L. Fuchs

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen

In:
Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – Berlin: Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften (in Commission bei Georg Reimer)
Jahrgang 1901 : Erster Halbband (Januar bis Juni)
S. 34-48

Persistent Identifier: urn:nbn:de:kobv:b4-opus4-40392

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Von L. Fuchs.

Die folgende Notiz enthält einen Auszug aus einer demnächst zu veröffentlichenden Arbeit. Man hatte in den bisherigen auf die linearen Differentialgleichungen bezüglichen Untersuchungen sich darauf beschränkt, die analytische Form der Lösungen derselben in der Umgebung je einer singulären Stelle der Differentialgleichung festzustellen. Für viele tiefergehende Probleme, welche auf die Natur der der Differentialgleichung zugehörigen Substitutionsgruppe Bezug haben, ist es von Wichtigkeit, auch eine analytische Form für ein Fundamentalsystem von Lösungen aufzustellen, welches aus der Fundamentalgleichung für einen beliebigen Umlauf entspringt. Mit dieser Aufstellung beschäftigt sich der erste Theil dieser Notiz.

Mit Hülfe der erhaltenen Resultate wird alsdann ein auf die Beschaffenheit der Gruppe von Substitutionen bezüglicher Satz hergeleitet, für den Fall, dass ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung einem Systeme von homogenen Relationen mit constanten Coefficienten Genüge leistet.

Um aus diesem Satze weitere Folgerungen zu ziehen, wird vorläufig der Fall in's Auge gefasst, dass eine solche Relation mit der besonderen Eigenschaft stattfindet, dass dieselbe durch die Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt. In einer späteren Mittheilung sollen diese Folgerungen einer näheren Erörterung unterworfen werden.

1.

In den Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen wird Folgendes[1] bewiesen:

Es sei

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

[1] Crelle's Journal Bd. 66, S. 131 ff., Bd. 68, S. 361 ff.

wo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ innerhalb eines Gebietes T der complexen Variablen z eindeutige und überall bestimmte Functionen von z sind. Ist U ein Umlauf von z innerhalb T und

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\omega & \alpha_{21} & \ldots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\omega & \ldots \alpha_{n2} \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots \alpha_{nn-\omega} \end{vmatrix} = 0$$

die zu diesem Umlaufe gehörige Fundamentalgleichung, so giebt es ein Fundamentalsystem von Lösungen von folgender Beschaffenheit: Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ bez. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$-fache Wurzeln der Gleichung (B), derart also, dass:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = n,$$

so zerfallen die zu ω_k gehörigen λ_k Elemente des Fundamentalsystems derart in Gruppen von bez. $\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \ldots \mu_{k_3}$ Elementen, wo also:

$$\mu_{k_1} + \mu_{k_2} + \ldots + \mu_{k_3} = \lambda_k,$$

dass die einer solchen Gruppe zugehörigen Elemente Umlaufsrelationen der Gestalt

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = \omega y_1 \\ \bar{y}_2 = \omega y_2 + y_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{y}_\mu = \omega y_\mu + y_{\mu-1} \end{cases}$$ [1]

genügen.

Diese Resultate sind selbstverständlich nicht bloss für einen Umlauf um eine der Unendlichkeitsstellen der Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — für welche sie in der Theorie zunächst Anwendung gefunden haben — sondern für jeden beliebigen Umlauf U gültig.

In dem Falle, dass der Umlauf U um eine der Unstetigkeitsstellen $z = a$ der Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vollzogen wird, ist nachgewiesen worden, dass die analytische Form der zu einer Gruppe (C) zugehörigen Integralelemente die folgende ist:

Sei

$$r = \frac{1}{2\pi i} \log \omega$$

und setzen wir

$$(1) \qquad f(t) = \left| \psi_{\mu-1} + \binom{\mu-1}{1} \psi_{\mu-2} t + \binom{\mu-1}{2} \psi_{\mu-3} t^2 + \ldots + \psi_0 t^{\mu-1} \right| (z-a)^r,$$

wo $\psi_{\mu-1}, \psi_{\mu-2}, \ldots, \psi_0$ in der Umgebung von a eindeutige Functionen von z sind, und wo

[1] Vergl. Hamburger, Crelle's Journal Bd. 76, S. 121.

$$t = \frac{1}{2\pi i} \log (z-a). \tag{2}$$

Alsdann ist

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} y_\mu &= f(t) \\ y_{\mu-1} &= \dfrac{1}{\mu-1} \dfrac{\partial f(t)}{\partial t} \\ y_{\mu-2} &= \dfrac{1}{(\mu-1)(\mu-2)} \dfrac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_1 &= \dfrac{1}{(\mu-1)!} \dfrac{\partial^{\mu-1} f(t)}{\partial t^{\mu-1}}. \end{cases}$$ [1]

2.

