Leo Koenigsberger

Die Principien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable

In:
Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. –
Berlin: Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften (in Commission bei Georg Reimer)
Jahrgang 1901 : Zweiter Halbband (Juli bis December)
S. 1092-1111

Persistent Identifier: urn:nbn:de:kobv:b4-opus4-41217

Die Principien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable.

Von Leo Koenigsberger.

(Auszug aus der in der Sitzung am 17. October vorgelegten Abhandlung.)

Die vorliegende Mittheilung schliesst sich unmittelbar an die von mir seit einigen Jahren fortgesetzten Untersuchungen über die Ausdehnung der als Principien der Mechanik bekannten mathematischen Theoreme, welche ich der Akademie vorzulegen die Ehre hatte und die vor Kurzem im Zusammenhange in meinen »Principien der Mechanik« veröffentlicht wurden. Während nun bisher meine Untersuchungen auf die Gestaltung der Sätze der Mechanik wägbarer Massen nicht nur für den Fall gerichtet waren, dass im kinetischen Potential im gewöhnlichen Sinne eine Trennung der actuellen und potentiellen Energie nicht möglich ist, sondern auch kinetische Potentiale beliebig hoher Ordnung zu Grunde gelegt und für diese die Ausdehnung der wesentlichsten Sätze der Mechanik wägbarer Massen und der Theorie des Newton'schen Potentials entwickelt wurden, lasse ich nunmehr die Annahme nur einer unabhängigen Variabeln, der Zeit, fallen und werfe die weit schwierigere Frage auf nach der Gestaltung der Mechanik, in rein mathematischem Sinne unbekümmert um die Anwendungen auf Physik, für den Fall, dass das kinetische Potential beliebig viele unabhängige und abhängige Variable und deren partielle Ableitungen bis zu irgend welcher Ordnung hin enthält.

Ich werde mich in der folgenden Mittheilung, um zunächst nur den Gang der Untersuchung zu skizziren, auf eine kurze Angabe der Resultate für beliebige kinetische Potentiale erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln beschränken: die angewandten Methoden werden aber die Möglichkeit der Ausdehnung auf den allgemeinsten Fall unmittelbar erkennen lassen, wenn die in meinen »Principien der Mechanik« ausführlich dargelegten Gesichtspunkte in Verwendung kommen; die genauere Ausführung der Beweise der hier mitgetheilten Sätze soll in Kurzem im Journal für Mathematik veröffentlicht werden.

§ 1.

Hülfsätze.

Zur Durchführung der oben angedeuteten Untersuchungen war zunächst die Aufstellung der nachfolgenden vier Hülfsätze erforderlich:

Hülfsatz 1.

Seien $t_1, t_2, \ldots t_\varkappa$ unabhängige, $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ von diesen abhängige Variable, und werde

$$\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\varkappa} p_\alpha}{\partial t_1^{\nu_1} \partial t_2^{\nu_2} \ldots \partial t_\varkappa^{\nu_\varkappa}} \text{ mit } p_\alpha^{(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\varkappa)}$$

bezeichnet, so gelten für jede Function

$$R = f(t_1, t_2, \ldots t_\varkappa, p_1 \ldots p_1^{(\nu_{11} \nu_{12} \ldots \nu_{1\varkappa})}, \ldots p_\mu, \ldots p_\mu^{(\nu_{\mu 1} \nu_{\mu 2} \ldots \nu_{\mu\varkappa})}, \ldots)$$

zwischen den Differentialquotienten von R, wenn sie erst nach $t_1, t_2, \ldots t_\varkappa$ und dann nach den p und deren Ableitungen oder erst nach den p und deren Ableitungen und dann nach den t genommen werden, Beziehungen, von denen nur die nachfolgenden, später angewandten hervorgehoben werden mögen:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial}{\partial p_\varepsilon}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right) = \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(10 0\ldots 0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right) = \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(100\ldots 0)}}\right) + m_1 \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1-1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)$$

$$\text{III.} \quad \frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(010\ldots 0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right) = \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(010\ldots 0)}}\right) + m_2 \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2-1} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)$$

$$\text{IV.} \quad \frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(200\ldots 0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right) = \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(200\ldots 0)}}\right)$$
$$+ m_1 \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1-1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(100\ldots 0)}}\right) + \frac{m_1(m_1-1)}{1\cdot 2} \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-2}}{\partial t_1^{m_1-2} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)$$

$$\text{V.} \quad \frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(020\ldots 0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right) = \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(020\ldots 0)}}\right)$$
$$+ m_2 \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2-1} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(010\ldots 0)}}\right) + \frac{m_2(m_2-1)}{1\cdot 2} \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-2}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2-2} \ldots \partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)$$

$$\text{VI.}\quad \frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(110\ldots 0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa}R}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right)=\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(110\ldots 0)}}\right)$$
$$+m_1\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1-1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(010\ldots 0)}}\right)+m_2\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2-1}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(100\ldots 0)}}\right)$$
$$+m_1 m_2\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_\varkappa-2}}{\partial t_1^{m_1-1}\partial t_2^{m_2-1}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right).$$

Hülfsatz 2.

