\phi i - \frac{ee\,i}{2i+2}\,\phi' i\right\}$$

$$\overset{i}{a} = \frac{i\left(\frac{ie'}{2}\right)^{i}}{e'\,\Pi\, i}\left\{\left(1 + \sqrt{(1-e'e')}\right)\phi i - \frac{e'e'\,i}{2i+2}\,\phi' i\right\}\;;\quad \overset{0}{a} = 0$$

$$\overset{-i}{a} = \frac{i\left(\frac{ie'}{2}\right)^{i}}{e'\,\Pi\, i}\left\{\left(1 - \sqrt{(1-e'e')}\right)\phi i - \frac{e'e'\,i}{2i+2}\,\phi' i\right\}$$

Die Zahlenwerthe von $\overset{i}{C'}$ und $\overset{i}{S'}$ leitet man aus den bekannten Coefficienten der Reihenentwickelung der Mittelpunktsgleichung nach [27] und [28] ab.

9.

In den meisten vorkommenden Fällen werden die Ausdrücke von δr, δv, δs sehr schnell convergiren, wenn man sie in Reihen entwickelt, welche nach den Potenzen der Excentricitäten und der Neigung fortschreiten; diese Reihen erhält man, wenn man die eben bestimmten Coefficienten nach den Potenzen von e, e', I schreibt und in die Ausdrücke [17], [19] und [20] setzt. Durch eine doppelt, sowohl nach dieser, als noch nach einer andern Art, geführte Rechnung habe ich diese Reihen bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung incl. entwickelt, und führe das Resultat davon hier an; wenn die höheren Ordnungen noch merkliche Werthe haben, so ist es bequemer, nach der oben entwickelten strengen Methode zu rechnen.

$$[52]\ldots\ \delta r = m\cdot\frac{a^3}{a'a'}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}I^2\sqrt{(1-e'e')}\ \times$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cos}\,(\mu-\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{2}\left\{-\frac{3}{\nu}+\frac{4}{\nu-1}-\frac{1}{\nu-2}+\frac{ee}{2}\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{3}{\nu}-\frac{2}{\nu-1}\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.+\frac{1}{\nu-2}-\frac{3}{\nu-3}+\frac{6}{(\nu-2)^2}\right)\right\}\\
&+\mathrm{Cos}\,(\ \ -\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{4}e\left\{\frac{1}{\nu+1}+\frac{6}{\nu}-\frac{5}{\nu-1}-\frac{2}{\nu-2}+\frac{6}{(\nu-1)^2}\right\}\\
&+\mathrm{Cos}\,(2\mu-\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{4}e\left\{-\frac{6}{\nu}-\frac{1}{\nu-1}+\frac{10}{\nu-2}-\frac{3}{\nu-3}-\frac{6}{(\nu-1)^2}\right\}\\
&+\mathrm{Cos}\,(\mu-2\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{2}e'\left\{-\frac{3}{\nu}-\frac{1}{\nu-1}+\frac{8}{2\nu-1}\right\}\\
&+\mathrm{Cos}\,(\mu+\mu'+\omega-\omega')\ \tfrac{1}{16}e'e'\left\{\ \ \frac{3}{\nu}-\frac{4}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&+\operatorname{Cos}(-\mu-\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{16}\,ee\left\{\frac{2}{\nu+2}-\frac{8}{\nu+1}+\frac{27}{\nu}-\frac{12}{\nu-1}-\frac{9}{\nu-2}+\frac{24}{(\nu-1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Cos}(3\mu-\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{16}\,ee\left\{-\frac{27}{\nu}+\frac{4}{\nu-1}-\frac{9}{\nu-2}+\frac{48}{\nu-3}-\frac{16}{\nu-4}-\frac{24}{(\nu-1)^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{24}{(\nu-2)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Cos}(-2\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{2}\,ee'\left\{+\frac{3}{\nu}-\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{2\nu+1}-\frac{5}{2\nu-1}+\frac{6}{(2\nu-1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Cos}(2\mu-2\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{2}\,ee'\left\{-\frac{3}{\nu}+\frac{5}{\nu-1}-\frac{1}{2\nu-1}-\frac{3}{2\nu-3}-\frac{6}{(2\nu-1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Cos}(\mu-3\mu'+\omega-\omega')\tfrac{27}{16}\,e'e'\left\{\frac{1}{\nu}-\frac{4}{3\nu-1}+\frac{1}{3\nu-2}\right\}\\
&+\operatorname{Cos}(\mu+\mu'+\omega+\omega')\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}I^2\left\{\frac{3}{\nu}-\frac{4}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
[33]\ldots\ \delta\nu = m\cdot\frac{a\,a}{a'\,a'}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}I^2\sqrt{(1-e'e')}\ \times
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\operatorname{Sin}(\mu-\mu'+\omega-\omega')\left\{\frac{3}{\nu}-\frac{2}{\nu-1}-\frac{1}{\nu-2}+\frac{3}{(\nu-1)^2}+\frac{ee}{8}\left(-\frac{5}{\nu+1}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{4}{\nu-1}+\frac{16}{\nu-2}-\frac{15}{\nu-3}-\frac{12}{(\nu-1)^2}+\frac{24}{(\nu-2)^2}\right)\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(-\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{4}\,e\left\{-\frac{2}{\nu+1}+\frac{9}{\nu}-\frac{2}{\nu-1}-\frac{5}{\nu-2}+\frac{12}{(\nu-1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(2\mu-\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{4}\,e\left\{\frac{15}{\nu}-\frac{6}{\nu-1}-\frac{3}{\nu-2}-\frac{6}{\nu-3}+\frac{12}{(\nu-1)^2}+\frac{12}{(\nu-2)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(\mu-2\mu'+\omega-\omega')\,e'\left\{\frac{3}{\nu}-\frac{4}{2\nu-1}-\frac{2}{2\nu-2}+\frac{6}{(2\nu-1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(\mu+\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{8}\,e'e'\left\{\frac{1}{\nu+2}+\frac{2}{\nu+1}-\frac{3}{\nu}+\frac{3}{(\nu+1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(-\mu-\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{8}\,ee\left\{-\frac{2}{\nu+2}-\frac{1}{\nu+1}+\frac{21}{\nu}-\frac{5}{\nu-1}-\frac{13}{\nu-2}-\frac{3}{(\nu+1)^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{30}{(\nu-1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(3\mu-\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{8}\,ee\left\{\frac{39}{\nu}-\frac{15}{\nu-1}-\frac{5}{\nu-2}-\frac{3}{\nu-3}-\frac{16}{\nu-4}+\frac{30}{(\nu-1)^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{24}{(\nu-2)^2}+\frac{27}{(\nu-3)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(-2\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{2}\,ee'\left\{-\frac{2}{2\nu+1}+\frac{9}{2\nu}-\frac{2}{2\nu-1}-\frac{5}{2\nu-2}+\frac{12}{(2\nu-1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(2\mu-2\mu'+\omega-\omega')\tfrac{1}{2}\,ee'\left\{\frac{15}{2\nu}-\frac{6}{2\nu-1}-\frac{3}{2\nu-2}-\frac{6}{2\nu-3}+\frac{12}{(2\nu-1)^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{12}{(2\nu-2)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(\mu-3\mu'+\omega-\omega')\tfrac{27}{8}\,e'e'\left\{-\frac{1}{\nu}+\frac{2}{3\nu-1}+\frac{1}{3\nu-2}-\frac{5}{(3\nu-1)^2}\right\}\\
&+\operatorname{Sin}(\mu+\mu'+\omega+\omega')\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}I^2\left\{-\frac{3}{\nu}+\frac{2}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{3}{(\nu+1)^2}\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

$$[34] \ldots . \delta s = m \cdot \frac{a\,a}{a'\,a'} \frac{\operatorname{Sin} I}{2} \times$$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Sin}(\mu' + \omega') \left\{\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu-1}\right\} \\ + \operatorname{Sin}(2\mu' + \omega')\, 2e' \left\{\frac{1}{2\nu+1} - \frac{1}{2\nu+1}\right\} \\ + \operatorname{Sin}(\mu + \mu + \omega') \frac{e}{2} \left\{-\frac{2}{\nu+1} + \frac{3}{\nu} - \frac{2}{\nu-1} + \frac{1}{\nu+2}\right\} \\ + \operatorname{Sin}(-\mu + \mu' + \omega') \cdot \frac{e}{2} \left\{\frac{2}{\nu+1} - \frac{3}{\nu} + \frac{2}{\nu-1} - \frac{1}{\nu-2}\right\} \end{array}\right.$$

10.

Obgleich die immer convergirende Reihe [31] zu der Berechnung der Zahlenwerthe von I_k^h hinreicht und daher für die Aufgabe, welche aufgelöset werden sollte, von dieser Seite nichts zu wünschen übrig bleibt, so glaube ich doch diese Gelegenheit benutzen zu dürfen, um über die bestimmten Integrale, welche hier angewandt worden sind, etwas zu sagen.

Nicht nur die Mittelpunktsgleichung und die Gröfsen

$$\operatorname{Cos}\phi,\ \operatorname{Sin}\phi,\ r\operatorname{Cos}\phi,\ r\operatorname{Sin}\phi,\ \frac{1}{rr}\operatorname{Cos}\phi,\ \frac{1}{rr}\operatorname{Sin}\phi$$

führen in ihrer Entwickelung auf diese bestimmten Integrale, sondern dieses ist auch der Fall bei

$$\log r,\ r^n,\ r^n \operatorname{Cos} m\phi,\ r^n \operatorname{Sin} m\phi,\ r^n \operatorname{Cos} m\varepsilon,\ r^n \operatorname{Sin} m\varepsilon$$

immer wenn n und m ganze, entweder positive oder negative Zahlen, 0 nicht ausgeschlossen, sind. Da die meisten Probleme der physischen Astronomie auf solche Reihenentwickelungen zurückführen, so ist eine genauere Kenntnifs dieser Integrale wünschenswerth.

Ich werde, der Kürze wegen, die vier Integrale, von 0 bis 2π genommen, folgendermafsen bezeichnen:

$$\frac{2\pi}{e} \mathrm{L} = \int \operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos}\varepsilon\, d\varepsilon;\quad \frac{2\pi}{e} \mathrm{L}' = \int \operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin}\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$\frac{2\pi}{e} \mathrm{M} = \int \frac{\operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos}\varepsilon\, d\varepsilon}{1 - e\operatorname{Cos}\varepsilon};\quad \frac{2\pi}{e} \mathrm{M}' = \int \frac{\operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin}\varepsilon\, d\varepsilon}{1 - e\operatorname{Cos}\varepsilon}$$

und zuerst zeigen, dafs die Entwickelung der angeführten Gröfsen von denselben abhängt.

Bezeichnet man den Coefficienten von Cos $i\mu$ in der Entwickelung des Logarithmen von r durch $\overset{i}{\mathrm{H}}$ und nimmt man denselben so, dafs die Reihe nicht nur alle positiven ganzen i, sondern auch die negativen enthält, so hat man

$$2\pi \overset{i}{\mathrm{H}} = \int \log r \operatorname{Cos} i\mu \cdot d\mu$$
$$= \frac{1}{i} \log r \operatorname{Sin} i\mu - \frac{e}{i} \int \frac{\operatorname{Sin} i\mu \cdot \operatorname{Sin} \varepsilon\, d\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon}$$

also, mit Ausnahme von $i = 0$,

$$[35] \ldots\ldots\ldots \overset{i}{\mathrm{H}} = -\frac{1}{i} M'$$

Für $i = 0$ erhält man einen logarithmischen Ausdruck; man hat nämlich, wenn man

$$\frac{e}{1 + \sqrt{(1 - ee)}}$$

durch λ bezeichnet und die halbe grofse Axe $= 1$ annimmt,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ 1 + 2\lambda \operatorname{Cos} \varepsilon + 2\lambda^2 \operatorname{Cos} 2\varepsilon + 2\lambda^3 \operatorname{Cos} 3\varepsilon + \ldots \right\}$$

und wenn man mit $dr = e \operatorname{Sin} \varepsilon\, d\varepsilon$ multiplicirt und integrirt

$$\log r = c - 2 \left\{ \lambda \operatorname{Cos} \varepsilon + \tfrac{1}{2} \lambda^2 \operatorname{Cos} 2\varepsilon + \tfrac{1}{3} \lambda^3 \operatorname{Cos} 3\varepsilon + \ldots \right\},$$

zur Bestimmung der Constante c ist, für $\varepsilon = 0$

$$\log (1 - e) = c - 2 \left\{ \lambda + \tfrac{1}{2} \lambda^2 + \tfrac{1}{3} \lambda^3 + \ldots \right\} = c + 2l(1 - \lambda)$$

also

$$\log r = l \frac{1 - e}{(1 - \lambda)^2} - 2 \left\{ \lambda \operatorname{Cos} \varepsilon + \tfrac{1}{2} \lambda^2 \operatorname{Cos} 2\varepsilon + \tfrac{1}{3} \lambda^3 \operatorname{Cos} 3\varepsilon + \ldots \right\}$$

und wenn man dieses mit $d\mu = (1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon)\, d\varepsilon$ multiplicirt und von 0 bis 2π integrirt

$$[36] \ldots\ldots\ldots \overset{0}{\mathrm{H}} = l \frac{1 - e}{(1 - \lambda)^2} + \lambda e = l \frac{1 + \sqrt{(1 - ee)}}{2} + \frac{ee}{1 + \sqrt{(1 - ee)}}$$

Den Coefficienten von Cos $i\mu$ in der Entwickelung der ganzen Potenzen des Radiusvectors $= r^n$, bezeichne ich durch $C^{(n)}$; ich werde zuerst die vier Integrale durch diese Coefficienten ausdrücken und dann eine allgemeine Relation zwischen den zu verschiedenen Potenzen von r gehörigen C geben, woraus denn hervorgehen wird, dafs $C^{(n)}$ jedesmal auf diese Integrale zurückgeführt werden kann.