Wir gehen nach diesen Vorbereitungen dazu über, eine analytische Form der zu einer Gruppe (C) gehörigen Lösungen der Gleichung (A) auch in dem Falle aufzustellen, dass U nicht mehr einen Umlauf um einen einzigen singulären Punkt a, sondern vielmehr einen beliebigen Umlauf bedeute.

Sind die sämmtlichen Gruppen (C) eingliedrig, so ist entweder

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 1.$$

alsdann bleiben

$$y_1 = \phi_1, y_2 = \phi_2, \ldots, y_n = \phi_n$$

beim Umlauf U ungeändert, oder wenn z. B.

$$\omega_1 = e^{2\pi i r_1}$$

von Eins verschieden, so setzen wir

$$y^{\frac{1}{r_1}} = \zeta:$$

alsdann ist

$$y_1 = \zeta^{r_1}\phi_1, y_2 = \zeta^{r_2}\phi_2, \ldots, y_n = \zeta^{r_n}\phi_n. \tag{1a}$$

wo $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ beim Umlaufe U ungeändert bleiben.

Wenn nicht sämmtliche zu einem beliebigen Umlauf U gehörigen Gruppen (C) eingliedrig sind, so sei η_1 der Repräsentant einer mehrgliedrigen Gruppe, d. h. dasjenige Element derselben, welches sich bei dem Umlaufe U mit der Wurzel ω der Fundamentalgleichung multiplicirt; ferner sei η_2 das zweite Element derselben Gruppe, so dass

$$\bar{\eta}_2 = \omega\eta_2 + \eta_1. \tag{2}$$

[1] Vergl. Crelle's Journal Bd. 66, S. 136 ff., Bd. 68, S. 355 ff. und Jürgens, Crelle's Journal Bd. 80, S. 151 ff.; vergl. auch Heffter, lineare Differentialgleichungen S. 107.

Wir setzen nunmehr

$$\xi = e^{2\pi i \frac{\gamma_2}{\gamma_1}},$$

$$t = \frac{1}{2\pi i} \log \xi,$$

so wird ξ bei dem Umlaufe U ungeändert bleiben, während t sich um Eins vermehrt.

Sind nunmehr $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ die zu einer der Gruppen (C) gehörigen Elemente des Fundamentalsystems und r_1 die zugehörige Wurzel der Fundamentalgleichung und werde wieder

$$(2) \qquad \omega_1 = e^{2\pi i r_1}$$

gesetzt, alsdann ist in Folge der ersten Gleichung der bezüglichen Gruppe (C)

$$(3) \qquad y_1 = \xi^{r_1} \phi_1,$$

wo ϕ_1 beim Umlaufe U ungeändert bleibt. Aus der zweiten Gleichung (C)

$$\bar{y}_2 = \omega_1 y_2 + y_1$$

folgt, dass $\frac{y_2}{y_1}$ nach dem Umlauf sich um $\frac{1}{\omega_1}$ vermehrt. Die gleiche Eigenschaft kommt auch $\frac{t}{\omega_1}$ zu; es ist also $\frac{y_2}{y_1} - \frac{t}{\omega_1}$ gegen den Umlauf U unempfindlich. Hieraus folgern wir analog wie bei dem entsprechenden besonderen Fall für den Umlauf um einen einzigen singulären Punkt[1]

$$(4) \qquad y_2 = \xi^{r_1} \{\phi_{20} + \phi_{21} t\}$$

wo ϕ_{20}, ϕ_{21} bei dem Umlauf U ungeändert bleibt. Und so fortfahrend erhält man

$$(5) \qquad y_\mu = \xi^{r_1} \{\phi_{\mu 0} + \phi_{\mu 1} t + \ldots + \phi_{\mu, \mu-1} t^{\mu-1}\},$$

wo $\phi_{\mu 0}, \phi_{\mu 1}, \ldots, \phi_{\mu, \mu-1}$ bei dem Umlauf U ungeändert bleiben.

Man kann alsdann analog wie für den Umlauf um einen einzigen singulären Punkt folgern, dass die Functionen ϕ_{kl} sich als lineare homogene Functionen von μ linear unabhängigen mit constanten Coefficienten darstellen lassen und dass namentlich die Coefficienten der höchsten Potenzen von t sich von ϕ_1 nur um einen constanten Factor unterscheiden.

[1] Crelle's Journal Bd. 66, S. 135.

3.

Wir machen jetzt Gebrauch von folgendem Satze:

Ist

$$y = f(z, u) \tag{1}$$

eine Lösung der Gleichung (A), wo u eine willkürliche Grösse bedeutet, von welcher die Coefficienten dieser Gleichung unabhängig sind, so sind auch die sämmtlichen partiellen Ableitungen von y nach der Grösse u Lösungen derselben Differentialgleichung.[1]

Wir haben[2] nachgewiesen, dass eine ganze rationale Function von $\log(z-a)$ deren Coefficienten abgesehen von einem allen gemeinsamen Factor $(z-a)^r$ in der Umgebung von $z = a$ eindeutige Functionen sind, nur dann identisch verschwindet, wenn die einzelnen Coefficienten verschwinden.