Sind $R_1, R_2, \ldots$ Functionen von $t_1, t_2, \ldots t_\varkappa, p_1, p_2, \ldots p_\mu$, und V eine Function von $t_1, t_2, \ldots t_\varkappa, R_1 \ldots R_1^{(\nu_{11}\nu_{12}\ldots\nu_{1\varkappa})}, \ldots R_2, \ldots R_2^{(\nu_{21}\nu_{22}\ldots\nu_{2\varkappa})}, \ldots$ so ergiebt sich mit Hülfe der Variation des über ein bestimmtes t-Gebiet ausgedehnten $\varkappa$-fachen Integrales von V zwischen den nach den unabhängigen Variabeln genommenen totalen Differentialquotienten der partiellen Ableitungen der Grösse V, als Function der R oder der p aufgefasst, die folgende Beziehung:

$$\sum_{\nu_{\lambda 1},\nu_{\lambda 2},\ldots\nu_{\lambda\varkappa}}(-1)^{\nu_{\lambda 1}+\nu_{\lambda 2}+\ldots+\nu_{\lambda\varkappa}}\frac{d^{\nu_{\lambda 1}+\nu_{\lambda 2}+\ldots+\nu_{\lambda\varkappa}}}{dt_1^{\nu_{\lambda 1}}dt_2^{\nu_{\lambda 2}}\ldots dt_\varkappa^{\nu_{\lambda\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\nu_{\lambda 1}\nu_{\lambda 2}\ldots\nu_{\lambda\varkappa})}}\right)$$
$$=\sum_{\alpha=1,2,\ldots}\ \sum_{\nu_{\alpha 1},\nu_{\alpha 2},\ldots\nu_{\alpha\varkappa}}(-1)^{\nu_{\alpha 1}+\nu_{\alpha 2}+\ldots+\nu_{\alpha\varkappa}}\frac{d^{\nu_{\alpha 1}+\nu_{\alpha 2}+\ldots+\nu_{\alpha\varkappa}}}{dt_1^{\nu_{\alpha 1}}dt_2^{\nu_{\alpha 2}}\ldots dt_\varkappa^{\nu_{\alpha\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial R_\alpha^{(\nu_{\alpha 1}\nu_{\alpha 2}\ldots\nu_{\alpha\varkappa})}}\right)\frac{\partial R_\alpha}{\partial p_\lambda}.$$

Hülfsatz 3.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function

$$f(t_1, t_2, \ldots t_\varkappa, p_1, \ldots p_\mu \ldots p_\alpha^{(10\ldots 0)}, p_\alpha^{(01\ldots 0)}, \ldots p_\alpha^{(00\ldots 1)}, \ldots)$$

sich als eine Summe von totalen nach $t_1, t_2, \ldots t_\varkappa$ genommenen Differentialquotienten von Functionen der t, p und deren ersten partiellen Differentialquotienten in der Form darstellen lässt

$$f=\frac{dK_1}{dt_1}+\frac{dK_2}{dt_2}+\ldots+\frac{dK_\varkappa}{dt_\varkappa}+F(t_1, t_2, \ldots t_\varkappa),$$

worin also $K_1, K_2, \ldots K_\varkappa$ nur von den in f vorkommenden Grössen abhängen, ist die, dass f der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial p_s}-\frac{d}{dt_1}\frac{\partial f}{\partial p_s^{(10\ldots 0)}}-\frac{d}{dt_2}\frac{\partial f}{\partial p_s^{(01\ldots 0)}}-\ldots-\frac{d}{dt_\varkappa}\frac{\partial f}{\partial p_s^{(00\ldots 1)}}=0$$

für $s=1, 2, \ldots \mu$ identisch Genüge leistet,

und ebenso folgt leicht, um nur den Fall einer Function von zwei unabhängigen Variabeln und zweiter Ordnung hervorzuheben, dass mit Benutzung bekannter Bezeichnungen die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function $f(x, y, z, p, q, r, s, t)$ in der Form darstellbar ist

$$f = \frac{d\omega_1(x, y, z, p, q, r, s, t)}{dx} + \frac{d\omega_2(x, y, z, p, q, r, s, t)}{dy} + F(x, y),$$

die ist, dass f der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{d^2}{dx\,dy}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

identisch genügt.

Hülfsatz 4.

Um unter sogleich näher anzugebenden Bedingungen den Existenzbeweis eines kinetischen Potentials von beliebig vielen unabhängigen und abhängigen Variabeln zu führen, leitet man mit Hülfe ähnlicher Variationsbetrachtungen, wie sie für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung, aber von einer unabhängigen Variabeln in meinen »Principien der Mechanik« durchgeführt worden, den für die späteren Anwendungen ausreichenden Satz her, dass

die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass μ Functionen $N_1, N_2, \dots N_\mu$ von $t, u, p_1, p_2, \dots p_\mu$ und deren Ableitungen existiren, welche durch ein und dieselbe Function M von $t, u, p_1, p_2, \dots p_\mu, p_1^{(10)}, p_2^{(10)}, \dots p_\mu^{(10)}, p_1^{(01)}, p_2^{(01)}, p_\mu^{(01)}$ sich in der Form ausdrücken lassen

$$N_\varkappa = \frac{\partial M}{\partial p_\varkappa} - \frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial M}{\partial p_\varkappa^{(01)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots \mu),$$

die sind, dass N in den zweiten partiellen Ableitungen der p linear ist und die Beziehungen

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(20)}} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(20)}},\ \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(02)}} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(02)}},\ \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(11)}}$$

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(10)}} - 2\frac{d}{dt}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(20)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} = -\frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(10)}}$$

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(01)}} - 2\frac{d}{du}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(02)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} = -\frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(01)}}$$

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(01)}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(20)}} + \frac{d^2}{dt\,du}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} + \frac{d^2}{du^2}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(02)}} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa}$$

identisch befriedigt, und zwar giebt es dann unendlich viele Functionalwerthe für das kinetische Potential M, die sich aber sämmtlich, von Functionen der unabhängigen Variabeln t und u abgesehen, nur um nach t und u genommene Differentialquotienten beliebiger Functionen von $t, u, p_\varkappa, p_\varkappa^{(10)}, p_\varkappa^{(01)}$ unterscheiden.

§ 2.

Das erweiterte Hamilton'sche und d'Alembert'sche Princip, und die erste und zweite Form der erweiterten Lagrange-schen Gleichungen.