Man hat

$$1 \ldots \int \operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos} \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{1}{e} \int \operatorname{Cos} i\mu \, (1-r) \, d\varepsilon = \frac{2\pi}{e} C^{(-1)}$$

wovon $i = 0$ ausgenommen ist.

$$2 \ldots \int \operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin} \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{r}{e} \operatorname{Sin} i\mu - \frac{i}{e} \int rr \operatorname{Cos} i\mu \, d\varepsilon = -\frac{2\pi}{e} i \, C^{(1)}$$

$$3 \ldots \int \frac{\operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos} \varepsilon \, d\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon} = \frac{1}{e} \int \operatorname{Cos} i\mu \left(\frac{1}{r} - 1\right) d\varepsilon = \frac{2\pi}{e} \left\{ - C^{(-1)} + C^{(-2)} \right\}$$

$$4 \ldots \int \frac{\operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin} \varepsilon \, d\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon} = -\frac{1}{i} \frac{\operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Sin} \varepsilon}{(1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon)^2} + \frac{1}{i} \int \operatorname{Cos} i\mu \cdot d\left(\frac{\operatorname{Sin} \varepsilon}{rr}\right)$$

wenn man im letzten Gliede wirklich differentiirt und Sin ε^2 durch r eliminirt, so erhält man, mit Ausnahme von $i = 0$,

$$\int \frac{\operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin} \varepsilon \, d\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon} = \frac{1}{ie} \int \operatorname{Cos} i\mu \, d\varepsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{rr} + \frac{2(1-ee)}{r^3}\right)$$

oder

$$= \frac{2\pi}{e} \cdot \frac{1}{i} \left\{ C^{(-2)} - 3 \, C^{(-3)} + 2(1-ee) \, C^{(-4)} \right\}$$

Die oben erwähnte allgemeine Relation erhält man, wenn man den zweiten Differentialquotienten von r^n, vor und nach der Entwickelung in die Reihe, vergleicht; man hat nämlich dadurch

$$\frac{d^2 r^n}{d\mu^2} = -n \cdot (n-1) \, r^{n-2} + n \, (2n-3) \, r^{n-3} - n \, (n-2) \, (1-ee) \, r^{n-4}$$
$$= -\Sigma \, ii \, C^{(n)} \operatorname{Cos} i\mu$$

folglich

$$[37] \ldots 0 = ii \, C^{(n)} - n(n-1) \, C^{(n-2)} + n \, (2n-3) \, C^{(n-3)} - n \, (n-2) \, (1-ee) \, C^{(n-4)}$$

und diese Relation, verbunden mit den vorher gegebenen vier Sätzen, bestimmt alle $C^{(n)}$. Für verschiedene Werthe von n findet man nämlich:

$$
\begin{aligned}
n = -2 \ldots 0 &= ii\,C^{(-2)} - 6\,C^{(-4)} + 14\,C^{(-5)} - 8\,(1-ee)\,C^{(-6)} \\
n = -1 \ldots 0 &= ii\,C^{(-1)} - 2\,C^{(-3)} + 5\,C^{(-4)} - 3\,(1-ee)\,C^{(-5)} \\
n = 0 \ldots 0 &= ii\,C^{(0)} \\
n = +1 \ldots 0 &= ii\,C^{(1)} \qquad * \qquad - C^{(-2)} + (1-ee)\,C^{(-3)} \\
n = +2 \ldots 0 &= ii\,C^{(2)} - 2\,C^{(0)} + 2\,C^{(-1)} \qquad * \\
n = +3 \ldots 0 &= ii\,C^{(3)} - 6\,C^{(1)} + 9\,C^{(0)} - 3\,(1-ee)\,C^{(-1)} \\
n = +4 \ldots 0 &= ii\,C^{(4)} - 12\,C^{(2)} + 20\,C^{(1)} - 8\,(1-ee)\,C^{(0)} \\
&\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Ferner hat man die vier Sätze

$$
[38] \ldots \begin{cases} \mathrm{L} = C^{(-1)} \quad ; \; \mathrm{L}' = -i\,C^{(1)} \\ \mathrm{M} = -C^{(-1)} + C^{(-2)} \; ; \; \mathrm{M}' = \frac{1}{i}\left\{C^{(-2)} - 3\,C^{(-3)} + 2\,(1-ee)\,C^{(-4)}\right\} \end{cases}
$$

so dafs die Verbindung derselben mit den eben angeführten Gleichungen sowohl hinreichend als nothwendig ist, um alle C zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
C^{(-4)} &= \left\{(2+ee)\,\mathrm{L} + 3\,i\,\mathrm{L}' + (2+ee)\,\mathrm{M} + i\,(1-ee)\,\mathrm{M}'\right\} : 2\,(1-ee)^2 \\
C^{(-3)} &= \left\{\mathrm{L} + i\mathrm{L}' + \mathrm{M}\right\} : (1-ee) \\
C^{(-2)} &= \mathrm{L} + \mathrm{M} \\
C^{(-1)} &= \mathrm{L} \\
C^{(1)} &= -\frac{1}{i}\,\mathrm{L}' \\
C^{(2)} &= -\frac{2}{ii}\,\mathrm{L} \\
C^{(3)} &= \frac{3\,(1-ee)}{ii}\,\mathrm{L} - \frac{6}{i^3}\,\mathrm{L}' \\
C^{(4)} &= -\frac{24}{i^4}\,\mathrm{L} - \frac{20}{i^3}\,\mathrm{L}' \\
&\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Für $i = 0$ hat man, statt der Relation [37], die folgende

$$[39] \ldots 0 = (n+1)\, C^{(n)} - (2n+1)\, C^{(n-1)} + (1-ee)\, n\, C^{(n-2)}$$

und diese, verbunden mit

$$C^{(0)} = 1\,;\quad C^{(-1)} = 1\,;\quad C^{(-2)} = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}$$

giebt alle übrigen C.

Dafs auch $r^n \operatorname{Cos} m\phi$ und $r^n \operatorname{Sin} m\phi$ von den vier Integralen abhängen, läfst sich am leichtesten dadurch zeigen, dafs man diese Ausdrücke von ϕ befreiet und dagegen r einführt. Man hat nämlich $\operatorname{Cos} m\phi$ gleich einer ganzen rationalen Function von $\operatorname{Cos}\phi = \frac{1-ee}{er} - \frac{1}{e}$, wodurch $r^n \operatorname{Cos} m\phi$ sich in eine Reihe von Gliedern, von der Form $F \cdot r^f$ verwandelt, deren jedes daher, in seiner Entwickelung, den Coefficienten von $\operatorname{Cos} i\mu = F \cdot C^{(f)}$ giebt; $r^n \operatorname{Sin} m\phi$ ist dagegen gleich einer Reihe von Gliedern von der Form $F\, r^f \operatorname{Sin}\phi$, oder

$$F\,\frac{\sqrt{(1-ee)}}{e} \cdot \frac{r^f\, dr}{d\mu} = F\,\frac{\sqrt{(1-ee)}}{e\,(f+1)}\,\frac{d \cdot r^{f+1}}{d\mu}$$

und der Coefficient von $\operatorname{Sin} i\mu$ daher

$$= -F \cdot \frac{i\sqrt{(1-ee)}}{e\,(f+1)}\, C^{(f+1)}.$$

Eben so wie $r^n \operatorname{Cos} m\phi$ und $r^n \operatorname{Sin} m\phi$ verhalten sich in dieser Beziehung $r^n \operatorname{Cos} m\varepsilon$ und $r^n \operatorname{Sin} m\varepsilon$. Es geht also hieraus hervor, dafs alle Entwickelungen der ganzen Potenzen des Radiusvectors, oder der Producte dieser Potenzen in Cosinusse oder Sinusse der Vielfachen der Anomalien, von den vier Integralen abhängen. Die zweckmäfsigsten Arten, die Reduction wirklich zu machen, wird man aus den unten vorkommenden weiteren Untersuchungen über die Integrale ableiten.

11.

Was die beiden ersten Integrale L und L′ betrifft, so ist ihre Reduction auf I_k^h oben [29] und [30] schon gegeben; wir werden also nur diese transcendente Function näher untersuchen dürfen.

Man hat

$$\mathrm{Cos}\left((i+1)\,\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\right) + \mathrm{Cos}\left((i-1)\,\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\right) = 2\,\mathrm{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon$$

und wenn man das letzte Glied

$$\frac{2i}{k}\,\mathrm{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon) - \frac{2}{k}\,\mathrm{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,(i - k\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)$$

schreibt, mit $d\varepsilon$ multiplicirt und von 0 bis 2π integrirt

$$[40] \ldots\ldots\ldots\ 0 = k\,\mathrm{I}_k^{i-1} - 2i\,\mathrm{I}_k^i + k\,\mathrm{I}_k^{i+1}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dafs man durch zwei Functionen dieser Art alle übrigen ausdrücken kann, und dafs man daher nur zwei, z. B.

$$\mathrm{I}_k^0 = 1 - \frac{k^2}{2^2} + \frac{k^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{k^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \text{etc.}\ldots$$

$$\mathrm{I}_k^1 = \frac{2k}{2^2} - \frac{4k^3}{(2\cdot 4)^2} + \frac{6k^5}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} - \frac{8k^7}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8)^2} + \text{etc.}\ldots$$

zu kennen braucht, um alle I_k^i dadurch zu finden; ferner dafs

$$[41] \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{I}_k^{-i} = (-1)^i\,\mathrm{I}_k^i$$

ist, so dafs also nur positive ganze i betrachtet werden dürfen.

Den Ausdruck von I_k^i durch I_k^0 und I_k^1 erhält man durch die Eigenschaften der Kettenbrüche. Man hat nämlich aus [40]

$$\frac{\mathrm{I}_k^i}{\mathrm{I}_k^{i-1}} = \cfrac{\frac{k}{2i}}{1 - \frac{k}{2i}\cdot\frac{\mathrm{I}_k^{i+1}}{\mathrm{I}_k^i}}$$

und wenn man dieses fortsetzt

$$[42] \ldots \frac{\mathrm{I}_k^i}{\mathrm{I}_k^{i-1}} = \cfrac{\frac{k}{2i}}{1 - \cfrac{kk}{2i.2i+2}\,\cfrac{}{1 - \cfrac{kk}{2i+2.2i+4}\,\cfrac{}{\vdots\,\cfrac{}{1 - \cfrac{kk}{2i+2h-4.2i+2h-2}\,\cfrac{}{1 - \frac{k}{2i+2h-2}\cdot\frac{\mathrm{I}_k^{i+h}}{\mathrm{I}_k^{i+h-1}}}}}}}$$

Für $h = \infty$ giebt dieser Kettenbruch das Verhältnifs zweier aufeinander folgenden Functionen unabhängig von anderen;

für $i = 1$ und $h = i - 1$ giebt er

$$[43] \ldots \frac{\mathrm{I}_k^1}{\mathrm{I}_k^0} = \cfrac{\frac{k}{2}}{1 - \cfrac{kk}{2.4 \; 1 - \cfrac{kk}{4.6 \; \ddots \; 1 - \cfrac{kk}{2i-4 \,.\, 2i-2 \; 1 - \cfrac{k}{2i-2} \cdot \cfrac{\mathrm{I}_k^i}{\mathrm{I}_k^{i-1}}}}}}$$

Verwandelt man diesen Kettenbruch, bis zu einem Gliede $1 - \frac{kk}{2h-2.2h}$ incl. genommen, in einen gewöhnlichen Bruch und bezeichnet man Zähler und Nenner desselben durch $A^{(h)}$ und $B^{(h)}$, so hat man [43]

$$\frac{\mathrm{I}_k^1}{\mathrm{I}_k^0} = \frac{A^{(i-1)} - \frac{k}{2i-2} \cdot A^{(i-2)} \, \mathrm{I}_k^i : \mathrm{I}_k^{i-1}}{B^{(i-1)} - \frac{k}{2i-2} \cdot B^{(i-2)} \, \mathrm{I}_k^i : \mathrm{I}_k^{i-1}}$$

oder ..... $$\frac{\mathrm{I}_k^i}{\mathrm{I}_k^{i-1}} = \frac{2i-2}{k} \cdot \frac{A^{(i-1)} - B^{(i-1)} \, \mathrm{I}_k^1 : \mathrm{I}_k^0}{A^{(i-2)} - B^{(i-2)} \, \mathrm{I}_k^1 : \mathrm{I}_k^0} \quad ;$$