I. Ein analoger Satz gilt auch für einen Ausdruck

$$F = \xi^r \{A_0 + A_1 t + \ldots + A_m t^m\}, \tag{2}$$

worin ξ, t dieselbe Bedeutung wie in voriger Nummer haben und $A_0, A_1, \ldots, A_m$ Functionen von z sind, welche bei dem Umlaufe U ungeändert bleiben. Das identische Verschwinden von F erfordert, dass $A_0, A_1, \ldots, A_m$ identisch Null sind. Der Beweis ist ganz so wie bei dem Specialumlauf um $z = a$ zu führen. Dieser Satz gestattet auch eine Erweiterung[3], welche der für einen speciellen Umlauf um eine einzige singuläre Stelle gemachten analog ist, dass das Verschwinden einer Summe von Ausdrücken der Form (2), worin die Exponenten r sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, das Verschwinden aller einzelnen Summanden zur Folge hat.

II. Ist daher

$$y = F(z, t) \tag{3}$$

eine ganze rationale Function von z und t, deren Coefficienten bis auf einen allen gemeinsamen Factor ξ^r bei dem Umlauf U ungeändert bleiben eine Lösung der Gleichung (A), so ist auch

$$y = F(z, t + \lambda) \tag{4}$$

für einen willkürlichen Werth von λ eine Lösung der Gleichung (A).

Der Beweis ist wieder analog wie für den Specialumlauf um $z = a$ zu führen[4].

[1] Vergl. Köhler, Inauguraldissertation, Heidelberg 1879.
[2] Crelle's Journal Bd. 68, S. 356.
[3] Vergl. Thomé, Crelle's Journal Bd. 74, S. 194 und Heffter, a. a. O. S. 238.
[4] Vergl. Heffter, a. a. O. S. 107.

Hieraus ergiebt sich aber analog wie für den Specialumlauf um $z = a$.

III. Ist

$$y = F(z, t) \tag{5}$$

eine Lösung der Gleichung (A) so ist auch $\frac{\partial^k y}{\partial t^k}$ eine Lösung derselben Gleichung.

Wir können daher wie für den Specialumlauf um $z = a$ in Nr. 1 die in den Gleichungen (3) bis (5) Nr. 2 enthaltene Integralgruppe durch das System

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} y_\mu = f(t), \\ y_{\mu-1} = \frac{1}{\mu-1} \frac{\partial f(t)}{\partial t}, \\ y_{\mu-2} = \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_1 = \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{\mu-1} f(t)}{\partial t^{\mu-1}} \end{cases}$$

ersetzen, wo

$$(5) \quad f(t) = \xi^r \left\{ \psi_{\mu-1} + \binom{\mu-1}{1} \psi_{\mu-2} t + \binom{\mu-1}{2} \psi_{\mu-3} t^3 + \dots + \psi_0 t^{\mu-1} \right\}$$

und $\psi_{\mu-1}, \psi_{\mu-2}, \dots, \psi_0$ bei dem Umlaufe U ungeändert bleiben.

Die Functionen $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ genügen daher den Gleichungen:

$$\text{(F)} \quad y_{\mu-k} = \frac{1}{\mu-k} \frac{\partial y_{\mu-k+1}}{\partial t}.$$

Wir wollen im Folgenden diese Gestalt der Lösungen als die kanonische bezeichnen.

4.

Wir setzen jetzt voraus, dass ein Fundamentalsystem $w_1, w_2, \dots, w_n$ von Lösungen der Gleichung (A) einer gewissen Anzahl homogener Relationen des Grades ν und mit constanten Coefficienten Genüge leiste. Die Anzahl der linear unabhängigen derartigen Relationen ist eine endliche; wir bezeichnen dieselbe mit ρ. Die Relationen seien

$$\text{(G)} \quad \begin{cases} \phi_1(w_1, w_2, \dots, w_n) = 0, \\ \phi_2(w_1, w_2, \dots, w_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \phi_\rho(w_1, w_2, \dots, w_n) = 0. \end{cases}$$

Es mögen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ das kanonische Fundamentalsystem sein, welches zu einem willkürlichen Umlaufe U gehört und welches gruppenweise in voriger Nummer durch die Gleichungen (E) definirt worden ist. Wir lassen eine Abänderung in der Reihenfolge der in einer Gruppe enthaltenen Integralelemente in (E) derart eintreten, dass wir

$$(1) \qquad \begin{cases} y_\mu &= w_1 \\ y_{\mu-1} &= w_2 \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ y_1 &= w_\mu \end{cases}$$

setzen. Die Gleichung (F) nimmt daher die Gestalt an:

$$(\mathrm{F}_1) \qquad w_{k+1} = \frac{1}{\mu-k}\frac{\partial w_k}{\partial t}.$$