Seien t und u von einander unabhängige, $x_1, x_2, \ldots x_n$ von diesen abhängige Grössen, und nehmen wir an, dass die Veränderungen dieser Grössen, die selbst noch gewissen Beschränkungen unterworfen sein können, derart vor sich gehen, dass, wenn H eine bestimmte von $t, u, x_i, x_i^{(10)}, x_i^{(01)}$ abhängige Function bedeutet, die wir das kinetische Potential[1] nennen wollen,

$$(1) \qquad \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}\left(H - \sum_1^n{}_i X_i x_i\right) du dt = 0$$

ist, worin durch die Grenzen ein gewisses (t, u)-Gebiet definirt ist, und die Variationen der $x_1, x_2, \ldots x_n$ an den Grenzen dieses Gebietes verschwinden sollen, während die X_i gegebene Functionen von t und u ausdrücken mögen, deren Bedeutung nachher festgestellt wird, so werden die Gleichungen, denen die Veränderungen der $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen von t und u unterworfen sind, durch

$$(2) \qquad \sum_1^n{}_i \left\{\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} - X_i\right\}\delta x_i = 0$$

gegeben sein, worin die Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_n$ durch die in den virtuellen Veränderungen linearen Bedingungsgleichungen

$$(3) \qquad \sum_1^n{}_i f_{1i}\delta x_i = 0, \sum_1^n{}_i f_{2i}\delta x_i = 0, \ldots \sum_1^n{}_i f_{mi}\delta x_i = 0$$

mit einander verbunden sein sollen, in denen die Functionen $f_{\varkappa i}$ von t, $u, x_1, x_2, \ldots x_n$, aber nicht von den partiellen Ableitungen dieser Grössen abhängen, und deren Integrabilität oder Nicht-Integrabilität die holo-

[1] Die Annahme von nur zwei unabhängigen Variabeln soll lediglich der Kürze der Darstellung halber gemacht werden, und die Beschränkung des kinetischen Potentials, nur partielle Ableitungen erster Ordnung zu enthalten, wird genau durch dieselben Betrachtungen aufgehoben, und die Untersuchung auf solche beliebig hoher Ordnung erweitert, wie sie für kinetische Potentiale, welche nur von einer unabhängigen Variabeln abhängen, in meinem Buche »Die Principien der Mechanik« durchgeführt wurden. Fasst man $x_1, x_2, \ldots x_n$ als physikalische Grössen auf, so wird man sich z. B. unter den unabhängigen Variabeln die Zeit und die von dieser unabhängigen Raumgrössen denken können.

nomen oder nicht holonomen Systeme charakterisirt: die Gleichungen (1) und (2) stellen das verallgemeinerte HAMILTON'sche und D'ALEMBERT'sche Princip dar.

Durch Multiplication der Gleichungen (2) mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ erhalten wir die erste LAGRANGE'sche Form der Veränderungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} = X_i + \lambda_1 f_{1i} + \lambda_2 f_{2i} + \ldots + \lambda_m f_{mi} \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{4}$$

also n partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die in Bezug auf die zweiten Differentialquotienten linear sind.

Ist das System ein holonomes, sind also die Bedingungsgleichungen in der Form

$$F_1(t, u, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, F_2(t, u, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots F_m(t, u, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \tag{5}$$

gegeben, so erhält man in (4) und (5) $n+m$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+m$ Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ als Functionen von t und u, wobei für $t = 0$ im Allgemeinen die Werthe von $n-m$ der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und deren nach t genommenen partiellen Differentialquotienten als willkürliche Functionen von u in der Form

$$(x_i)_{t=0} = \phi_i(u), \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi_i(u)$$

gegeben werden können.

Ist dagegen das System nicht holonom, und enthalten die Functionen $f_{\varkappa i}$ die unabhängigen Variabeln t und u nicht explicite, so werden aus bekannten Gründen die Beziehungen gelten

$$\sum_1^n {}_i f_{1i} x_i^{(10)} = 0, \ldots \sum_1^n {}_i f_{mi} x_i^{(10)} = 0, \sum_1^n {}_i f_{1i} x_i^{(01)} = 0, \ldots \sum_1^n {}_i f_{mi} x_i^{(01)} = 0, \tag{6}$$

und somit durch (4) und (6) $n+2m$ partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung der $n+m$ Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ gegeben sein, so dass Bedingungen für das Zusammenbestehen der Gleichungen oder für die Auflösbarkeit des Problems erfüllt sein müssen; für den Fall, dass das nicht holonome System in den Coefficienten seiner Bedingungsgleichungen die Grössen t und u explicite enthält, muss die Behandlung des Problems in jedem einzelnen Falle den Bedingungen der Aufgabe angepasst werden.

Nehmen wir weiter an, dass die Bedingungsgleichungen (5) auch die partiellen Ableitungen erster Ordnung der x_i nach t und u genommen enthalten, dass diese also lauten

$$F_1(t, u, x_i, x_i^{(10)}, x_i^{(01)}) = 0, \ldots F_m(t, u, x_i, x_i^{(10)}, x_i^{(01)}) = 0, \tag{7}$$

in welchem Falle das System auch noch holonom genannt werden soll, so werden sich auf Grund von Betrachtungen, wie ich sie in den »Principien etc.« angestellt, die n partiellen Differentialgleichungen ergeben

$$(8)\quad \frac{\partial H}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}}=X_i+\sum_1^m{}_r\lambda_r\left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F_r}{\partial x_i^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial F_r}{\partial x_i^{(01)}}\right)\ (i=1,2,\ldots n),$$

welche mit den Gleichungen (7) ein simultanes System von $n+m$ partiellen Differentialgleichungen in den $n+m$ Grössen x_i und λ_r bilden, und ist das System der auch die Ableitungen der x_i enthaltenden Bedingungsgleichungen ein nicht holonomes, haben diese also die Form

$$(9)\quad \sum_1^n{}_i(f_{1i}\,\delta x_i+\phi_{1i}\,\delta x_i^{(10)}+\psi_{1i}\,\delta x_i^{(01)})=0,\ \ldots \sum_1^n{}_i(f_{mi}\,\delta x_i+\phi_{mi}\,\delta x_i^{(10)}+\psi_{mi}\,\delta x_i^{(01)})=0.$$

worin die Coefficienten der Variationen Functionen von $t, u, x_i, x_i^{(10)}, x_i^{(01)}$ sind, so wird sich zunächst das System der Differentialgleichungen ergeben