ähnliche Ausdrücke hat man, wenn man successive i in $i - 1$, $i - 2$, $i - 3 \ldots . 2$ verwandelt; multiplicirt man dieselben miteinander, so ist das Product

$$\frac{\mathrm{I}_k^i}{\mathrm{I}_k^1} = \frac{2 \cdot 4 \ldots . 2i-2}{k^{i-1}} \cdot \frac{A^{(i-1)} - B^{(i-1)} \, \mathrm{I}_k^1 : \mathrm{I}_k^0}{-\mathrm{I}_k^1 : \mathrm{I}_k^0}$$

oder

$$[44] \ldots . \mathrm{I}_k^i = \frac{-2 \cdot 4 \ldots . 2i-2}{k^{i-1}} \left\{ A^{(i-1)} \, \mathrm{I}_k^0 - B^{(i-1)} \, \mathrm{I}_k^1 \right\}$$

Eliminirt man I_k^0 und I_k^1 aus drei Ausdrücken dieser Art für I_k^i, I_k^h, I_k^l, so erhält man eine Gleichung zwischen diesen drei Functionen, welche durch Berücksichtigung der bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche, auf ihre einfachste Gestalt gebracht

werden kann. Wenn aber k ein kleiner Bruch ist, so ist weder [44], noch ein anderer endlicher Ausdruck, welcher ein höheres I_k^i aus zwei niedrigeren ergiebt, zur Rechnung bequem; denn da I_k^i von der Ordnung von k^i ist, so ist $A^{(i-1)}\mathrm{I}_k^0 - B^{(i-1)}\mathrm{I}_k^1$ von der Ordnung von k^{2i-1} und wird durch den Unterschied zweier Gröfsen von der Ordnung von k gefunden, also mit desto geringerer Genauigkeit, je kleiner k und je gröfser i ist.

Von dieser Unbequemlichkeit frei ist ein anderer, aber unendlicher Ausdruck von I_k^i, welchen man leicht aus [44] ableiten kann. Eliminirt man nämlich I_k^1 aus den Ausdrücken von I_k^i und I_k^{i+1}, so erhält man

$$-\frac{2i}{k}B^{(i)}\mathrm{I}_k^i + B^{(i-1)}\mathrm{I}_k^{i+1} = \frac{2\cdot 4\ldots\ldots 2i}{k^i}\left\{A^{(i-1)}B^{(i)} - A^{(i)}B^{(i-1)}\right\}\mathrm{I}_k^0$$

und nach den bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche hat man

$$A^{(i-1)}B^{(i)} - A^{(i)}B^{(i-1)} = \frac{-k^{2i-1}}{2^2\cdot 4^2\ldots\ldots(2i-2)^2\cdot 2i};$$

setzt man dieses in den eben gefundenen Ausdruck, so wird er

$$-\frac{2i}{k}B^{(i)}\mathrm{I}_k^i + B^{(i-1)}\mathrm{I}_k^{i+1} = \frac{-k^{i-1}}{2\cdot 4\ldots\ldots 2i-2}\mathrm{I}_k^0$$

$$\text{oder}\ldots\mathrm{I}_k^i = \frac{k^i}{2\cdot 4\ldots\ldots 2i}\cdot\frac{\mathrm{I}_k^0}{B^{(i)} - B^{(i-1)}\dfrac{k}{2i}\cdot\dfrac{\mathrm{I}_k^{i+1}}{\mathrm{I}_k^i}}$$

und nach [42]

$$[45]\ldots\mathrm{I}_k^i = \frac{k^i}{2\cdot 4\ldots\ldots 2i}\cdot\frac{\mathrm{I}_k^0}{B^{(i)} - B^{(i-1)}\dfrac{kk}{2i\cdot 2i+2\,\Big/\,1-\dfrac{kk}{2i+2\cdot 2i+4\,\Big/\,1-\text{etc.}\ldots}}}$$

Diese verschiedenen Ausdrücke können, wenn man nicht unmittelbar nach der Reihe [31] rechnen will, benutzt werden, um I_k^i aus I_k^0 und I_k^1 zu erhalten; [44] mit desto geringerem Nachtheile, je gröfser k ist.

12.

Differentiirt man $2\pi \mathrm{I}_k^i = \int \mathrm{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$ in Beziehung auf k, so erhält man $\int \mathrm{Sin}\,(i\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,d\varepsilon$, also nach [30]

$$\frac{d\mathrm{I}_k^i}{dk} = \frac{i}{k}\,\mathrm{I}_k^i - \mathrm{I}_k^{i+1}, \text{ oder}$$

$$\mathrm{I}_k^{i+1} = \frac{i}{k}\,\mathrm{I}_k^i - \frac{d\mathrm{I}_k^i}{dk}$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}$, so ergiebt sie

$$\frac{\mathrm{I}_k^{i+1}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}} = -\frac{d\left\{\frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}\right\}}{d\cdot\frac{kk}{4}} = \frac{d^2\left\{\frac{\mathrm{I}_k^{i-1}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i-1}}\right\}}{\left(d\cdot\frac{kk}{4}\right)^2} = \text{etc.}$$

oder

$$[46]\ldots\ldots\frac{\mathrm{I}_k^{i+h}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+h}} = (-1)^h\,\frac{d^h\left\{\frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}\right\}}{\left(d\cdot\frac{kk}{4}\right)^h}$$

wovon ein besonderer Fall ist

$$[47]\ldots\ldots\frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} = (-1)^i\,\frac{d^i\cdot\mathrm{I}_k^0}{\left(d\cdot\frac{kk}{4}\right)^i}$$

Vergleicht man [40] und [46], so erhält man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welcher I_k^i entspricht:

$$[48]\ldots 0 = \frac{d^2\mathrm{I}_k^i}{dk^2} + \frac{1}{k}\,\frac{d\mathrm{I}_k^i}{dk} + \mathrm{I}_k^i\left(1 - \frac{ii}{kk}\right)$$

Die durch [46] angegebene Verbindung der verschiedenen, zu einem gleichen Argumente k gehörigen Functionen, ergiebt die endliche Veränderung einer derselben, welche dadurch entsteht, dafs k sich in $k + z$ verwandelt. Man hat nämlich

$$\frac{d \cdot \frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{d\left(\frac{kk}{4}\right)} = -\frac{\mathrm{I}_k^{i+1}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}}$$

$$\frac{d^2 \cdot \frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{\left(d\,\frac{kk}{4}\right)^2} = +\frac{\mathrm{I}_k^{i+2}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+2}}$$

$$\frac{d^3 \cdot \frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{\left(d\,\frac{kk}{4}\right)^3} = -\frac{\mathrm{I}_k^{i+3}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+3}}$$

u. s. w.

also nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$\frac{\mathrm{I}_{k+z}^i}{\left(\frac{k+z}{2}\right)^i} = \frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i} + \frac{d \cdot \frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{d \cdot \frac{kk}{4}} \cdot \left(\frac{kz}{2} + \frac{zz}{4}\right) + \frac{d^2 \cdot \frac{\mathrm{I}_k^i}{\left(\frac{k}{2}\right)^i}}{2\left(d \cdot \frac{kk}{4}\right)^2} \cdot \left(\frac{kz}{2} + \frac{zz}{4}\right)^2 + \text{etc....}$$

oder

$$[49] \ldots \mathrm{I}_{(k+z)}^i = \left(1 + \frac{z}{k}\right)^i \left\{\mathrm{I}_k^i - \mathrm{I}_k^{i+1} \cdot z\left(1 + \frac{z}{2k}\right) + \frac{\mathrm{I}_k^{i+2}}{1 \cdot 2} z^2 \left(1 + \frac{z}{2k}\right)^2 - \text{etc....}\right\}$$

welche Reihe zur Berechnung und Interpolation einer Tafel dieser Functionen angewendet werden kann und bei der, dieser Abhandlung angehängten, von $k = 0$ bis $k = 3,2$ gehenden, I_k^0 und I_k^1 enthaltenden, benutzt worden ist.

15.

Auf die Function I_k^i lassen sich noch andere Integrale zurückführen, wie aus den folgenden Beispielen hervorgehen wird.

$$[50] \ldots \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Cos}\,(i\varepsilon - m\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \mathrm{Cos}\,i\alpha\;\mathrm{I}_{\sqrt{(mm+nn)}}^i$$

Beweis. Setzt man $m = a\,\mathrm{Sin}\,\alpha$, $n = a\,\mathrm{Cos}\,\alpha$, $\alpha + \varepsilon = z$, so wird der Ausdruck

$$= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Cos}\,(-i\alpha + iz - a\,\mathrm{Sin}\,z)\,dz = \frac{\mathrm{Cos}\,i\alpha}{2\pi}\int \mathrm{Cos}\,(iz - a\,\mathrm{Sin}\,z)\,dz$$
$$+ \frac{\mathrm{Sin}\,i\alpha}{2\pi}\int \mathrm{Sin}\,(iz - a\,\mathrm{Sin}\,z)\,dz$$

Das letzte Glied dieses Ausdrucks verschwindet aber, wenn man es von 0 bis 2π nimmt; denn $\mathrm{Sin}\,(iz - a\,\mathrm{Sin}\,z)$ läfst sich in eine Reihe von Sinussen der Vielfachen von z verwandeln. Also bleibt nur das erste übrig und dieses giebt

$$\mathrm{Cos}\,i\alpha\,\mathrm{I}_a^i = \mathrm{Cos}\,i\alpha\,\mathrm{I}_{\sqrt{(mm+nn)}}^i$$

[51]... $\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Cos}\,i\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,(m\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \mathrm{Cos}\,i\alpha\,\mathrm{I}_{\sqrt{(mm+nn)}}^i$ für ein gerades i und $= 0$ für ein ungerades.

Beweis. Das Integral ist

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{Cos}\,(i\varepsilon - m\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{Cos}\,(-i\varepsilon - m\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

also nach [41] und [50]

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,i\alpha\left\{\mathrm{I}_{\sqrt{(mm+nn)}}^i + (-1)^i\,\mathrm{I}_{\sqrt{(mm+nn)}}^i\right\}\ Q.\,E.\,D.$$

[52]... $\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sin}\,i\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,(m\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \mathrm{Cos}\,i\alpha\,\mathrm{I}_{\sqrt{(mm+nn)}}^i$ für ein ungerades i und $= 0$ für ein gerades.

Beweis. Das Integral ist

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{Cos}\,(i\varepsilon - m\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{Cos}\,(-i\varepsilon - m\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

also nach [41] und [50]

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,i\alpha\left\{\mathrm{I}_{\sqrt{(mm+nn)}}^i - (-1)^i\,\mathrm{I}_{\sqrt{(mm+nn)}}^i\right\}\ Q.\,E.\,D.$$

[53]... $\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1\cdot 3\ldots 2i-1}{k^i}\,\mathrm{I}_k^i$

Beweis. Durch theilweise Integration erhält man das Integral

$$\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i-1}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon) - \frac{k}{2i+1}\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i+1}\,\mathrm{Sin}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)$$
$$+ (2i-1)\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i-2}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon - (2i-1)\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$
$$+ \frac{kk}{2i+1}\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i+2}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

wo die beiden ersten Glieder, von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = 2\pi$ genommen, verschwinden; man hat also

$$0 = (2i-1)\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i-2}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon - 2i\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$
$$+ \frac{kk}{2i+1}\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i+2}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

und wenn man

$$\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2h}\cdot\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon \text{ durch } \frac{1\cdot 3\ldots\ldots 2h-1}{k^h}\,\phi h$$

bezeichnet

$$0 = k\phi\,(i-1) - 2i\phi\,(i) + k\phi\,(i+1)$$

Diese Relation stimmt mit [40] überein; allein für $i = 0$ und $i = 1$ findet man $\phi 0 = \mathrm{I}_k^0$ und $\phi 1 = \mathrm{I}_k^1$, also auch $\phi 2 = \mathrm{I}_k^2$, u.s.w. *Q. E. D.*

$$[54]\ldots\int \mathrm{Cos}\,kz\cdot(1-zz)^{\frac{2i-1}{2}}\,dz\left[\begin{matrix}\text{von } z=0\\ \text{bis } z=1\end{matrix}\right] = \frac{1\cdot 3\ldots\ldots 2i-1}{4k^i}\,\mathrm{I}_k^i$$