Wir wollen die Elemente $w_1, w_2, \ldots, w_n$ in folgender Reihenfolge schreiben:

$$(2) \qquad w_1, w_2, \ldots w_{\mu_1}; \; w_{\mu_1+1}, w_{\mu_1+2}, \ldots, w_{\mu_1+\mu_2}:$$
$$\ldots w_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{\lambda-1}+1}, w_{\mu_1+\mu_2+\ldots\mu_{\lambda-1}+2}, \ldots, w_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{\lambda-1}+\mu_\lambda}.$$

derart, dass wir die zu der $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\lambda$-gliedrigen Gruppe bez. gehörigen Elemente zusammenstellen.

Substituiren wir in (G) für $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ihre analytischen Ausdrücke aus (E), so müssen nach Satz I Nr. 3 (Verallgemeinerung) in den Resultaten die Coefficienten der einzelnen Potenzen von t verschwinden.

Hieraus folgt

$$(3) \qquad \frac{\partial \phi_\varkappa}{\partial t} = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, \rho)$$

d. h. nach Gleichung (F)

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_1}(\mu_1 - 1)\, w_2 + \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_2}(\mu_1-2)\, w_3 + \ldots + \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1-1}}\cdot 1\cdot w_{\mu_1} \\ &+ \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_{\nu_1+1}}(\mu_2-1)\, w_{\mu_1+2} + \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_{\nu_1+2}}(\mu_2-2)\, w_{\mu_1+3} + \ldots + \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_{\nu_1+\nu_2-1}}\cdot 1\, w_{\mu_1+\mu_2} \\ &+ \text{u. s. w.} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \rho) \end{aligned}$$

Nach der über $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\rho$ oben gemachten Voraussetzung muss demnach identisch für beliebige $w_1, w_2, \ldots, w_n$

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_1}(\mu_1 - 1)\, w_2 + \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_2}(\mu_1-2)\, w_3 + \ldots + \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_{\nu_1-1}}\, 1\cdot w\cdot_{\mu_1} \\ &+ \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_{\nu_1+1}}(\mu_2-1)\, w_{\nu_1+2} + \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_{\nu_1+2}}(\mu_2-2)\, w_{\nu_1+3} + \ldots + \frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial w_{\nu_1+\nu_2-1}}\cdot 1\cdot w_{\nu_1+\nu_2} \\ &+ \text{u. s. w.} \\ &\quad = M_{\varkappa 1}\phi_1 + M_{\varkappa 2}\phi_2 + \ldots + M_{\varkappa\rho}\phi_\rho \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \rho) \end{aligned}$$

sein, wo die Grössen M_{kl} von $w_1, w_2, \ldots, w_n$ unabhängig sind.

Um die allgemeine Lösung dieses Systems partieller Differentialgleichungen zu finden haben. wir nach Jacobi[1]) zunächst das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
&\frac{dw_1}{(\mu_1-1)w_2}=\frac{dw_2}{(\mu_1-2)w_3}=\ldots=\frac{dw_{\mu_1-1}}{1\cdot w_{\mu_1}}\\
\text{(II}')\quad &=\frac{dw_{\mu_1+1}}{(\mu_2-1)w_{\mu_1+2}}=\frac{dw_{\mu_1+2}}{(\mu_2-2)w_{\mu_1+3}}=\ldots=\frac{dw_{\mu_1+\mu_2-1}}{1\cdot w_{\mu_1+\mu_2}}\\
&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\frac{d\phi_1}{N_1}=\frac{d\phi_2}{N_2}=\ldots=\frac{\partial\phi_\zeta}{N_\zeta}
\end{aligned}
$$

zu integriren, wo

$$N_\varkappa = M_{\varkappa 1}\phi_1 + M_{\varkappa 2}\phi_2 + \ldots + M_{\varkappa\zeta}\phi_\zeta$$

gesetzt ist.

Ein System von Gleichungen der Form

$$\text{(5)}\qquad \frac{dw_1}{(\mu-1)w_2}=\frac{dw_2}{(\mu-2)w_3}=\ldots=\frac{dw_{\mu-1}}{1\,w_\mu}$$

oder das identische System

$$
\text{(6)}\qquad
\begin{aligned}
\frac{dw_1}{d\vartheta}&=(\mu-1)w_2,\\
\frac{dw_2}{d\vartheta}&=(\mu-2)w_3,\\
&\ldots\ldots\\
\frac{dw_{\mu-1}}{d\vartheta}&=w_\mu,\\
\frac{dw_\mu}{d\vartheta}&=0
\end{aligned}
$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$
\begin{aligned}
w_1 &= w_\mu\vartheta^{\mu-1}+\binom{\mu-1}{1}A_{\mu-2}\vartheta^{\mu-2}+\binom{\mu-1}{2}A_{\mu-3}\vartheta^{\mu-3}+\ldots+\binom{\mu-1}{\mu-1}A_0\\
w_2 &= \frac{1}{\mu-1}\frac{dw_1}{d\vartheta}\\
\text{(7)}\quad w_3 &= \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}\frac{d^2w_1}{d\vartheta^2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w_{\mu-1} &= \frac{1}{(\mu-1)!}\frac{d^{\mu-1}w_1}{d\vartheta^{\mu-1}},
\end{aligned}
$$

wo $A_{\mu-2}$, $A_{\mu-3}$, ..., A_0 willkürliche Constanten bedeuten.