$$(10)\quad \frac{\partial H}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}}=X_i+\sum_1^m{}_r\lambda_r\left(f_{ri}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\phi_{ri}}{\partial x_i^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial\psi_{ri}}{\partial x_i^{(01)}}\right)\quad (i=1,2,\ldots n);$$

enthalten nun die Bedingungsgleichungen (9) t und u nicht explicite, so liefern diese $2m$ partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(11)\ \sum_1^n{}_i(f_{ri}x_i^{(10)}+\phi_{ri}x_i^{(20)}+\psi_{ri}x_i^{(11)})=0,\ \sum_1^n{}_i(f_{ri}x_i^{(01)}+\phi_{ri}x_i^{(11)}+\psi_{ri}x_i^{(02)})=0\ (r=1,2,\ldots m),$$

welche mit den n partiellen Differentialgleichungen (10) zusammen wiederum $n+2m$ Differentialgleichungen zur Bestimmung der $n+m$ Grössen x_i und λ_r bilden, so dass im Allgemeinen wieder Bedingungen für das Zusammenbestehen der Differentialgleichungen oder für die Auflösbarkeit des Problems erfüllt sein müssen. Für den Fall jedoch, dass die Gleichungen (9) nicht von t und u frei sind, müssen die Methoden zur Behandlung des Problems den Bedingungen der Aufgabe angepasst werden.

Überlegungen, wie sie in der Mechanik wägbarer Massen angestellt werden, führen zur Zerlegung des kinetischen Potentials H in die actuelle Energie $-T$ und die potentielle Energie $-U$ und liefern als Maass der Kraft den Ausdruck

$$-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x^{(10)}}+\frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x^{(01)}},$$

während die auf x_i wirkende innere Kraft durch

$$V_i=\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial x_i^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial U}{\partial x_i^{(01)}}$$

dargestellt wird. Der Hülfsatz 4. führt dann zu Anziehungskräften, welche von der Entfernung und den partiellen Ableitungen derselben nach t und u abhängen, und zur Verallgemeinerung der Weber'schen Kraft in der Form

$$R = -\frac{mm_1}{r^2} + \frac{mm_1}{r}\left(\frac{r^{(10)2}}{\varkappa_1^2} + \frac{r^{(01)2}}{\varkappa_0^2} + \frac{r^{(10)}r^{(01)}}{\varkappa^2}\right) - \frac{2mm_1}{r}\left(\frac{r^{(20)}}{\varkappa_1^2} + \frac{r^{(02)}}{\varkappa_0^2} + \frac{r^{(11)}}{\varkappa^2}\right),$$

worin m, m_1, $\varkappa$, $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ Constanten bedeuten, und für welche die Kräftefunction durch

$$W = \frac{mm_1}{r}\left(1 + \frac{r^{(10)2}}{\varkappa_1^2} + \frac{r^{(01)2}}{\varkappa_0^2} + \frac{r^{(10)}r^{(01)}}{\varkappa^2}\right)$$

dargestellt ist. Wählt man in Analogie zur Mechanik wägbarer Massen aus später ersichtlichen Gründen in Rücksicht auf das Energieprincip für die lebendige Kraft T bei einer abhängigen Variabeln die Form

$$T = \frac{\alpha}{2}(x^{(10)} + x^{(01)})^2,$$

also allgemein

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i\, \alpha_i (x_i^{(10)} + x_i^{(01)})^2,$$

so wird das Maass der Kraft durch

$$X = \alpha(x^{(20)} + 2x^{(11)} + x^{(02)})$$

dargestellt sein.

Endlich ergiebt sich vermöge des Hülfsatzes 2., wenn $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ Grössen bedeuten, durch welche $x_1, x_2, \ldots x_n$ so ausgedrückt werden können, dass den Zwangsbedingungen

$$F_1(t, u, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots F_m(t, u, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

identisch genügt wird, und

$$\sum_1^n {}_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial p_s} = P_s$$

gesetzt wird, die zweite Form der erweiterten Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = P_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu),$$

und als zugehörige Form des Hamilton'schen Integralprincips

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}\left(H - \sum_1^\mu {}_s P_s p_s\right) du dt = 0,$$

wenn die Variationen der Grössen $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ an den Grenzen des (t, u)-Gebietes verschwinden, und P_s als Function von t und u gegeben ist.

§ 3.

Das erweiterte Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Gehen wir von den Gleichungen

$$(1)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = P_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu)$$

aus, so ergeben sich zunächst die beiden Beziehungen

$$\sum_s p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \sum_s p_s^{(10)}\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \sum_s p_s^{(10)}\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \sum_s P_s p_s^{(10)},$$

$$\sum_s p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \sum_s p_s^{(01)}\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \sum_s p_s^{(01)}\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \sum_s P_s p_s^{(01)},$$

welche, wenn H die unabhängigen Variabeln t und u nicht explicite enthält, wie leicht zu sehen, in

$$(2)\qquad \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt}\sum_s p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\sum_s p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \sum_s P_s p_s^{(10)}$$

$$(3)\qquad \frac{dH}{du} - \frac{d}{dt}\sum_s p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\sum_s p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \sum_s P_s p_s^{(01)}$$

übergehen, aus denen durch Multiplication mit dt und du und Addition

$$(4)\qquad dH - \left\{\left[\frac{d}{dt}\sum_s p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} + \frac{d}{du}\sum_s p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\right]dt + \left[\frac{d}{dt}\sum_s p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} + \frac{d}{du}\sum_s p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\right]du\right\} = \sum_s P_s dp_s$$

folgt, eine Gleichung, aus der nicht, wie aus der analogen für eine unabhängige Variable, ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1) hergeleitet werden kann.