Beweis. $\mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)$ enthält nur gerade Potenzen von $\mathrm{Cos}\,\varepsilon$ und $\mathrm{Sin}\,\varepsilon$, also nur Cosinusse der geraden Vielfachen von ε; $\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i}\cdot\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$ also, aufser dem in ε multiplicirten Gliede, nur Sinusse der geraden Vielfachen von ε, welche daher, von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, von $\frac{1}{2}\pi$ bis π, von π bis $\frac{3}{2}\pi$ und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π genommen, verschwinden. Man hat daher

$$\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\mathrm{Cos}(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon\left[\begin{matrix}\text{von } \varepsilon=0\\ \text{bis } \varepsilon=\frac{1}{2}\pi\end{matrix}\right] = \frac{1}{4}\int \mathrm{Cos}\,\varepsilon^{2i}\,\mathrm{Cos}\,(k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon\left[\begin{matrix}\text{von } \varepsilon=0\\ \text{bis } \varepsilon=2\pi\end{matrix}\right]$$
$$= \frac{1\cdot 3\ldots\ldots 2i-1}{4\cdot k^i}\,\mathrm{I}_k^i \text{ nach } [53]$$

Schreibt man z für $\mathrm{Sin}\,\varepsilon$, so erhält man $d\varepsilon = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, $\mathrm{Cos}\,\varepsilon^2 = 1 - zz$ und damit den Satz.

$$[55]\ldots\frac{1}{2\pi}\int e^{n\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon}\,\mathrm{Cos}\,(m\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon = \mathrm{I}^0_{\sqrt{(mm-nn)}}$$

Beweis. Die ungeraden Potenzen von $\mathrm{Cos}\,\varepsilon$, in der Entwickelung der Exponentialgröfse verschwinden aus dem Integrale; man hat dasselbe daher

$$= \frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon \left\{1 + \frac{n^2}{\Pi 2}\operatorname{Cos}\varepsilon^2 + \frac{n^4}{\Pi 4}\operatorname{Cos}\varepsilon^4 + \ldots\right\}\left\{1 - \frac{m^2}{\Pi 2}\operatorname{Sin}\varepsilon^2 + \frac{m^4}{\Pi 4}\operatorname{Sin}\varepsilon^4 - \text{etc}\ldots\right\}$$

und das allgemeine Glied des Products dieser beiden Reihen

$$= \frac{n^{2i}}{\Pi 2 i}\operatorname{Cos}\varepsilon^{2i} - \frac{n^{2i-2}m^2}{\Pi(2i-2)\Pi 2}\operatorname{Cos}\varepsilon^{2i-2}\operatorname{Sin}\varepsilon^2 + \frac{n^{2i-4}m^4}{\Pi(2i-4)\Pi 4}\operatorname{Cos}\varepsilon^{2i-4}\operatorname{Sin}\varepsilon^4 - \text{etc}\ldots;$$

allein $\frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Cos}\varepsilon^{2i-2h}\operatorname{Sin}\varepsilon^{2h}d\varepsilon = \frac{1}{2^{2i}} \cdot \frac{\Pi 2h \cdot \Pi(2i-2h)}{\Pi i \cdot \Pi h \cdot \Pi(i-h)}$ und daher das allgemeine Glied

$$= \frac{1}{2^{2i}(\Pi i)^2}\left\{n^{2i} - i \cdot n^{2i-2}m^2 + \frac{i \cdot i-1}{1 \cdot 2}n^{2i-4}m^4 - \text{etc}\ldots\right\} = \frac{(n^2-m^2)^i}{2^{2i}(\Pi i)^2}.$$

Das allgemeine Glied von I_k^0 ist $= (-1)^i \frac{k^{2i}}{2^{2i}(\Pi i)^2}$, woraus, wenn man $\sqrt{(mm-nn)}$ für k schreibt, der Satz folgt.

Man könnte die Anzahl dieser Sätze noch sehr vermehren, auch, durch Verwechselung der Sinus und Cosinus Abänderungen derselben machen, allein ich glaube nicht länger dabei verweilen zu dürfen. Ich bemerke nur noch, dafs die Reihenentwickelungen von $\operatorname{Cos} k \cdot I_k^0$ und $\operatorname{Sin} k \cdot I_k^0$ nach sehr einfachen Gesetzen fortschreiten: man hat nämlich

$$I_k^0 = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Cos}(k\operatorname{Cos}\varepsilon)\,d\varepsilon\,;\quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Sin}(k\operatorname{Cos}\varepsilon)\,d\varepsilon\,;$$

durch Multiplication dieser Gleichungen mit

$$\begin{array}{c|c} \operatorname{Cos} k & \operatorname{Sin} k \\ \operatorname{Sin} k & -\operatorname{Cos} k \end{array}$$

findet man

$$\operatorname{Cos} k \cdot I_k^0 = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Cos}(k - k\operatorname{Cos}\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Cos}(2k\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2)\,d\varepsilon$$

$$\operatorname{Sin} k \cdot I_k^0 = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Sin}(k - k\operatorname{Cos}\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Sin}(2k\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2)\,d\varepsilon$$

und wenn man die beiden letzten Ausdrücke in die Reihen

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon \left\{1 - \frac{(2k)^2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^4}{\Pi 2} + \frac{(2k)^4 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^8}{\Pi 4} - \frac{(2k)^6 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^{12}}{\Pi 6} + \text{etc....}\right\}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon \left\{2k \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{(2k)^3 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^6}{\Pi 3} + \frac{(2k)^5 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varepsilon^{10}}{\Pi 5} - \text{etc....}\right\}$$

entwickelt und jedes Glied derselben von 0 bis 2π nimmt,

$$[56]\ldots\begin{cases} \operatorname{Cos} k \cdot \mathrm{I}_k^0 = 1 - \frac{3}{(\Pi 2)^2} k^2 + \frac{3.5.7}{(\Pi 4)^2} k^4 - \frac{3.5.7.9.11}{(\Pi 6)^2} k^6 + \text{etc....} \\ \operatorname{Sin} k \cdot \mathrm{I}_k^0 = k - \frac{3.5}{(\Pi 3)^2} k^3 + \frac{3.5.7.9}{(\Pi 5)^2} k^5 - \frac{3.5.7.9.11.13}{(\Pi 7)^2} k^7 + \text{etc....} \end{cases}$$

14.

Die Function I_k^0 hat mit den Sinussen und Cosinussen die merkwürdige Eigenschaft gemein, immer wenn ihr Argument k von $2n\pi$ bis zu $(2n+2)\pi$ wächst, zweimal zu verschwinden und dann das Zeichen zu ändern. Ich werde zeigen, dafs I_k^0 von $k = m\pi$ bis $(m+\frac{1}{2})\pi$ immer positiv ist, wenn m eine gerade Zahl, und negativ, wenn m ungerade ist.

Wenn man $\operatorname{Sin} \varepsilon = z$ und $k = \frac{2m+m'}{2} \cdot \pi$ setzt, wo m' einen eigentlichen Bruch bedeutet, so hat man nach der bei [54] gemachten Bemerkung,

$$\mathrm{I}_k^0 = \frac{2}{\pi}\int \operatorname{Cos} \frac{2m+m'}{2}\pi z \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} \begin{bmatrix}\text{von } z=0 \\ \text{bis } z=1\end{bmatrix};$$

schreibt man v für $(2m+m')z$, so verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\mathrm{I}_k^0 = \frac{2}{\pi}\int \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2} v \cdot \frac{dv}{\sqrt{((2m+m')^2 - vv)}} \begin{bmatrix}\text{von } v=0 \\ \text{bis } v=2m+m'\end{bmatrix}$$

Das Integral, von $v = a$ bis $v = b$ genommen, ist, wenn man $h + u$ für v schreibt

$$= \int \operatorname{Cos}\left(\frac{h\pi}{2} + \frac{\pi}{2}u\right) \frac{du}{\sqrt{((2m+m')^2 - (h+u)^2)}} \begin{bmatrix}\text{von } u=a-h \\ \text{bis } u=b-h\end{bmatrix}$$

nimmt man nun h nach und nach $= 1, 3, \ldots 2m-1$ und a und b immer $= h-1$ und $h+1$, so ergiebt der letzte Ausdruck

$$I_k^0 = \frac{2}{\pi}\int \operatorname{Sin}\frac{\pi}{2}u \cdot du \left\{ \frac{-1}{\sqrt{(\mu\mu-(1+u)^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(\mu\mu-(3+u)^2)}} - \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{(\mu\mu-(2m-3+u)^2)}} + \frac{(-1)^m}{\sqrt{(\mu\mu-(2m-1+u)^2)}} \right\} \begin{bmatrix} \text{von } u = -1 \\ \text{bis } u = +1 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{2}{\pi}(-1)^m \int \frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}u \cdot du}{\sqrt{(\mu\mu-(2m+u)^2)}} \begin{bmatrix} \text{von } u = 0 \\ \text{bis } u = m' \end{bmatrix}$$

wo μ für $2m + m'$ geschrieben ist. Die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks sind positiv, das letzte offenbar weil $\frac{\pi}{2}u$ immer kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$, die übrigen, weil ihr positiver Theil gröfser ist als der negative; denn man hat

$$\int \frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2}u \cdot du}{\sqrt{(\mu\mu-(h+u)^2)}} \begin{bmatrix} \text{von } u = -1 \\ \text{bis } u = +1 \end{bmatrix} = \int \operatorname{Sin}\frac{\pi}{2}u \cdot du \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\mu\mu-(h+u)^2)}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(\mu\mu-(h-u)^2)}} \right\} \begin{bmatrix} \text{von } u = 0 \\ \text{bis } u = 1 \end{bmatrix}$$

wo der Nenner des positiven Theils stets kleiner ist als der des negativen. Ferner ist jedes folgende Glied gröfser als das vorhergehende, wegen der immer abnehmenden Nenner; die Summe zweier aufeinander folgenden hat daher das Zeichen des letzten derselben. Wenn m gerade ist, so ist das letzte Glied in der Klammer positiv und daher die Summe aller Glieder positiv; wenn m ungerade ist, so ist das letzte Glied negativ und daher die Summe aller Glieder bis zum zweiten negativ und das erste Glied, so wie das Glied aufser der Klammer, sind gleichfalls negativ.

Diese Eigenschaft kommt der Function I_k^0 nicht allein zu, sondern alle I_k^i besitzen eine ähnliche. Man hat nämlich [46], wenn man, Kürze wegen, I_k^i durch $\left(\frac{k}{2}\right)^i R^{(i)}$ und $\frac{kk}{4}$ durch $\varkappa$ bezeichnet

$$R^{(i+1)} = -\frac{dR^{(i)}}{d\varkappa},$$

woraus folgt, dafs $R^{(i+1)}$ verschwindet wenn $R^{(i)}$ ein Maximum oder Minimum ist; allein zwischen zwei Werthen von k oder $\varkappa$ für welche $R^{(i)}$ verschwindet, liegt nothwendig ein Maximum oder Mi-

nimum, also auch ein verschwindendes $R^{(i+1)}$. Es ist daher klar, dafs I_k^1 eben so oft $= 0$ wird, so oft I_k^0 ein Maximum oder Minimum ist; zwischen zwei Werthen von k für welche I_k^1 verschwindet, liegt immer ein Maximum oder Minimum von R^1, daher ein verschwindendes I_k^2, u. s. w.

13.

Die beiden im 10ten Artikel durch M und M′ bezeichneten Integrale sind weit zusammengesetzter als die beiden anderen L und L′. Eine endliche Relation zwischen einem derselben und der transcendenten Function I_k^i scheint nicht vorhanden zu seyn; allein man kann sehr leicht zeigen, dafs beide sich auf Integrale von der Form

$$\int \frac{\operatorname{Cos}(h\varepsilon - k \operatorname{Sin}\varepsilon)}{1 - e \operatorname{Cos}\varepsilon}\, d\varepsilon \begin{bmatrix} \text{von } \varepsilon = 0 \\ \text{bis } \varepsilon = 2\pi \end{bmatrix}$$

zurückführen lassen. Bezeichnet man dieses Integral durch

$$2\pi \cdot J_k^h,$$

so hat man nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\operatorname{Cos}(i\varepsilon - k \operatorname{Sin}\varepsilon)\operatorname{Cos}\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos}\varepsilon}\, d\varepsilon = \tfrac{1}{2} J_k^{i-1} + \tfrac{1}{2} J_k^{i+1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\operatorname{Sin}(i\varepsilon - k \operatorname{Sin}\varepsilon)\operatorname{Sin}\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos}\varepsilon}\, d\varepsilon = \tfrac{1}{2} J_k^{i-1} - \tfrac{1}{2} J_k^{i+1}$$

woraus für $k = ie$ die Ausdrücke von M und M′ folgen, nämlich

$$[57] \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \mathrm{M} = \frac{e}{2} J_{ie}^{i-1} + \frac{e}{2} J_{ie}^{i+1} \\ \mathrm{M}' = \frac{e}{2} J_{ie}^{i-1} - \frac{e}{2} J_{ie}^{i+1} \end{cases}$$

Man hat ferner

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\operatorname{Cos}(i\varepsilon - k \operatorname{Sin}\varepsilon)\operatorname{Cos}\varepsilon}{1 - e \operatorname{Cos}\varepsilon}\, d\varepsilon = -\frac{1}{2\pi e}\int \operatorname{Cos}(i\varepsilon - k \operatorname{Sin}\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$+ \frac{1}{2\pi e}\int \frac{\operatorname{Cos}(i\varepsilon - k \operatorname{Sin}\varepsilon)}{1 - e \operatorname{Cos}\varepsilon}\, d\varepsilon = -\frac{1}{e} I_k^i + \frac{1}{e} J_k^i$$

und die Verbindung dieses Ausdrucks mit dem vorher für dasselbe Integral gefundenen giebt

$$[58] \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{I}_k^i = -\frac{e}{2} J_k^{i-1} + J_k^i - \frac{e}{2} J_k^{i+1}$$

woraus also hervorgeht, dafs jedes J_k^i durch I_k^0, I_k^1, J_k^0 und J_k^1 gefunden werden kann. Es wäre also nöthig, noch J_k^0 und J_k^1 näher zu untersuchen, allein es ist mir nicht gelungen, diese beiden transcendenten Functionen, welche die beiden Argumente e und k haben, auf andere, nur von Einem Argumente abhängige, welche in eine Tafel gebracht werden könnten, zurückzuführen.