[1]) Crelle's Journal Bd. 2, S. 322; Gesammelte Werke Bd. 4, S. 8.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\mathfrak{S}^{\mu-k} = B_{k0} + B_{k1}w_1 + B_{k2}w_2 + \dots + B_{k\mu}w_\mu\,. \tag{8}$$

wo die B_{kl} sich rational aus den Coefficienten A_l zusammensetzen. Demnach ist

$$B_{k0} + B_{k1}w_1 + \dots + B_{k\mu}w_\mu = (B_{\mu-1,0} + B_{\mu-1,1}w_1 \dots + B_{\mu-1\mu}w_\mu)^{\mu-k}\,. \tag{J$_1$}$$
$$(k = 1, 2, \dots, \mu-2)$$

Diese Gleichungen stellen die $\mu - 2$ Integralgleichungen des Systems (5) oder (6) dar.

Von den Constanten $A_0, \dots, A_{\mu-2}$ lässt sich eine willkürlich und so wählen, dass die Gleichungen (J_1) die Form annehmen:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \gamma_1 \\ \psi_2 &= \gamma_2 \\ &\dots\dots \\ \psi_{\mu-2} &= \gamma_{\mu-2}\,; \end{aligned} \tag{J$_1$}$$

wo ψ_k eine ganze rationale homogene Function der Grössen

$$w_1,\ w_2, \dots\dots w_\mu$$

mit numerischen Coefficienten, $\gamma_1, \gamma_2 \dots\dots \gamma_{\mu-2}$ willkürliche Constanten bedeuten.

So ergiebt sich z. B. für $\mu = 4$:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= w_2w_4 - w_3^2 \\ \psi_2 &= w_1w_4^2 - 3w_2w_3w_4 + 2w_3^3\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Functionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{\mu-2}$ lassen sich in Determinantenformen umgestalten.[1]

(J$_2$)

$$\psi_1 = \begin{vmatrix} w_{\mu-1} & w_\mu \\ w_{\mu-2} & w_{\mu-1} \end{vmatrix} : \qquad \psi_2 = \begin{vmatrix} 2w_{\mu-1} & w_\mu & 0 \\ w_{\mu-2} & w_{\mu-1} & w_\mu \\ w_{\mu-3} & w_{\mu-2} & w_{\mu-1} \end{vmatrix} :$$

$$\psi_3 = \begin{vmatrix} w_{\mu-2} & w_{\mu-1} & w_\mu \\ w_{\mu-3} & w_{\mu-2} & w_{\mu-1} \\ w_{\mu-4} & w_{\mu-3} & w_{\mu-2} \end{vmatrix} : \ \psi_4 = \begin{vmatrix} 3w_{\mu-2} & 2w_{\mu-1} & w_\mu & 0 \\ w_{\mu-3} & w_{\mu-2} & w_{\mu-1} & w_\mu \\ w_{\mu-4} & w_{\mu-3} & w_{\mu-2} & w_{\mu-1} \\ w_{\mu-5} & w_{\mu-4} & w_{\mu-3} & w_{\mu-2} \end{vmatrix} :$$

u. s. w.

$$\psi_{2\lambda} = \begin{vmatrix} (\lambda+1)w_{\mu-\lambda}, & \lambda w_{\mu-\lambda+1} & \dots & w_\mu & 0 \\ w_{\mu-\lambda+1} & w_{\mu-\lambda} & \dots & w_{\mu-1} & w_\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{\mu-2\lambda-1} & w_{\mu-2\lambda} & \dots & w_{\mu-\lambda-1} & w_{\mu-\lambda} \end{vmatrix} :$$

$$\psi_{2\lambda+1} = \begin{vmatrix} w_{\mu-\lambda-1} & w_{\mu-\lambda} & \dots & w_\mu \\ w_{\mu-\lambda-2} & w_{\mu-\lambda-1} & \dots & w_{\mu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{\mu-2\lambda-2} & w_{\mu-2\lambda-1} & \dots & w_{\mu-\lambda-1} \end{vmatrix} .$$

[1] Diese Umformung hat mein Sohn Richard ausgeführt.