Nun findet man aber leicht, um hier nur das Resultat der Untersuchung hervorzuheben, dass, wenn das nur von einer Variabeln p abhängige kinetische Potential H die unabhängigen Variabeln t und u nicht explicite enthält und identisch der Gleichung genügt

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)2}}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)2}} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}}\right)^2 = 0$$

oder was dasselbe ist

$$(6)\qquad \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} = \phi\left(\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}}, p\right),$$

worin ϕ eine willkürliche Function bedeutet, jedes Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(7)\qquad H - p^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - p^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = \int P dp + h,$$

worin h eine beliebige Constante und P eine Function von p bedeutet, und die das Energieprincip ausdrücken soll, wenn nicht zugleich

$$(8)\quad p^{(10)}\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}}+p^{(01)}\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}}=0 \text{ oder } p^{(10)}\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}}+p^{(01)}\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}}=0$$

ist, auch die erweiterte Lagrange'sche partielle Differentialgleichung

$$(9)\qquad \frac{\partial H}{\partial p}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}}=P$$

befriedigt; soll ferner umgekehrt ein Integral von (9) dem Energieprincip (7) genügen, so müssen die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}}(p^{(10)}p^{(02)}-p^{(01)}p^{(11)})=\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}}(p^{(01)}p^{(20)}-p^{(10)}p^{(11)})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}}(p^{(01)}p^{(20)}-p^{(10)}p^{(11)})=\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}}(p^{(10)}p^{(02)}-p^{(01)}p^{(11)}),$$

also jedenfalls wieder die Bedingung (5) erfüllt sein, und es ergiebt sich somit,

dass unter der Bedingung (5) und nur unter dieser unendlich viele Integrale der Lagrange'schen Gleichung (9) dem Princip der Energie (7) genügen, und alle, die diesem genügen, auch die Lagrange'sche Gleichung befriedigen, dass jedoch nicht, wie es für kinetische Potentiale mit einer unabhängigen Variabeln im Sinne der Mechanik wägbarer Massen der Fall ist, alle Integrale der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen dem Energieprincip unterliegen.[1]

Für den dem freien und unfreien Systeme in der Mechanik wägbarer Massen entsprechenden Fall, in welchem das kinetische Potential H in den Grössen p, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ homogen vom zweiten Grade ist mit constanten oder von p abhängigen Coefficienten, also die Form hat

$$H=f_{10}(p)\,p^{(10)^2}+f_{11}(p)\,p^{(10)}p^{(01)}+f_{01}(p)\,p^{(01)^2}+f(p),$$

erfordert also die Existenz des Energieprincips die Beziehung

$$f_{11}(p)^2=4f_{10}(p)f_{01}(p),$$

und es nimmt somit für die Form des kinetischen Potentials

$$H=\left(\sqrt{f_{10}(p)}\,p^{(10)}+\sqrt{f_{01}(p)}\,p^{(01)}\right)^2+f(p),$$

worin der erste Theil nach dem Früheren als die lebendige Kraft aufzufassen ist, das Energieprincip die Gestalt an

$$-\left(\sqrt{f_{10}(p)}\,p^{(10)}+\sqrt{f_{01}(p)}\,p^{(01)}\right)^2+f(p)=h.$$

[1] Vergl. die Ergänzung hierzu in § 9.

Wenn in Analogie zur Mechanik wägbarer Massen, wie oben hervorgehoben worden, der lebendigen Kraft für eine freie abhängige Variable x die Form gegeben wird

$$T = \frac{\alpha}{2}(x^{(10)} + x^{(01)})^2,$$

also

$$H = -\frac{\alpha}{2}(x^{(10)} + x^{(01)})^2 + f(x)$$

ist, so sieht man leicht, dass das durch die Beziehung

$$\frac{\alpha}{2}(x^{(10)} + x^{(01)})^2 + f(x) = \omega(t-u),$$

worin ω eine willkürliche Function bedeutet, dargestellte Energieprincip ein Zwischenintegral der Lagrange'schen Gleichung ist.

Durch ähnliche Schlüsse finden wir

als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass für das durch die beiden Lagrange'schen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} = P_1,\quad \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}} = P_2$$

beschriebene Problem, worin das von p_1, p_2, $p_1^{(10)}$, $p_1^{(01)}$, $p_2^{(10)}$, $p_2^{(01)}$ abhängige kinetische Potential H die unabhängigen Variabeln t und u nicht explicite enthält, und die von p_1 und p_2 abhängigen äusseren Kräfte P_1 und P_2 der Beschränkung unterliegen

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_2} = \frac{\partial P_2}{\partial p_1},$$

das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft in der Form existirt

$$H - \left(p_1^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} + p_2^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}}\right) - \left(p_1^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} + p_2^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}}\right) = \int (P_1\,dp_1 + P_2\,dp_2) + h$$

— und es ist dies die einzig mögliche Form —, die identisch zu befriedigenden Beziehungen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_1},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2^{(01)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1^{(01)}},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)2}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)2}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_1^{(01)}}\right)^2,\quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)2}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)2}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_2^{(01)}}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_2^{(01)}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2^{(10)}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2^{(01)}}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)2}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)2}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)2}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)2}},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)2}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_2^{(01)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)2}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2^{(10)}}.$$

Es nimmt somit für den dem freien Systeme in der Mechanik wägbarer Massen entsprechenden Fall, in welchem das kinetische Potential H die Form hat

$$H = A(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})^2 + B(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)})^2 + C(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)}) + f(p_1 \cdot p_2).$$

worin A, B, C, α, β willkürliche Constanten bedeuten, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft die Gestalt an

$$-A(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})^2 - B(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)})^2 - C(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)}) + f(p_1 \cdot p_2)$$
$$= \int (P_1 dp_1 + P_2 dp_2) + h,$$

und ähnlich für den dem unfreien System in der Mechanik wägbarer Massen analogen Fall.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten für den Fall von mehr als zwei abhängigen Variabeln.

§ 4.

Das erweiterte Princip der kleinsten Wirkung.