Die Methode, das Integral J_k^i in eine Reihe zu entwickeln, habe ich in meiner Abhandlung über das Keplersche Problem gegeben; hier theile ich eine zweite Reihenentwicklung mit, welche die Tafel für I_k^0 und I_k^1 voraussetzt und in allen Fällen convergirt. Man hat bekanntlich

$$\frac{1}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}\Big\{1 + 2\lambda\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + 2\lambda^2\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon + 2\lambda^3\,\mathrm{Cos}\,3\varepsilon + \ldots.$$

wo

$$\lambda = \frac{e}{1+\sqrt{(1-ee)}}\,;$$

multiplicirt man diese Reihe mit $\mathrm{Cos}\,(i\varepsilon - k\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)\,d\varepsilon$ und integrirt von 0 bis 2π, so erhält man:

$$J_k^i = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}\Big\{\mathrm{I}_k^i + \lambda\,\mathrm{I}_k^{i+1} + \lambda^2\,\mathrm{I}_k^{i+2} + \ldots. \\ + \lambda\,\mathrm{I}_k^{i-1} + \lambda^2\,\mathrm{I}_k^{i-2} + \ldots.\Big\}$$

oder anders geschrieben

$$[59] \ldots\ldots J_k^i = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}\Big\{\lambda^i\,\mathrm{I}_k^0 + \lambda^{i-1}\,\mathrm{I}_k^1 + \ldots. + \mathrm{I}_k^i \\ - \lambda^{i+1}\,\mathrm{I}_k^1 + \lambda^{i+2}\,\mathrm{I}_k^2 - \lambda^{i+3}\,\mathrm{I}_k^3 + \mathrm{etc}.\ldots \\ + \lambda\,\mathrm{I}_k^{i+1} + \lambda^2\,\mathrm{I}_k^{i+2} + \lambda^3\,\mathrm{I}_k^{i+3} + \mathrm{etc}.\ldots\Big\}$$

wo die beiden unendlichen Reihen mit einem Gliede der $i+2^{\text{ten}}$ Ordnung anfangen. Will man von J_k^i zu dem folgenden J_k^{i+1} übergehen, so erhält man eine dazu dienliche Formel, wenn man den eben gegebenen Ausdruck mit λ multiplicirt und das Product von dem ähnlichen Ausdrucke für J_k^{i+1} abzieht; man hat dadurch

$$[60]\ldots J_k^{i+1} = \lambda \cdot J_k^i + \frac{2}{1+\sqrt{(1-ee)}}\left\{\mathrm{I}_k^{i+1} + \lambda\,\mathrm{I}_k^{i+2} + \lambda^2\,\mathrm{I}_k^{i+3} + \text{etc.}\ldots\right\}$$

Will man die beiden Integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\,d\varepsilon \text{ und } \frac{1}{2\pi}\int\frac{\operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\,d\varepsilon$$

auf die Coefficienten der Reihe für die Mittelpunktsgleichung

$$\phi = \mu + 2A' \operatorname{Sin}\mu + 2A'' \operatorname{Sin} 2\mu + \text{etc.}\ldots$$

zurückführen, so geschieht dieses folgendermafsen:

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\operatorname{Cos} i\mu \operatorname{Cos}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\,d\varepsilon = -\frac{1}{2\pi e}\int\operatorname{Cos} i\mu\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi e}\int\frac{\operatorname{Cos} i\mu\cdot d\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}$$

wo das letzte Glied der Ausdruck von $\frac{i}{e\sqrt{(1-ee)}}\,A^{(i)}$ ist; man hat daher

$$[61]\ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{M} = \frac{i}{\sqrt{(1-ee)}}\,A^{(i)} - \mathrm{I}_{i,e}^{i}\,;$$

ferner hat man

$$\frac{d\phi}{de} = \frac{\operatorname{Sin}\phi}{1-ee}(2+e\operatorname{Cos}\phi) = \frac{\sqrt{(1-ee)}\operatorname{Sin}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\left\{\frac{1}{1-ee}+\frac{1}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\right\};$$

entwickelt man diesen Ausdruck in die Reihe

$$\frac{d\phi}{de} = 2B'\operatorname{Sin}\mu + 2B''\operatorname{Sin} 2\mu + 2B'''\operatorname{Sin} 3\mu + \text{etc.}\ldots,$$

so ist einerseits

$$B^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\operatorname{Sin} i\mu \operatorname{Sin}\varepsilon\,d\varepsilon + \sqrt{(1-ee)}\cdot\int\frac{\operatorname{Sin} i\mu\cdot\operatorname{Sin}\varepsilon}{1-e\operatorname{Cos}\varepsilon}\,d\varepsilon$$

und andrerseits

$$B^{(i)} = \frac{dA^{(i)}}{de}\,;$$

man hat also, nach [30],

$$[62]\ldots\mathrm{M}' = \frac{e}{\sqrt{(1-ee)}}\cdot\frac{dA^{(i)}}{de} - \frac{1}{1-ee}\,\mathrm{I}_{i,e}^{i} + \frac{e}{1-ee}\,\mathrm{I}_{i,e}^{i+1}$$

16.

Bei der Auflösung der Aufgaben der physischen Astronomie, welche auf I_k^i und J_k^i zurückführen, wird k meistentheils nicht

sehr grofs seyn; dann ist der Gebrauch der Tafel für die erste dieser Functionen nicht so zweckmäfsig und bequem, als die directe Berechnung des Reihenausdrucks derselben. Um aber doch von der Anwendung der am Ende dieser Abhandlung abgedruckten Tafeln Beispiele zu geben, werde ich den Coefficienten von Cos 4μ in der Entwickelung von r^3 und den Coefficienten von Sin 4μ in der Entwickelung der Mittelpunktsgleichung, beide für eine Ellipse, deren Excentricität $= 0,35$ ist, mittelst der Tafeln bestimmen.

Der Coefficient von Cos $i\mu$ in der Entwickelung von r^3 ist, nach den Formeln im 10ten Artikel

$$\frac{3(1-ee)}{ii} \mathrm{L} - \frac{6}{i^3} \mathrm{L}';$$

also für $i = 4$,

$$\tfrac{3}{16}(1-ee)\,e \cdot \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Cos}\,4\mu\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,d\varepsilon - \tfrac{3}{32}\,e\,\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Sin}\,4\mu\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,d\varepsilon$$

und nach [29] und [30]

$$= \tfrac{3}{16}(1-ee)\,\mathrm{I}^4_{1,4} - \tfrac{3}{32}\,\mathrm{I}^4_{1,4} + \tfrac{3}{32}\,e\,\mathrm{I}^5_{1,4}$$
$$= \tfrac{2,265}{32}\,\mathrm{I}^4_{1,4} + \tfrac{1,05}{32}\,\mathrm{I}^5_{1,4}$$

Aus den in der Tafel enthaltenen Werthen

$$\mathrm{I}^0_{1,4} = 0,56685\ 51204 \text{ und } \mathrm{I}^1_{1,4} = 0,54194\ 77139$$

findet man

$$\mathrm{I}^4_{1,4} = 0,00906\ 28717 \text{ und } \mathrm{I}^5_{1,4} = 0,00129\ 01251$$

und damit den gesuchten Coefficienten $= +\,0,00068\ 38136$, wobei zu bemerken ist, dafs man ihn verdoppeln mufs, wenn man nur die positiven Vielfachen von μ, in der Entwickelung haben will.

Der Coefficient von Sin $i\mu$ in der Entwickelung der Mittelpunktsgleichung, ist

$$\frac{\sqrt{(1-ee)}}{i} \cdot \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mathrm{Cos}\,i\mu \cdot d\varepsilon}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{i}\,J^i_{i,e}$$

also, für $i = 4$ und $e = 0,35$, nach [59],

$$= \tfrac{1}{4} \Big\{ \lambda^4 \, I^0_{1,4} + \lambda^3 \, I^1_{1,4} + \lambda^2 \, I^2_{1,4} + \lambda \, I^3_{1,4} + I^4_{1,4}$$
$$- \lambda^5 \, I^1_{1,4} + \lambda^6 \, I^2_{1,4} - \lambda^7 \, I^3_{1,4} + \text{etc.} \ldots\ldots$$
$$+ \lambda \, I^5_{1,4} + \lambda^2 \, I^6_{1,4} + \lambda^3 \, I^7_{1,4} + \text{etc.} \ldots\ldots \Big\}$$

Man findet,

$$I^0 = 0,56685\ 51204$$
$$I^1 = 0,54194\ 77139$$
$$I^2 = 0,20735\ 58995$$
$$I^3 = 0,05049\ 77133$$
$$I^4 = 0,00906\ 28717$$
$$I^5 = 0,00129\ 01251$$
$$I^6 = 0,00015\ 23073$$
$$I^7 = 0,00001\ 53661$$
$$I^8 = 0,00000\ 13538$$

und hiermit

$\lambda^4 \, I^0 =$	$+\ 0,00060\ 45751$	$-\ \lambda^5 \, I^1 =$	$-\ 0,00010\ 44552$	$\lambda \, I^5 =$	$+\ 0,00023\ 31451$
$\lambda^3 \, I^1 =$	$0,00319\ 84608$	$+\ \lambda^6 \, I^2 =$	$+\ 72224$	$\lambda^2 \, I^6 =$	$+\ 49740$
$\lambda^2 \, I^2 =$	$0,00677\ 18213$	$-\ \lambda^7 \, I^3 =$	$-\ 3179$	$\lambda^3 \, I^7 =$	$+\ 907$
$\lambda \, I^3 =$	$0,00912\ 57015$	$+\ \lambda^8 \, I^4 =$	$+\ 103$	$\lambda^4 \, I^8 =$	$+\ 14$
$I^4 =$	$0,00906\ 28717$	$-\ \lambda^9 \, I^5 =$	$-\ 3$		
	$+\ 0,02876\ 34304$		$-\ 0,00009\ 75407$		$+\ 0,00023\ 82112$

Die Summe aller drei Theile ist 0, 02890 41009 und daher der gesuchte Coefficient = 0, 00722 60252 = 24′ 50″, 47469; er mufs gleichfalls verdoppelt werden, wenn die Entwickelung nur die positiven Vielfachen von μ enthalten soll.

Tafel der Functionen I_k^0 und I_k^1.