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen (H′)

$$(9)\qquad \frac{d\phi_k}{dw_{\mu_1-1}} = \frac{1}{w_{\mu_1}}\left(M_{k1}\phi_1 + M_{k2}\phi_2 + \ldots + M_{k\varrho}\phi_\varrho\right). \qquad (k=1,2,\ldots,\varrho)$$

Sind $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varrho$ die Wurzeln der Gleichung

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} M_{11}-\sigma & M_{12} & \ldots & M_{1\varrho} \\ M_{21} & M_{22}-\sigma & \ldots & M_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{\varrho 1} & M_{\varrho 2} & \ldots & M_{\varrho\varrho}-\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

so werden, wenn diese Gleichung nur ungleiche Wurzeln besitzt, die hieraus sich ergebenden Integralgleichungen

$$(\mathrm{J}')\qquad \begin{aligned} \phi_1 e^{-\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}\sigma_1} &= \delta_1, \\ \phi_2 e^{-\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}\sigma_2} &= \delta_2, \\ &\ldots\ldots \\ \phi_\varrho e^{-\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}\sigma_\varrho} &= \delta_\varrho, \end{aligned}$$

wo $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ willkürliche Constanten bedeuten.

Bezeichnen wir die den verschiedenen Werthen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ aus den Gleichungen (H′) entsprechenden Integralgleichungen (J) mit oberen Indices, so ist die Gesammtheit der Integralgleichungen von (H′)

$$(\mathrm{J}_2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\psi_1^{(\mu_1)} = \gamma_1^{(\mu_1)},\ \psi_2^{(\mu_1)} = \gamma_2^{(\mu_1)}, \ldots, \psi_{\mu_1-2}^{(\mu_1)} = \gamma_{\mu_1-2}^{(\mu_1)} \\ &\psi_1^{(\mu_2)} = \gamma_1^{(\mu_2)},\ \psi_2^{(\mu_2)} = \gamma_2^{(\mu_2)}; \ldots; \psi_{\mu_2-2}^{(\mu_2)} = \gamma_{\mu_2-2}^{(\mu_2)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\phi_1 e^{-\sigma_1\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}} = \delta_1,\ \phi_2 e^{-\sigma_2\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}} = \delta_2, \ldots, \phi_\varrho e^{-\sigma_\varrho\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}} = \delta_\varrho. \end{aligned} \right.$$

I. Die allgemeine Lösung des Systems der partiellen Differentialgleichungen (H) ist demnach:

$$(\mathrm{K})\qquad \phi_k = e^{\sigma_k\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}} f_k\left(\psi_1^{(\mu_1)}, \psi_2^{(\mu_1)}, \ldots, \psi_{\mu_1-2}^{(\mu_1)};\ \psi_1^{(\mu_2)}, \psi_2^{(\mu_2)}, \ldots, \psi_{\mu_2-2}^{(\mu_2)}; \ldots\right), \qquad (k=1,2,\ldots,\varrho)$$

wo f_k willkürliche Functionen der Argumente bezeichnen.

Diese Argumente sind algebraische Functionen der in das Differentialgleichungssystem (H) eintretenden Grössen $w_1, w_2, \ldots$.

Sollen demnach die ϕ_k algebraische Functionen von $w_1, w_2, \ldots$ sein, so müssen die f_k selber algebraische Functionen ihrer Argumente und die $e^{\sigma_k\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}}$ von $\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}$ unabhängig werden. Es muss demnach

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_\varrho = 0$$

sein. Daher muss

$$(\mathrm{K}_1)\quad \phi_k = f_k\left(\psi_1^{(\mu_1)}, \psi_2^{(\mu_1)}, \ldots, \psi_{\mu_1-2}^{(\mu_1)};\ \psi_1^{(\mu_2)}, \psi_2^{(\mu_2)}, \ldots, \psi_{\mu_2-2}^{(\mu_2)};\ \ldots\right)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \rho)$$

sein, wo f_k die allgemeinste derartige algebraische Zusammensetzung seiner Argumente bedeutet, für welche ϕ_k eine ganze homogene Function von $w_1, w_2, \ldots$ wird.

Ein ähnlicher Schluss ergiebt sich für den Fall, dass die Gleichung (10) gleiche Wurzeln hat.

Hieraus ziehen wir den Schluss:

Wenn die ϕ_k nicht durch die Gleichungen (K_1) bedingte Gestalten haben, so kann in keiner der zu den Gruppen (C) gehörigen Integrale eine Potenz von t auftreten. Dieses Resultat besagt:

II. Wenn zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems $w_1, w_2, \ldots, w_n$ von Lösungen der Gleichung (A) ein System (G) homogener Relationen mit constanten Coefficienten stattfindet, und es haben die Functionen ϕ_k **nicht** eine der durch die Gleichungen (K_1) dargestellten Formen, so werden die Elemente des jedem beliebigen Umlaufe U zugehörigen canonischen Fundamentalsystems in sich selbst multiplicirt mit je einer Constanten (einer Wurzel der Fundamentalgleichung) übergehen.