Betrachtet man in dem Doppelintegrale

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x, y, z, p, q)\, dy dx,$$

worin $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ist, x und y als Functionen von v und w, so wird, wenn

$$\frac{\partial x}{\partial v} = x^{(10)}, \frac{\partial x}{\partial w} = x^{(01)}, \frac{\partial y}{\partial v} = y^{(10)}, \frac{\partial y}{\partial w} = y^{(01)}, \frac{\partial z}{\partial v} = z^{(10)}, \frac{\partial z}{\partial w} = z^{(01)}$$

und

$$(2) \qquad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v} = D = x^{(10)} y^{(01)} - x^{(01)} y^{(10)}.$$

$$(3) \quad Df\left(x, y, z, \frac{z^{(10)} y^{(01)} - z^{(01)} y^{(01)}}{D}, \frac{z^{(01)} x^{(10)} - z^{(10)} x^{(01)}}{D}\right)$$
$$= F(x, y, z, x^{(10)}, x^{(01)}, y^{(10)}, y^{(01)}, z^{(10)}, z^{(01)})$$

gesetzt wird, das vorgelegte Doppelintegral für die Transformation des (x, y)-Gebietes in das (v, w)-Gebiet in

$$(4) \qquad J = \int_{v_0}^{v_1}\int_{w_0}^{w_1} F(x, y, z, x^{(10)}, x^{(01)}, y^{(10)}, y^{(01)}, z^{(10)}, z^{(01)})\, dw dv$$

übergehen.

Soll nun die Variation dieses Doppelintegrales unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass auch die Grenzen des gegebenen (x, y)-Gebietes sich ändern, so wird man (4) nur so zu variiren haben, dass δv und δw am Rande des (v, w)-Gebietes verschwinden, und man erhält in bekannten Zeichen nach Rückführung der Variation des Integrals (4) in (1) den Ausdruck

$$
(5)\quad \delta\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x, y, z, p, q)\,dy\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right)(\delta z - p\delta x - q\delta y)\,dy\,dx
$$

$$
+\int_{x_0}^{x_1}\Big|f(\delta y - y'\delta x)\Big|_{y_0}^{y_1}dx + \left[\int_{y_0}^{y_1} f(\delta x - x'\delta y)\,dy\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}-y'\frac{\partial f}{\partial p}\right)(\delta z - p\delta x - q\delta y)\right]_{y_0}^{y_1}dx
$$

$$
+\left[\int_{y_0}^{y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial p}-x'\frac{\partial f}{\partial q}\right)(\delta z - p\delta x - q\delta y)\,dy\right]_{x_0}^{x_1},
$$

und genau dieselbe Form hat die Variation des Doppelintegrales, wenn mehr als eine abhängige Variable in der Function unter dem Integral vorkommt.

Seien nun die erweiterten Lagrange'schen Gleichungen

$$
(6)\quad \frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = P_s \qquad (s = 1, 2, \dots \mu)
$$

gegeben, und werde die Energie

$$
(7)\quad H - \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_\varrho^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}} - \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_\varrho^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}} = E
$$

gesetzt, so erhält man unter der Voraussetzung, dass auch die unabhängigen Variabeln t und u selbst variiren sollen — eine Voraussetzung, die unter der nachher zu machenden Annahme der Gültigkeit des Energieprincips aus bekannten Gründen nothwendig ist — nach (7) vermöge der Beziehung (5)

$$
(8)\quad \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} H\,du\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}\sum_{1}^{\mu}{}_{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\right)(\delta p_s - p_s^{(10)}\delta t - p_s^{(01)}\delta u)\,du\,dt
$$

$$
+\int_{t_0}^{t_1}\Big|E(\delta u - u'\delta t)\Big|_{u_0}^{u_1}dt + \left|\int_{u_0}^{u_1}E(\delta t - t'\delta u)\,du\right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{1}^{\mu}{}_{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\delta t - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\delta u\right)(p_s^{(10)} + p_s^{(01)}u')\right]_{u_0}^{u_1}dt
$$

$$
+\left|\int_{u_0}^{u_1}\sum_{1}^{\mu}{}_{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\delta t - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\delta u\right)(p_s^{(01)} + p_s^{(10)}t')\,du\right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{1}^{\mu}{}_{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}u'\right)\delta p_s\right]_{u_0}^{u_1}dt
$$

$$
+\left|\int_{u_0}^{u_1}\sum_{1}^{\mu}{}_{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}t'\right)\delta p_s\,du\right|_{t_0}^{t_1}.
$$

Nun findet man aber leicht unter der Voraussetzung, dass äussere Kräfte nicht vorhanden, und das kinetische Potential den oben für die Existenz des Energieprincips

$$E = H - \sum_1^{\mu} {}_{\varrho} p_{\varrho}^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_{\varrho}^{(10)}} - \sum_1^{\mu} {}_{\varrho} p_{\varrho}^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_{\varrho}^{(01)}} = h$$

erwähnten nothwendigen und hinreichenden Bedingungen genügt, die Beziehung

(9) $$\delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} E\,du\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \delta E\,du\,dt + h \left\{ \left[\int_{u_0}^{u_1} (\delta t - t'\delta u)\,du \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta u - u'\delta t \right]_{u_0}^{u_1} dt \right\}$$

und durch Subtraction der Gleichungen (8) und (9)

(10) $$\begin{aligned}
\delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (H - E)\,du\,dt = &\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \sum_1^{\mu} {}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} \right) (\delta p_s - p_s^{(10)}\delta t - p_s^{(01)}\delta u)\,du\,dt \\
&- \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \delta E\,du\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_1^{\mu} {}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\delta t - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\delta u \right) (p_s^{(10)} + p_s^{(01)} u') \right]_{u_0}^{u_1} dt \\
+ \left[\int_{u_0}^{u_1} \sum_1^{\mu} {}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\delta t - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\delta u \right) (p_s^{(01)} + p_s^{(10)} t')\,du \right]_{t_0}^{t_1} &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_1^{\mu} {}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} u' \right) \delta p_s \right]_{u_0}^{u_1} dt \\
&+ \left[\int_{u_0}^{u_1} \sum_1^{\mu} {}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} t' \right) \delta p_s\,du \right]_{t_0}^{t_1}.
\end{aligned}$$