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
0,00	1, 00000 00000	− 2 49998	− 4 99979	0, 00000 00000	+ 499 99375	− 3750
0,01	0, 99997 50002	− 7 49977	− 4 99921	0, 00499 99375	+ 499 95625	− 7499
0,02	0, 99990 00025	− 12 49898	− 4 99829	0, 00999 95000	+ 499 88126	− 11249
0,03	0, 99977 50127	− 17 49727	− 4 99697	0, 01499 83126	+ 499 76877	− 14997
0,04	0, 99960 00400	− 22 49424	− 4 99527	0, 01999 60003	+ 499 61880	− 18743
0,05	0, 99937 50976	− 27 48951	− 4 99323	0, 02499 21883	+ 499 43137	− 22488
0,06	0, 99910 02025	− 32 48274	− 4 99078	0, 02998 65020	+ 499 20649	− 26233
0,07	0, 99877 53751	− 37 47352	− 4 98798	0, 03497 85669	+ 498 94416	− 29972
0,08	0, 99840 06399	− 42 46150	− 4 98478	0, 03996 80085	+ 498 64444	− 33713
0,09	0, 99797 60249	− 47 44628	− 4 98124	0, 04495 44529	+ 498 30731	− 37447
0,10	0, 99750 15621	− 52 42752	− 4 97730	0, 04993 75260	+ 497 93284	− 41180
0,11	0, 99697 72869	− 57 40482	− 4 97299	0, 05491 68544	+ 497 52104	− 44910
0,12	0, 99640 32387	− 62 37781	− 4 96833	0, 05989 20648	+ 497 07194	− 48636
0,13	0, 99577 94606	− 67 34614	− 4 96326	0, 06486 27842	+ 496 58558	− 52656
0,14	0, 99510 59992	− 72 30940	− 4 95785	0, 06982 86400	+ 496 06202	− 56075
0,15	0, 99438 29052	− 77 26725	− 4 95205	0, 07478 92602	+ 495 50127	− 59786
0,16	0, 99361 02327	− 82 21930	− 4 94590	0, 07974 42729	+ 494 90341	− 63494
0,17	0, 99278 80397	− 87 16520	− 4 93935	0, 08469 33070	+ 494 26847	− 67196
0,18	0, 99191 63877	− 92 10455	− 4 93245	0, 08963 59917	+ 493 59651	− 70893
0,19	0, 99099 53422	− 97 03700	− 4 92517	0, 09457 19568	+ 492 88758	− 74583
0,20	0, 99002 49722	− 101 96217	− 4 91755	0, 09950 08326	+ 492 14175	− 78269
0,21	0, 98900 53505	− 106 87972	− 4 90951	0, 10442 22501	+ 491 35906	− 81945
0,22	0, 98793 65533	− 111 78923	− 4 90116	0, 10933 58407	+ 490 53961	− 85618
0,23	0, 98681 86610	− 116 69039	− 4 89239	0, 11424 12368	+ 489 68343	− 89281
0,24	0, 98565 17571	− 121 58278	− 4 88329	0, 11913 80711	+ 488 79062	− 92937
0,25	0, 98443 59293	− 126 46607	− 4 87382	0, 12402 59773	+ 487 86125	− 96588
0,26	0, 98317 12686	− 131 33989	− 4 86397	0, 12890 45898	+ 486 89537	− 1 00227
0,27	0, 98185 78697	− 136 20386	− 4 85377	0, 13377 35435	+ 485 89310	− 1 03859
0,28	0, 98049 58311	− 141 05763	− 4 84320	0, 13863 24745	+ 484 85451	− 1 07484
0,29	0, 97908 52548	− 145 90083	− 4 83227	0, 14348 10196	+ 483 77967	− 1 11099
0,30	0, 97762 62465	− 150 73310	− 4 82098	0, 14831 88163	+ 482 66868	− 1 14704
0,31	0, 97611 89155	− 155 55408	− 4 80935	0, 15314 55031	+ 481 52164	− 1 18300
0,32	0, 97456 33747	− 160 36343	− 4 79731	0, 15796 07195	+ 480 33864	− 1 21886
0,33	0, 97295 97406	− 165 16074	− 4 78495	0, 16276 41059	+ 479 11978	− 1 25463
0,34	0, 97130 81332	− 169 94569	− 4 77223	0, 16755 53037	+ 477 86515	− 1 29027
0,35	0, 96960 86763	− 174 71792	− 4 75915	0, 17233 39552	+ 476 57488	− 1 32584
0,36	0, 96786 14971	− 179 47707	− 4 74571	0, 17709 97040	+ 475 24904	− 1 36126
0,37	0, 96606 67264	− 184 22278	− 4 73193	0, 18185 21944	+ 473 88778	− 1 39659
0,38	0, 96422 44986	− 188 95471	− 4 71777	0, 18659 10722	+ 472 49119	− 1 43180
0,39	0, 96233 49515	− 193 6.248	− 4 70330	0, 19131 59841	+ 471 05939	− 1 46690
0,40	0, 96039 82267			0, 19602 65780		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
0, 40	0, 96039 82267	− 198 37578	− 4 68844	0, 19602 65780	+ 469 59249	− 1 50184
0, 41	0, 95841 44689	− 203 06422	− 4 67326	0, 20072 25029	+ 468 09065	− 1 53671
0, 42	0, 95638 38267	− 207 73748	− 4 65770	0, 20540 34094	+ 466 55394	− 1 57141
0, 43	0, 95430 64519	− 212 39518	− 4 64183	0, 21006 89488	+ 464 98253	− 1 60599
0, 44	0, 95218 25001	− 217 03701	− 4 62560	0, 21471 87741	+ 463 37654	− 1 64045
0, 45	0, 95001 21300	− 221 66261	− 4 60900	0, 21935 25395	+ 461 73609	− 1 67476
0, 46	0, 94779 55039	− 226 27161	− 4 59211	0, 22396 99004	+ 460 06133	− 1 70894
0, 47	0, 94553 27878	− 230 86372	− 4 67483	0, 22857 05137	+ 458 35239	− 1 74296
0, 48	0, 94322 41506	− 235 43855	− 4 55724	0, 23315 40376	+ 456 60943	− 1 77685
0, 49	0, 94086 97651	− 239 99579	− 4 53930	0, 23772 01319	+ 454 83258	− 1 81060
0, 50	0, 93846 98072	− 244 53509	− 4 52103	0, 24226 84577	+ 453 02198	− 1 84417
0, 51	0, 93602 44563	− 249 05612	− 4 50241	0, 24679 86775	+ 451 17781	− 1 87762
0, 52	0, 93353 38951	− 253 55853	− 4 48348	0, 25131 04556	+ 449 30019	− 1 91090
0, 53	0, 93099 83098	− 258 04201	− 4 46420	0, 25580 34575	+ 447 38929	− 1 94400
0, 54	0, 92841 78897	− 262 50621	− 4 44460	0, 26027 73504	+ 445 44529	− 1 97698
0, 55	0, 92579 28276	− 266 95081	− 4 42465	0, 26473 18033	+ 443 46831	− 2 00977
0, 56	0, 92312 33195	− 271 37546	− 4 40441	0, 26916 64864	+ 441 45854	− 2 04239
0, 57	0, 92040 95649	− 275 77987	− 4 38381	0, 27358 10718	+ 439 41615	− 2 07484
0, 58	0, 91765 17662	− 280 16368	− 4 36291	0, 27797 52333	+ 437 34131	− 2 10714
0, 59	0, 91485 01294	− 284 52659	− 4 34167	0, 28234 86464	+ 435 23417	− 2 13925
0, 60	0, 91200 48635	− 288 86826	− 4 32012	0, 28670 09881	+ 433 09492	− 2 17117
0, 61	0, 90911 61809	− 293 18838	− 4 29825	0, 29103 19373	+ 430 92375	− 2 20293
0, 62	0, 90618 42971	− 297 48663	− 4 27606	0, 29534 11748	+ 428 72082	− 2 23449
0, 63	0, 90320 94308	− 301 76269	− 4 25356	0, 29962 83830	+ 426 48633	− 2 26587
0, 64	0, 90019 18039	− 306 01625	− 4 23074	0, 30389 32463	+ 424 22046	− 2 29708
0, 65	0, 89713 16414	− 310 24699	− 4 20762	0, 30813 54509	+ 421 92338	− 2 32807
0, 66	0, 89402 91715	− 314 45461	− 4 18419	0, 31235 46847	+ 419 59531	− 2 35888
0, 67	0, 89088 46254	− 318 63880	− 4 16044	0, 31655 06378	+ 417 23643	− 2 38950
0, 68	0, 88769 82374	− 322 79924	− 4 13640	0, 32072 30021	+ 414 84693	− 2 41992
0, 69	0, 88447 02450	− 326 93564	− 4 11204	0, 32487 14714	+ 412 42701	− 2 45012
0, 70	0, 88120 08886	− 331 04768	− 4 08739	0, 32899 57415	+ 409 97689	− 2 48013
0, 71	0, 87789 04118	− 335 13507	− 4 06245	0, 33309 55104	+ 407 49676	− 2 50996
0, 72	0, 87453 90611	− 339 19752	− 4 03719	0, 33717 04780	+ 404 98680	− 2 53953
0, 73	0, 87114 70859	− 343 23471	− 4 01165	0, 34122 03460	+ 402 44727	− 2 56892
0, 74	0, 86771 47388	− 347 24636	− 3 98582	0, 34524 48187	+ 399 87835	− 2 59811
0. 75	0, 86424 22752	− 351 23218	− 3 95970	0, 34924 36022	+ 397 28024	− 2 62705
0, 76	0, 86072 99534	− 355 19188	− 3 93327	0, 35321 64046	+ 394 65319	− 2 65579
0, 77	0, 85717 80346	− 359 12515	− 3 90657	0, 35716 29365	+ 391 99740	− 2 68432
0, 78	0, 85358 67831	− 363 03172	− 3 87959	0, 36108 29105	+ 389 31308	− 2 71260
0, 79	0, 84995 64659	− 366 91131	− 3 85234	0, 36497 60413	+ 386 60048	− 2 74069
0, 80	0, 84628 73528	− 370 76365	− 3 81477	0, 36884 20461	+ 383 85979	− 2 76851
0, 81	0, 84257 97163	− 374 58842	− 3 79695	0, 37268 06440	+ 381 09128	− 2 79615
0, 82	0, 83883 38321	− 378 38537	− 3 76886	0, 37649 15568	+ 378 29513	− 2 82351
0, 83	0, 83504 99784	− 382 15423	− 3 74048	0, 38027 45081	+ 375 47162	− 2 85067
0, 84	0, 83122 84361	− 385 89471	− 3 71185	0, 38402 92243	+ 372 62095	− 2 87758
0, 85	0, 82736 94890	− 389 60656	− 3 68294	0, 38775 54338	+ 369 74337	− 2 90425
0, 86	0, 82347 34234	− 393 28950	− 3 65375	0, 39145 28675	+ 366 83912	− 2 93069
0, 87	0, 81954 05284	− 396 94325	− 3 62433	0, 39512 12587	+ 363 90843	− 2 95687
0, 88	0, 81557 10959	− 400 56758	− 3 59462	0, 39876 03430	+ 360 95156	− 2 98281
0, 89	0, 81156 54201	− 404 16220	− 3 56466	0, 40236 98586	+ 357 96875	− 3 00854
0, 90	0, 80752 37981			0, 40594 95461		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
0,90	0, 80752 37981	− 407 72686	− 3 53446	0, 40594 95461	+ 354 96021	− 3 03394
0,91	0, 80344 65295	− 411 26132	− 3 50399	0, 40949 91483	+ 351 92627	− 3 05917
0,92	0, 79933 39163	− 414 76531	− 3 47326	0, 41301 84110	+ 348 86710	− 3 08410
0,93	0, 79518 62632	− 418 23857	− 3 44232	0, 41650 70820	+ 345 78300	− 3 10880
0,94	0, 79100 38775	− 421 68089	− 3 41109	0, 41996 49120	+ 342 67420	− 3 13322
0,95	0, 78678 70686	− 425 09198	− 3 37964	0, 42339 16540	+ 339 54098	− 3 15739
0,96	0, 78253 61488	− 428 47162	− 3 34795	0, 42678 70638	+ 336 38359	− 3 18131
0,97	0, 77825 14326	− 431 81957	− 3 31602	0, 43015 08997	+ 333 20228	− 3 20495
0,98	0, 77393 32369	− 435 13559	− 3 28385	0, 43348 29225	+ 329 99733	− 3 22834
0,99	0, 76958 18810	− 438 41944	− 3 25146	0, 43678 28958	+ 326 76899	− 3 25144
1,00	0, 76519 76866	− 441 67090	− 3 21881	0, 44005 05857	+ 323 51755	− 3 27430
1,01	0, 76078 09776	− 444 88971	− 3 18598	0, 44328 57612	+ 320 24325	− 3 29687
1,02	0, 75633 20805	− 448 07569	− 3 15288	0, 44648 81937	+ 316 94638	− 3 31916
1,03	0, 75185 13236	− 451 22857	− 3 11958	0, 44965 76575	+ 313 62722	− 3 34121
1,04	0, 74733 90379	− 454 34815	− 3 08606	0, 45279 39297	+ 310 28601	− 3 36295
1,05	0, 74279 55564	− 457 43421	− 3 05236	0, 45589 67898	+ 406 92306	− 3 38443
1,06	0, 73822 12143	− 460 48657	− 3 01835	0, 45896 60204	+ 303 53863	− 3 40561
1,07	0, 73361 63488	− 463 50492	− 2 98421	0, 46200 14067	+ 300 13302	− 3 42654
1,08	0, 72898 12996	− 466 48913	− 2 94985	0, 46500 27369	+ 296 70648	− 3 44716
1,09	0, 72431 64083	− 469 43898	− 2 91526	0, 46796 98017	+ 293 25932	− 3 46751
1,10	0, 71962 20185	− 472 35424	− 2 88052	0, 47090 23949	+ 289 79181	− 3 48757
1,11	0, 71489 84761	− 475 23476	− 2 84551	0, 47380 03130	+ 286 30424	− 3 50733
1,12	0, 71014 61285	− 478 08027	− 2 81034	0, 47666 33554	+ 282 79691	− 3 52682
1,13	0, 70536 53258	− 480 89061	− 2 77501	0, 47949 13245	+ 279 27009	− 3 54601
1,14	0, 70055 64197	− 483 66562	− 2 73942	0, 48228 40254	+ 275 72408	− 3 56491
1,15	0, 69571 97635	− 486 40504	− 2 70369	0, 48504 12662	+ 272 15917	− 3 58352
1,16	0, 69085 57131	− 489 10873	− 2 66776	0, 48776 28579	+ 268 57565	− 3 60181
1,17	0, 68596 46258	− 491 77649	− 2 63166	0, 49044 86144	+ 264 97384	− 3 61983
1,18	0, 68104 68609	− 494 40815	− 2 59536	0, 49309 83528	+ 261 35401	− 3 63754
1,19	0, 67610 27794	− 497 00351	− 2 55891	0, 49571 18929	+ 257 71647	− 3 65497
1,20	0, 67113 27443	− 499 56242	− 2 52227	0, 49828 90576	+ 254 06150	− 3 67206
1,21	0, 66613 71201	− 502 08469	− 2 48546	0, 50082 96726	+ 250 38944	− 3 68888
1,22	0, 66111 62732	− 504 57015	− 2 44849	0, 50333 35670	+ 246 70056	− 3 70538
1,23	0, 65607 05717	− 507 01864	− 2 41136	0, 50580 05726	+ 242 99517	− 3 72159
1,24	0, 65100 03853	− 509 43000	− 2 37406	0, 50823 05244	+ 239 27359	− 3 73747
1,25	0, 64590 60853	− 511 80406	− 2 33662	0, 51062 32603	+ 235 53612	− 3 75307
1,26	0, 64078 80447	− 514 14068	− 2 29899	0, 51297 86215	+ 231 78305	− 3 76834
1,27	0, 63564 66379	− 516 43967	− 2 26124	0, 51529 64520	+ 228 01471	− 3 78331
1,28	0, 63048 22412	− 518 70091	− 2 22334	0, 51757 65991	+ 224 23140	− 3 79797
1,29	0, 62529 52321	− 520 92425	− 2 18529	0, 51981 89131	+ 220 43343	− 3 81230
1,30	0, 62008 59896	− 523 10954	− 2 14709	0, 52202 32474	+ 216 62113	− 3 82635
1,31	0, 61485 48942	− 525 25663	− 2 10875	0, 52418 94587	+ 212 79478	− 3 84004
1,32	0, 60960 23279	− 527 36538	− 2 07030	0, 52631 74065	+ 208 95474	− 3 85346
1,33	0, 60432 86741	− 529 43568	− 2 03169	0, 52840 69539	+ 205 10128	− 3 86654
1,34	0, 59903 43173	− 531 46737	− 1 99296	0, 53045 79667	+ 201 23474	− 3 87931
1,35	0, 59371 96436	− 533 46033	− 1 95410	0, 53247 03141	+ 197 35543	− 3 89174
1,36	0, 58838 50403	− 535 41443	− 1 91513	0, 53444 38684	+ 193 46369	− 3 90389
1,37	0, 58303 08960	− 537 32956	− 1 87603	0, 53637 85053	+ 189 55980	− 3 91568
1,38	0, 57765 76004	− 539 20559	− 1 83682	0, 53827 41033	+ 185 64412	− 3 92718
1,39	0, 57226 55445	− 541 04241	− 1 79749	0, 54013 05445	+ 181 71694	− 3 93833
1,40	0, 56685 51204			0, 54194 77139		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
1,40	0, 56685 51204	− 542 83990	− 1 75804	0, 54194 77139	+ 177 77861	− 3 94918
1,41	0, 56142 67214	− 544 59794	− 1 71851	0, 54372 55000	+ 173 82943	− 3 95969
1,42	0, 55598 07420	− 546 31645	− 1 67885	0, 54546 37943	+ 169 86974	− 3 96989