5.

Wir setzen jetzt voraus, dass ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A) einer homogenen Relation

$$(\mathrm{L})\qquad \phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

mit constanten Coefficienten von der Beschaffenheit genügt, dass

$$\phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$$

für willkürliche Werthe dieser Argumente durch die Substitutionen der Gruppe der Differentialgleichung in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergeht.

In meiner Arbeit (Acta Math. Bd. 1, S. 323–326) habe ich für den Fall $n = 3$ gezeigt, dass die Anzahl der Werthe von z, für welche $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ gleichzeitig denselben Werth annehmen können, eine endliche ist, wenn nicht die sämmtlichen Invarianten der Differentialgleichung verschwinden (was darauf hinauskommt, dass der Grad von ϕ der zweite ist).

Nach denselben Principien lässt sich allgemein[1] für eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der Satz beweisen, dass die Anzahl der Werthe der unabhängigen Variablen z, für welche sämmtliche Quotienten $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}$ denselben Werth annehmen können, eine endliche ist, wenn nicht die sämmtlichen Invarianten der Differentialgleichung verschwinden oder die Covarianten der Form ϕ gewisse Besonderheiten darbieten.

Sei

$$u = A_0 y + A_1 y' + \ldots + A_{n-1} y^{(n-1)}, \tag{M}$$

wo $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ willkürlich angenommene rationale Functionen von z sind, und es werde

$$u_k = A_0 y_k + A_1 y_k' + \ldots + A_{n-1} y_k^{(n-1)} \tag{1}$$

gesetzt, so wird $\phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ die Eigenschaft haben, nach jedem Umlaufe der Variablen z in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt überzugehen, da $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dieselbe Substitutionsgruppe wie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ besitzen. Für willkürliche Functionen A_λ kann aber $\phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ nicht identisch verschwinden, da für einen willkürlichen Werth von z die Werthe $u_1, u_2, \ldots, u_n$ willkürlich bestimmt werden können, $\phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ aber nicht für beliebige Werthe der Argumente verschwindet.

Sei daher

$$\phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \chi(z), \tag{N}$$

so ist $\chi(z)$ eine nicht identisch verschwindende Function von z, deren logarithmische Ableitung rational ist, wenn wir voraussetzen, dass die Differentialgleichung (A) zu der Classe gehört, deren Lösungen überall bestimmt sind.

Setzen wir

$$\frac{u_2}{u_1} = \eta_1, \quad \frac{u_3}{u_1} = \eta_2, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{u_1} = \eta_{n-1}, \tag{2}$$

so folgt aus (N)

$$u_1^n \cdot \psi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}) = \chi(z). \tag{3}$$

Für zwei Werthe z und z_1, für welche $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ denselben Werth erhalten, folgt dann

$$\frac{u_1(z)^n}{\chi(z)} = \frac{u_1(z_1)^n}{\chi(z_1)}. \tag{4}$$

Hieraus folgt nach den oben angeführten Schlüssen:

[1] Vergl. Ludwig Schlesinger, Inauguraldissertation S. 23 ff., Handbuch II. 1, S. 232.

Die Anzahl der Werthe von z, für welche $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ denselben Werth annehmen können, ist eine endliche, wenn nicht für jede Wahl der rationalen Functionen $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ die sämmtlichen Invarianten der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n u}{dz^n} + q_1 \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \ldots + q_n u = 0,$$

welcher die u Genüge leisten, verschwinden.

Da von den Covarianten der Form $\phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ hier nicht Gebrauch gemacht worden ist, so kommen die durch das besondere Verhalten der Covarianten entstehenden Ausnahmen in Wegfall.

6.

Sind $z, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$ diejenigen Werthe von z, für welche jeder der Quotienten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ denselben Werth annimmt, so ist[1]

$$(1) \qquad t = (\alpha - z)(\alpha - z_1)(\alpha - z_2) \ldots (\alpha - z_{\nu-1}) = \phi(z, \alpha)$$

eine rationale Function von z und es entsprechen einem bestimmten willkürlichen Werthe von t genau die Werthe $z, z_1, \ldots, z_{\nu-1}$, für welche jeder der Quotienten denselben Werth annimmt.

Substituiren wir in Gleichung (A)

$$(2) \qquad u = \lambda v, \; t = \phi(z, \alpha),$$

wo

$$\lambda = e^{-\frac{1}{n}\int q_1 dz} \left(\frac{dt}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}(n-1)},$$

so geht die Differentialgleichung (A) über in

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n v}{dt^n} + r_2(t) \frac{d^{n-2} v}{dt^{n-2}} + \ldots + r_n(t) v = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von t sind.

I. Diese Differentialgleichung hat die Eigenschaft, dass ihre Integralquotienten mit den Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ übereinstimmen, und dass, wenn t einen willkürlichen Werth der unabhängigen Variablen bedeutet, es nicht noch einen davon verschiedenen Werth t_1 giebt, für welchen jeder der Quotienten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ denselben Werth annehmen kann.