Sollen nun die Werthe von $p_1, \ldots p_\mu$ den Lagrange'schen Gleichungen (6) für verschwindende äussere Kräfte[1] Genüge leisten, und ausserdem ihre Variationen an den Grenzen des (t, u)-Gebietes verschwinden, so geht das durch die Gleichung (10) ausgedrückte Princip der kleinsten Wirkung in

(11) $$\delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (H - E)\,du\,dt = - \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \delta E\,du\,dt,$$

und bei der Annahme, dass die verglichenen Veränderungen ebenfalls dem Energieprincip, nur mit einer anderen Energieconstanten, genügen, in

[1] Die oben gemachte Annahme, dass äussere Kräfte nicht vorhanden sind, geschah nur der Kürze der Darstellung wegen, da sonst nur die im § 9 meiner »Principien der Mechanik« gegebene Deduction an die Stelle der oben durchgeführten tritt.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (H-E)\,du\,dt = -\delta h \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} du\,dt \tag{12}$$

über; setzt man endlich noch fest, dass die Constante der Energie für die normale und die verglichenen Veränderungen dieselbe sein soll, so ergiebt sich das Princip der kleinsten Wirkung in seiner einfachsten Gestalt

$$\delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (H-E)\,du\,dt = 0 \tag{13}$$

für alle diejenigen Integrale der Lagrange'schen Gleichungen, welche dem Energieprincip unterliegen.

§ 5.

Das erweiterte Princip der Flächen.

Aus den Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} = P_\varkappa$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}} = P_\lambda$$

folgt leicht, dass, wenn H identisch der Gleichung genügt,

$$\sum_{1,2,\dots\mu}^{\varkappa,\lambda} \left\{ \left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\right) + \left(p_\lambda^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}}\right) + \left(p_\lambda^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} - p_\varkappa^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}}\right) \right\} = 0.$$

also die Form hat

$$H = F(t, u \,.\, p_\varkappa^2 + p_\lambda^2,\; p_\varkappa^{(10)^2} + p_\lambda^{(10)^2},\; p_\varkappa^{(01)^2} + p_\lambda^{(01)^2},\; p_\varkappa p_\lambda + p_{\varkappa_1} p_{\lambda_1},\; p_\varkappa^{(10)} p_\lambda^{(10)} + p_{\varkappa_1}^{(10)} p_{\lambda_1}^{(10)},$$
$$p_\varkappa^{(01)} p_\lambda^{(01)} + p_{\varkappa_1}^{(01)} p_{\lambda_1}^{(01)},\; p_\varkappa p_\varkappa^{(10)} + p_\lambda p_\lambda^{(10)},\; p_\varkappa p_\varkappa^{(01)} + p_\lambda p_\lambda^{(01)},\; p_\varkappa^{(10)} p_\varkappa^{(01)} + p_\lambda^{(10)} p_\lambda^{(01)}) \tag{1}$$

und

$$\sum_{1,2,\dots\mu}^{\varkappa,\lambda} \left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}}\right) = K_1,\quad \sum_{1,2,\dots\mu}^{\varkappa,\lambda} \left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}}\right) = K_2,$$
$$\sum_{1,2,\dots\mu}^{\varkappa,\lambda} (p_\lambda P_\varkappa - p_\varkappa P_\lambda) = K$$

gesetzt wird,

$$\frac{dK_1}{dt} + \frac{dK_2}{du} = K \tag{2}$$

ist, eine Gleichung, deren Integral dem Princip der Flächen in der Mechanik wägbarer Massen analog ist. Ist für gewisse Formen des kinetischen Potentials

$$K_2 = \nu K_1,$$

worin ν eine Constante bedeutet, und sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so geht (2) in

$$(3) \qquad \frac{dK_1}{dt} + \nu \frac{dK_1}{du} = 0$$

über, und es lautet somit das dem Flächenprincip analoge Integral

$$(4) \qquad \sum_{1,2\ldots\mu}^{\varkappa,\lambda} \left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}} \right) = \phi(u - \nu t),$$

worin ϕ eine willkürliche Function bedeutet.

Dieser Fall wird z. B. für den im § 3 hervorgehobenen, dem des freien Systems in der Mechanik wägbarer Massen analogen Ausdruck des kinetischen Potentials eintreten, wofür $K_2 = \frac{\beta}{\alpha} K_1$ ist, und das Flächenprincip somit die Form annimmt

$$(5) \qquad p_2 \frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} - p_1 \frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} = \phi\left(u - \frac{\beta}{\alpha} t \right)$$

oder

$$\alpha(p_2 p_1^{(10)} - p_1 p_2^{(10)}) + \beta(p_2 p_1^{(01)} - p_1 p_2^{(01)}) = \frac{1}{2} \phi\left(u - \frac{\beta}{\alpha} t \right).$$

worin ϕ eine willkürliche Function bedeutet.

§ 6.

Das erweiterte Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie ich sie in meinen »Principien der Mechanik« angestellt habe, führen zu dem Satze, dass, wenn die Zwangsbedingungen eines Problems nur von den Differenzen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen, und

$$\xi = x_\lambda + \omega(t, u, x_1 - x_\lambda, x_2 - x_\lambda, \ldots x_n - x_\lambda)$$

gesetzt wird, worin λ irgend einen der Indices $1, 2, \ldots n$ und ω eine beliebige Function bedeutet, unter der Annahme, dass das kinetische Potential H die Form hat

$$H = H_1\left(t, u, x_\lambda + \omega(t, u, x_1 - x_\lambda, \ldots x_n - x_\lambda), x_\lambda^{(10)} + \frac{d\omega}{dt}, x_\lambda^{(01)} + \frac{d\omega}{du} \right)$$
$$+ H_2(t, u, x_r - x_s, x_r^{(10)} - x_s^{(10)}, x_r^{(01)} - x_s^{(01)}),$$

worin $x_r - x_s$ alle Werthecombinationen der Differenzen der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ darstellen soll, und H_1, H_2 willkürliche Functionen ihrer Argumente sind, die Beziehung gilt

$$(1) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial \xi^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H_1}{\partial \xi^{(01)}} = \sum_1^n {}_i X_i,$$

welche dem Schwerpunktssatze analog ist.