1,43	0, 55051 75775	− 547 99530	− 1 63911	0, 54716 24917	+ 165 89985	− 3 97976
1,44	0, 54503 76245	− 549 63441	− 1 59926	0, 54882 14902	+ 161 92009	− 3 98929
1,45	0, 53954 12804	− 551 23367	− 1 55933	0, 55044 06911	+ 157 93080	− 3 99851
1,46	0, 53402 89437	− 552 79300	− 1 51929	0, 55201 99991	+ 153 93229	− 4 00740
1,47	0, 52850 10137	− 554 31229	− 1 47917	0, 55355 93220	+ 149 92489	− 4 01595
1,48	0, 52295 78908	− 555 79146	− 1 43899	0, 55505 85709	+ 145 90894	− 4 02418
1,49	0, 51739 99762	− 557 23045	− 1 39868	0, 55651 76603	+ 141 88476	− 4 03209
1,50	0, 51182 76717	− 558 62913	− 1 35834	0, 55793 65079	+ 137 85267	− 4 03966
1,51	0, 50624 13804	− 559 98747	− 1 31790	0, 55931 50346	+ 133 81301	− 4 04690
1,52	0, 50064 15057	− 561 30537	− 1 27740	0, 56065 31647	+ 129 76611	− 4 05381
1,53	0, 49502 84520	− 562 58277	− 1 23682	0, 56195 08258	+ 125 71230	− 4 06039
1,54	0, 48940 26243	− 563 81959	− 1 19620	0, 56320 79488	+ 121 65191	− 4 06662
1,55	0, 48376 44284	− 565 01579	− 1 15549	0, 56442 44679	+ 117 58529	− 4 07257
1,56	0, 47811 42705	− 566 17128	− 1 11474	0, 56560 03208	+ 113 51272	− 4 07812
1,57	0, 47245 25577	− 567 28602	− 1 07394	0, 56673 54480	+ 109 43460	− 4 08339
1,58	0, 46677 96975	− 568 35996	− 1 03307	0, 56782 97940	+ 105 35121	− 4 08829
1,59	0, 46109 60979	− 569 39303	− 99216	0, 56888 33061	+ 101 26292	− 4 09289
1,60	0, 45540 21676	− 570 38519	− 95123	0, 56989 59353	+ 97 17003	− 4 09714
1,61	0, 44969 83157	− 571 33642	− 91022	0, 57086 76356	+ 93 07289	− 4 10104
1,62	0, 44398 49515	− 572 24664	− 86920	0, 57179 83645	+ 88 97185	− 4 10463
1,63	0, 43826 24851	− 573 11584	− 82814	0, 57268 80830	+ 84 86722	− 4 10788
1,64	0, 43253 13267	− 573 94398	− 78704	0, 57353 67552	+ 80 75934	− 4 11079
1,65	0, 42679 18869	− 574 73102	− 74592	0, 57434 43486	+ 76 64855	− 4 11337
1,66	0, 42104 45767	− 575 47694	− 70477	0, 57511 08341	+ 72 53518	− 4 11561
1,67	0, 41528 98073	− 576 18171	− 66361	0, 57583 61859	+ 68 41957	− 4 11753
1,68	0, 40952 79902	− 576 84532	− 62244	0, 57652 03816	+ 64 30204	− 4 11909
1,69	0, 40375 95307	− 577 46776	− 58121	0, 57716 34020	+ 60 18295	− 4 12034
1,70	0, 39798 48594	− 578 04897	− 54003	0, 57776 52315	+ 56 06261	− 4 12124
1,71	0, 39220 43697	− 578 58900	− 49881	0, 57832 58576	+ 51 94137	− 4 12181
1,72	0, 38641 84797	− 579 08781	− 45758	0, 57884 52713	+ 47 81956	− 4 12205
1,73	0, 38062 76016	− 579 54539	− 41636	0, 57932 34669	+ 43 69751	− 4 12195
1,74	0, 37483 21477	− 579 96175	− 37515	0, 57976 04420	+ 39 57556	− 4 12151
1,75	0, 36903 25302	− 580 33690	− 33394	0, 58015 61976	+ 35 45405	− 4 12076
1,76	0, 36322 91612	− 580 67084	− 29273	0, 58051 07381	+ 31 33329	− 4 11964
1,77	0, 35742 24528	− 580 96357	− 25155	0, 58082 40710	+ 27 21365	− 4 11822
1,78	0, 35161 28171	− 581 21512	− 21037	0, 58109 62075	+ 23 09543	− 4 11644
1,79	0, 34580 06659	− 581 42549	− 16921	0, 58132 71618	+ 18 97899	− 4 11434
1,80	0, 33998 64110	− 581 59470	− 12809	0, 58151 69517	+ 14 86465	− 4 11192
1,81	0, 33417 04640	− 581 72279	− 8697	0, 58166 55982	+ 10 75273	− 4 10914
1,82	0, 32835 32361	− 581 80976	− 4591	0, 58177 31255	+ 6 64359	− 4 10605
1,83	0, 32253 51385	− 581 85567	− 486	0, 58183 95614	+ 2 43754	− 4 10261
1,84	0, 31671 65818	− 581 86053	+ 3615	0, 58186 49368	− 1 56507	− 4 09885
1,85	0, 31089 79765	− 581 82438	+ 7711	0, 58184 92861	− 5 66392	− 4 09476
1,86	0, 30507 97327	− 581 74727	+ 11805	0, 58179 26469	− 9 75868	− 4 09035
1,87	0, 29926 22600	− 581 62922	+ 15892	0, 58169 50601	− 13 84903	− 4 08557
1,88	0, 29344 59678	− 581 47030	+ 19976	0, 58155 65698	− 17 93460	− 4 08051
1,89	0, 28763 12648	− 581 27054	+ 24052	0, 58137 72238	− 22 01511	− 4 07509
1,90	0, 28181 85594			0, 58115 70727		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
1,90	0, 28181 85594	− 581 03002	+ 28126	0, 58115 70727	− 26 09020	− 4 06936
1,91	0, 27600 82592	− 580 74876	+ 32192	0, 58089 61707	− 30 15956	− 4 06332
1,92	0, 27020 07716	− 580 42684	+ 36251	0, 58059 45751	− 34 22284	− 4 05689
1,93	0, 26439 65032	− 580 06433	+ 40306	0, 58025 23467	− 38 27973	− 4 05018
1,94	0, 25859 58599	− 579 66127	+ 44352	0, 57986 95494	− 42 32991	− 4 04313
1,95	0, 25279 92472	− 579 21775	+ 48391	0, 57944 62503	− 46 37304	− 4 03576
1,96	0, 24700 70697	− 578 73384	+ 52424	0, 57898 25199	− 50 40880	− 4 02807
1,97	0, 24121 97313	− 578 20960	+ 56447	0, 57847 84319	− 54 43687	− 4 02005
1,98	0, 23543 76353	− 577 64513	+ 60464	0, 57793 40632	− 58 45692	− 4 01170
1,99	0, 22966 11840	− 577 04049	+ 64471	0, 57734 94940	− 62 46862	− 4 00306
2,00	0, 22389 07791	− 576 39578	+ 68470	0, 57672 48078	− 66 47168	− 3 99407
2,01	0, 21812 68213	− 575 71108	+ 72458	0, 57606 00910	− 70 46575	− 3 98476
2,02	0, 21236 97105	− 574 98650	+ 76439	0, 57535 54335	− 74 45052	− 3 97515
2,03	0, 20661 98455	− 574 22211	+ 80409	0, 57461 09283	− 78 42567	− 3 96522
2,04	0, 20087 76244	− 573 41802	+ 84370	0, 57382 66716	− 82 39089	− 3 95495
2,05	0, 19514 34442	− 572 57432	+ 88318	0, 57300 27627	− 86 34584	− 3 94439
2,06	0, 18941 77010	− 571 69114	+ 92259	0, 57213 93043	− 90 29023	− 3 93351
2,07	0, 18370 07896	− 570 76855	+ 96185	0, 57123 64020	− 94 22374	− 3 92230
2,08	0, 17799 31041	− 569 80670	+ 1 00102	0, 57029 41646	− 98 14604	− 3 91080
2,09	0, 17229 50371	− 568 80568	+ 1 04008	0, 56931 27042	− 102 05684	− 3 89898
2,10	0, 16660 69803	− 567 76560	+ 1 07900	0, 56829 21358	− 105 95582	− 3 88683
2,11	0, 16092 93243	− 566 68660	+ 1 11781	0, 56723 25776	− 109 84265	− 3 87440
2,12	0, 15526 24583	− 565 56879	+ 1 15650	0, 56613 41511	− 113 71705	− 3 86166
2,13	0, 14960 67704	− 564 41229	+ 1 19503	0, 56499 69806	− 117 57871	− 3 84858
2,14	0, 14396 26475	− 563 21726	+ 1 23346	0, 56382 11935	− 121 42729	− 3 83524
2,15	0, 13833 04749	− 561 98380	+ 1 27174	0, 56260 69206	− 125 26253	− 3 82156
2,16	0, 13271 06369	− 560 71206	+ 1 30990	0, 56135 42953	− 129 08409	− 3 80759
2,17	0, 12710 35163	− 559 40216	+ 1 34789	0, 56006 34544	− 132 89168	− 3 79333
2,18	0, 12150 94947	− 558 05427	+ 1 38576	0, 55873 45376	− 136 68501	− 3 77876
2,19	0, 11592 89520	− 556 66851	+ 1 42347	0, 55736 76875	− 140 46377	− 3 76388
2,20	0, 11036 22669	− 555 24504	+ 1 46183	0, 55596 30498	− 144 22765	− 3 74871
2,21	0, 10480 98165	− 553 78401	+ 1 49845	0, 55452 07733	− 147 97636	− 3 73327
2,22	0, 09927 19764	− 552 28556	+ 1 53569	0, 55304 10097	− 151 70963	− 3 71748
2,23	0, 09374 91208	− 550 74987	+ 1 57279	0, 55152 39134	− 155 42711	− 3 70146
2,24	0, 08824 16221	− 549 17708	+ 1 60973	0, 54996 96423	− 159 12857	− 3 68509
2,25	0, 08274 98513	− 547 56735	+ 1 64649	0, 54837 83566	− 162 81366	− 3 66848
2,26	0, 07727 41778	− 545 92086	+ 1 68309	0, 54675 02200	− 166 48214	− 3 65155
2,27	0, 07181 49692	− 544 23777	+ 1 71953	0, 54508 53986	− 170 13369	− 3 63434
2,28	0, 06637 25915	− 542 51824	+ 1 75577	0, 54338 40617	− 173 76803	− 3 61685
2,29	0, 06094 74091	− 540 76247	+ 1 79187	0, 54164 63814	− 177 38488	− 3 59907
2,30	0, 05553 97844	− 538 97060	+ 1 82776	0, 53987 25326	− 180 98395	− 3 58102
2,31	0, 05015 00784	− 537 14284	+ 1 86347	0, 53806 26931	− 184 56497	− 3 56268
2,32	0, 04477 86500	− 535 27937	+ 1 89901	0, 53621 70434	− 188 12765	− 3 54405
2,33	0, 03942 58563	− 533 38036	+ 1 93437	0, 53433 57669	− 191 67170	− 3 52516
2,34	0, 03409 20527	− 531 44599	+ 1 96951	0, 53241 90499	− 195 19686	− 3 50601
2,35	0, 02877 75928	− 529 47648	+ 2 00448	0, 53046 70813	− 198 70287	− 3 48654
2,36	0, 02348 28280	− 527 47200	+ 2 03924	0, 52848 00526	− 202 18941	− 3 46684
2,37	0, 01820 81080	− 525 43276	+ 2 07381	0, 52645 81585	− 205 65625	− 3 44684
2,38	0, 01295 37804	− 523 35895	+ 2 10819	0, 52440 15960	− 209 10309	− 3 42661
2,39	0, 00772 01909	− 521 25076	+ 2 14234	0, 52231 05651	− 212 52968	− 3 40611
2,40	0, 00250 76833			0, 52018 52682		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
2,40	+ 0,00250 76833	− 519 10842	+ 2 17630	0,52018 52682	− 215 93579	− 3 38529
2,41	− 0,00268 34009	− 516 93212	+ 2 21006	0,51802 59103	− 219 32108	− 3 36424
2,42	− 0,00785 27221	− 514 72206	+ 2 24357	0,51583 26995	− 222 68532	− 3 34295
2,43	− 0,01299 99427	− 512 57849	+ 2 27692	0,51360 58463	− 226 02827	− 3 32138
2,44	− 0,01812 47276	− 510 20157	+ 2 31001	0,51134 55636	− 229 34965	− 3 29957
2,45	− 0,02322 67433	− 507 89156	+ 2 34289	0,50905 20671	− 232 64922	− 3 27749
2,46	− 0,02830 56589	− 505 54867	+ 2 37557	0,50672 55749	− 235 92671	− 3 25516
2,47	− 0,03336 11456	− 503 17310	+ 2 40800	0,50436 63078	− 239 18187	− 3 23258
2,48	− 0,03839 28766	− 500 76510	+ 2 44021	0,50197 44891	− 242 41445	− 3 20976
2,49	− 0,04340 05276	− 498 32498	+ 2 47220	0,49955 03446	− 245 62421	− 3 18669
2,50	− 0,04838 37765	− 495 85269	+ 2 50394	0,49709 41025	− 248 81090	− 3 16336
2,51	− 0,05334 23034	− 493 34875	+ 2 53546	0,49460 59935	− 251 97426	− 3 13981
2,52	− 0,05827 57909	− 490 81329	+ 2 56675	0,49208 62509	− 255 11407	− 3 11601
2,53	− 0,06318 39238	− 488 24654	+ 2 59777	0,48953 51102	− 258 23008	− 3 09198
2,54	− 0,06806 63892	− 485 64877	+ 2 62858	0,48695 28094	− 261 32206	− 3 06769
2,55	− 0,07292 28769	− 483 02019	+ 2 65914	0,48433 95888	− 264 38975	− 3 04321
2,56	− 0,07775 30788	− 480 36105	+ 2 68944	0,48169 56913	− 267 43296	− 3 01845
2,57	− 0,08255 66893	− 477 67161	+ 2 71951	0,47902 13617	− 270 45141	− 2 99349
2,58	− 0,08733 34054	− 474 95210	+ 2 74930	0,47631 68476	− 273 44490	− 2 96831
2,59	− 0,09208 29264	− 472 20280	+ 2 77887	0,47358 23986	− 276 41321	− 2 94288
2,60	− 0,09680 49544	− 469 42393	+ 2 80817	0,47081 82665	− 279 35609	− 2 91724
2,61	− 0,10149 91937	− 466 61576	+ 2 83722	0,46802 47056	− 282 27333	− 2 89140
2,62	− 0,10616 53513	− 463 77854	+ 2 86598	0,46520 19723	− 285 16473	− 2 86529
2,63	− 0,11080 31367	− 460 91256	+ 2 89453	0,46235 03250	− 288 03002	− 2 83903
2,64	− 0,11541 22623	− 458 01803	+ 2 92277	0,45947 00248	− 290 86905	− 2 81251
2,65	− 0,11999 24426	− 455 09526	+ 2 95077	0,45656 13343	− 293 68156	− 2 78580
2,66	− 0,12454 33952	− 452 14449	+ 2 97849	0,45362 45187	− 296 46736	− 2 75887
2,67	− 0,12906 48401	− 449 16600	+ 3 00594	0,45065 98451	− 299 22623	− 2 73175
2,68	− 0,13355 65001	− 446 16006	+ 3 03313	0,44766 75828	− 301 95798	− 2 70441
2,69	− 0,13801 81007	− 443 12693	+ 3 06002	0,44464 80030	− 304 66239	− 2 67688
2,70	− 0,14244 93700	− 440 06691	+ 3 08667	0,44160 13791	− 307 33927	− 2 64915
2,71	− 0,14685 00391	− 436 98024	+ 3 11302	0,43852 79864	− 309 98842	− 2 62122
2,72	− 0,15121 98415	− 433 86722	+ 3 13907	0,43542 81022	− 312 60964	− 2 59311
2,73	− 0,15555 85137	− 430 72815	+ 3 16489	0,43230 20058	− 315 20275	− 2 56478
2,74	− 0,15986 57952	− 427 56326	+ 3 19037	0,42914 99783	− 317 76753	− 2 53630
2,75	− 0,16414 14278	− 424 37289	+ 3 21561	0,42597 23030	− 320 30383	− 2 50761
2,76	− 0,16838 51567	− 421 15728	+ 3 24053	0,42276 92647	− 322 81144	− 2 47873
2,77	− 0,17259 67295	− 417 91675	+ 3 26517	0,41954 11503	− 325 29017	− 2 44968
2,78	− 0,17677 58970	− 414 65158	+ 3 28952	0,41628 82486	− 327 73985	− 2 42047
2,79	− 0,18092 24128	− 411 36206	+ 3 31359	0,41301 08501	− 330 16032	− 2 39106
2,80	− 0,18503 60334	− 408 04847	+ 3 33735	0,40970 92469	− 332 55138	− 2 36149
2,81	− 0,18911 65181	− 404 71112	+ 3 36081	0,40638 37331	− 334 91287	− 2 33172
2,82	− 0,19316 36293	− 401 35031	+ 3 38398	0,40303 46044	− 337 24459	− 2 30184
2,83	− 0,19717 71324	− 397 96633	+ 3 40684	0,39966 21585	− 339 54643	− 2 27173
2,84	− 0,20115 67957	− 394 55949	+ 3 42942	0,39626 66942	− 341 81816	− 2 24152
2,85	− 0,20510 23906	− 391 13007	+ 3 45168	0,39284 85126	− 344 05968	− 2 21110
2,86	− 0,20901 36913	− 387 67839	+ 3 47363	0.38940 79158	− 346 27078	− 2 18054
2,87	− 0,21289 04752	− 384 20476	+ 3 49530	0,38594 52080	− 348 45132	− 2 14984
2,88	− 0,21673 25228	− 380 70946	+ 3 51662	0,38246 06948	− 350 60116	− 2 11898
2,89	− 0,22053 96174	− 377 19284	+ 3 53767	0,37895 46832	− 352 72014	− 2 08796
2,90	− 0,22431 15458			0,37542 74818		