Nach einem von Hrn. Ludwig Schlesinger bewiesenen Satze[2] ist für eine solche Differentialgleichung die Substitutionsgruppe der Quo-

[1] Acta Math. Bd. 1, S. 335 ff. Ludwig Schlesinger, Handbuch II 1, S. 244 ff.

[2] Handbuch II 1, S. 291.

tienten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$, welche der Gesammtheit der Umläufe der unabhängigen Variablen t entspricht, eine discontinuirliche.

Da einem willkürlichen Umlauf der unabhängigen Variablen z ein bestimmter Umlauf der Variablen t entspricht, so lässt sich hiernach diese Eigenschaft auf die Gleichung (A) übertragen.

Wir erhalten also das Resultat:

II. Die Differentialgleichung (A), für welche eine Form $\phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit der durch die Gleichung (N) bestimmten Beschaffenheit existirt, hat die Eigenschaft, dass die den sämmtlichen Umläufen der unabhängigen Variablen z entsprechende Substitutionsgruppe der Quotienten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ eine discontinuirliche ist, wenn nicht für jede Wahl $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ die sämmtlichen Invarianten der Gleichung (A) verschwinden.

7.

Sei jetzt $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein einem gewissen Umlaufe U_0 der unabhängigen Variablen z zugehöriges Fundamentalsystem die Gleichung (A) in der kanonischen Form und so beschaffen, dass

$$(1)\qquad \begin{aligned} \bar{y}_1 &= \omega_1 y_1, \\ \bar{y}_2 &= \omega_2 y_2, \\ &\cdots\cdots \\ \bar{y}_n &= \omega_n y_n, \end{aligned}$$

wo $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die Wurzeln der dem Umlaufe U_0 zugehörigen Fundamentalgleichung bedeuten.

Sei wieder, wie in Gleichung (M)

$$(2)\qquad u = A_0 y + A_1 y' + \ldots + A_{n-1} y^{(n-1)},$$

wo die rationalen Functionen $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ so gewählt seien, dass für einen willkürlich angenommenen Werth $z = z_0$

$$(3)\qquad u_1 = A_0 y_1 + A_1 y_1' + \ldots + A_{n-1} y_1^{(n-1)}$$

verschwindet, wobei wir voraussetzen, dass der Modul von ω_1 von keinem der Moduln der übrigen Grössen $\omega_2, \ldots, \omega_n$ übertroffen wird.

Durch eine k-malige Wiederholung des Umlaufes U_0 gehen

$$(4)\qquad \eta_1 = \frac{u_2}{u_1}, \eta_2 = \frac{u_3}{u_1}, \ldots, \eta_n = \frac{u_n}{u_1}$$

über in

$$(5)\qquad (\eta_1)_k = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^k \eta_1, (\eta_2)_k = \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^k \eta_2, \ldots, (\eta_n)_k = \left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^k \eta_n.$$

Wenn die Moduln von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ nicht sämmtlich gleich sind, so würde die k-malige Wiederholung des zu U_0 inversen Umlaufes U_0^{-1} mit wachsenden Werthen von k unzählig viele dem Unendlichen zustrebende Werthe ergeben: da aber $\eta_1 = \infty, \eta_2 = \infty, \ldots, \eta_{n-1} = \infty$ für $z = z_0$ dem Werthbereiche $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1})$ angehören, so würde hiernach die Gruppe der Substitutionen der $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ nicht discontinuirlich sein.

Dasselbe würde sich auch ergeben, wenn zwar

$$\operatorname{Mod}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 1, \operatorname{Mod}\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) = 1, \ldots, \operatorname{Mod}\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right) = 1$$

wäre, aber die Argumente der Quotienten $\dfrac{\omega_x}{\omega_1}$ nicht rationale Zahlen wären.

Wenn aber eine Gleichung der Form (N) existirt, so ist nach Satz II voriger Nummer eine solche Annahme nicht zulässig. Wir erhalten also das Resultat:

Ist $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein einem gewissen Umlaufe U_0 der unabhängigen Variablen z zugehöriges Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A) in der kanonischen Form und so beschaffen, dass die Gleichungen (1) stattfinden, und sind die Voraussetzungen des Satzes II voriger Nummer erfüllt, so sind die Quotienten $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \dfrac{\omega_3}{\omega_1}, \ldots, \dfrac{\omega_n}{\omega_1}$ Einheitswurzeln.

Wenn wir voraussetzen, dass in Gleichung (A)

$$p_1 = 0, \tag{6}$$

so genügen die Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ überdies der Gleichung

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \ldots \omega_n = 1 .$$

Alsdann sind die sämmtlichen Grössen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

selber Einheitswurzeln.

(Fortsetzung folgt.)

Ausgegeben am 17. Januar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.