k	I_k^0	Diff. I.	Diff. II.	I_k^1	Diff. I.	Diff. II.
2,90	− 0,22431 15458	− 373 65517	+ 3 55840	0,37542 74818	− 354 80810	− 2 05680
2,91	− 0,22804 80975	− 370 09677	+ 3 57879	0,37187 94008	− 356 86490	− 2 02551
2,92	− 0,23174 90652	− 366 51798	+ 3 59891	0,36831 07518	− 358 89041	− 1 99406
2,93	− 0,23541 42450	− 362 91907	+ 3 61868	0,36472 18477	− 360 88447	− 1 96249
2,94	− 0,23904 34357	− 359 30039	+ 3 63815	0,36111 30030	− 362 84696	− 1 93076
2,95	− 0,24263 64396	− 355 66224	+ 3 65730	0,35748 45334	− 364 77772	− 1 89893
2,96	− 0,24619 30620	− 352 00494	+ 3 67612	0,35383 67562	− 366 67665	− 1 86695
2,97	− 0,24971 31114	− 348 32882	+ 3 69464	0,35016 99897	− 368 54360	− 1 83485
2,98	− 0,25319 63996	− 344 63418	+ 3 71283	0,34648 45537	− 370 37845	− 1 80262
2,99	− 0,25664 27414	− 340 92135	+ 3 73069	0,34278 07692	− 372 18107	− 1 77027
3,00	− 0,26005 19549	− 337 19066	+ 3 74822	0,33905 89585	− 373 95134	− 1 73782
3,01	− 0,26342 38615	− 333 44244	+ 3 76545	0,33531 94451	− 375 68916	− 1 70522
3,02	− 0,26675 82859	− 329 67699	+ 3 78234	0,33156 25535	− 377 39438	− 1 67255
3,03	− 0,27005 50558	− 325 89465	+ 3 79889	0,32778 86097	− 379 06693	− 1 63974
3,04	− 0,27331 40023	− 322 09576	+ 3 81513	0,32399 79404	− 380 70667	− 1 60682
3,05	− 0,27653 49599	− 318 28063	+ 3 83103	0,32019 08737	− 382 31349	− 1 57383
3,06	− 0,27971 77662	− 314 44960	+ 3 84660	0,31636 77388	− 383 88732	− 1 54070
3,07	− 0,28286 22622	− 310 60300	+ 3 86185	0,31252 88656	− 385 42802	− 1 50750
3,08	− 0,28596 82922	− 306 74115	+ 3 87675	0,30867 45854	− 386 93552	− 1 47419
3,09	− 0,28903 57037	− 302 86440	+ 3 89134	0,30480 52302	− 388 40971	− 1 44079
3,10	− 0,29206 34377	− 298 97306	+ 3 90556	0,30092 11331	− 389 85050	− 1 40732
3,11	− 0,29505 40783	− 295 06750	+ 3 91948	0,29702 26281	− 391 25782	− 1 37372
3,12	− 0,29800 47533	− 291 14802	+ 3 93304	0,29311 00499	− 392 63154	− 1 34009
3,13	− 0,30091 62335	− 287 21498	+ 3 94627	0,28918 37345	− 393 97163	− 1 30634
3,14	− 0,30378 83833	− 283 26871	+ 3 95918	0,28524 40182	− 395 27797	− 1 27253
3,15	− 0,30662 10704	− 279 30953	+ 3 97173	0,28129 12385	− 396 55050	− 1 23864
3,16	− 0,30941 41657	− 275 33780	+ 3 98393	0,27732 57335	− 397 78914	− 1 20468
3,17	− 0,31216 75437	− 271 35387	+ 3 99583	0,27334 78421	− 398 99382	− 1 17065
3,18	− 0,31488 10824	− 267 35804	+ 4 00735	0,26935 79039	− 400 16447	− 1 13657
3,19	− 0,31755 46628	− 263 35069	+ 4 01855	0,26535 62592	− 401 30104	− 1 10238
3,20	− 0,32018 81697			0,26134 32488		