Setzt man den früher getroffenen, denen der Mechanik wägbarer Massen analogen Bestimmungen gemäss

$$T = \sum_1^n {}_i a_i (\alpha x_i^{(10)} + \beta x_i^{(01)})^2,$$

so wird, wie leicht zu begründen, die Beziehung (1) stattfinden, wenn für $\sum_1^n {}_i \alpha_i = A$

$$H_1 = \frac{1}{A}(\alpha \xi^{(10)} + \beta \xi^{(01)})^2, \qquad \xi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

gesetzt wird.

§ 7.

Transformation der erweiterten LAGRANGE'schen Gleichungen in das erweiterte HAMILTON'sche Differentialgleichungsystem.

Um unter der Voraussetzung, dass äussere Kräfte nicht vorhanden, in die erweiterten LAGRANGE'schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots n)$$

statt des kinetischen Potentials H, in welchem t und u nicht explicite vorkommen sollen, die durch den Ausdruck

$$E = H - \sum_1^\mu {}_\varrho p_\varrho^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}} - \sum_1^\mu {}_\varrho p_\varrho^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}}$$

definirte Energie einzuführen, setze man

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}} = q_\varrho^{(10)}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}} = q_\varrho^{(01)} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \mu),$$

und drücke aus diesen 2μ Gleichungen die 2μ Grössen

$$p_1^{(10)}, p_2^{(10)}, \ldots p_\mu^{(10)}, p_1^{(01)}, p_2^{(01)}, \ldots p_\mu^{(01)}$$

durch

$$p_1, p_2, \ldots p_\mu, q_1^{(10)}, q_2^{(10)}, \ldots q_\mu^{(10)}, q_1^{(01)}, q_2^{(01)}, \ldots q_\mu^{(01)}$$

aus. Man erhält sodann statt der μ partiellen LAGRANGE'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den abhängigen Variabeln $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ das simultane System von 3μ partiellen

Differentialgleichungen erster Ordnung in den 3μ abhängigen Variabeln $q_1^{(10)}, \ldots q_\mu^{(10)}, q_1^{(01)}, \ldots q_\mu^{(01)}, p_1, \ldots p_\mu$:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\frac{\partial(E)}{\partial q_s^{(10)}}, \quad \frac{\partial p_s}{\partial u} = -\frac{\partial(E)}{\partial q_s^{(01)}}, \quad \frac{\partial q_s^{(10)}}{\partial t} + \frac{\partial q_s^{(01)}}{\partial u} = \frac{\partial(E)}{\partial p_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu),$$

worin (E) den in die neuen Variabeln transformirten Werth der Energie bedeutet, und die das Analogon zu dem Hamilton-schen totalen Differentialgleichungssystem in der Mechanik bilden.

§ 8.

Über die auf die erweiterte Lagrange'sche Form reducirbaren partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wenn man die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$F(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}, p^{(20)}, p^{(11)}, p^{(02)}) = 0$$

in einer abhängigen Variabeln p und zwei unabhängigen Variabeln t und u aufstellen will, welche sich in die Form der erweiterten Lagrange'schen Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = 0$$

bringen lassen, wird nur die Frage zu beantworten sein, wann die Function F ein kinetisches Potential besitzt, und es ergiebt sich somit aus dem Hülfsatz 4. des § 1, dass die gesuchte Differentialgleichung von der Form sein muss

$$f_{20}(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(20)} + f_{11}(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(11)} \\ + f_{02}(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(02)} + f(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)}) = 0,$$

worin die Coefficienten der partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung den identisch zu erfüllenden Gleichungen unterliegen

$$2\frac{\partial f_{02}}{\partial p^{(10)}} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p^{(01)}} = 0, \qquad 2\frac{\partial f_{20}}{\partial p^{(01)}} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p^{(10)}} = 0$$

$$2\frac{\partial f}{\partial p^{(10)}} - 2\frac{\partial f_{20}}{\partial t} - 2\frac{\partial f_{20}}{\partial p}p^{(10)} - \frac{\partial f_{11}}{\partial u} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p}p^{(01)} = 0$$

$$2\frac{\partial f}{\partial p^{(01)}} - 2\frac{\partial f_{02}}{\partial u} - 2\frac{\partial f_{02}}{\partial p}p^{(01)} - \frac{\partial f_{11}}{\partial t} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p}p^{(10)} = 0,$$

wozu, wenn das Princip der Energie gelten soll, noch die Bedingungen treten, dass die Functionen $f_{20}, f_{11}, f_{02}, f$ die Variabeln t und u nicht explicite enthalten dürfen und die Beziehung identisch befriedigen

$$f_{11}^2 = 4 f_{20} f_{02}.$$

Ohne auf weitere Einzelheiten näher einzugehen, mag kurz hervorgehoben werden, dass z. B. die partiellen Differentialgleichungen

$$p^{(20)} = \alpha^2 p^{(02)},\ p^{(20)} + p^{(02)} + \varkappa^2 p = 0 \quad p^{(200)} + p^{(020)} + p^{(002)} + \varkappa^2 p = 0$$

die LAGRANGE'sche Form haben für die kinetischen Potentiale

$$H = -\frac{1}{2} p^{(10)^2} + \frac{\alpha^2}{2} p^{(01)^2},\ H = -\frac{1}{2} p^{(10)^2} - \frac{1}{2} p^{(01)^2} + \frac{\varkappa^2}{2} p^2$$

$$H = -\frac{1}{2} p^{(100)^2} - \frac{1}{2} p^{(010)^2} - \frac{1}{2} p^{(001)^2} + \frac{\varkappa^2}{2} p^2.$$

§ 9.

Über eine Eigenschaft kinetischer Potentiale mit mehreren unabhängigen Variabeln.

Durch einfache, in der ausführlicheren Bearbeitung näher dargelegte Betrachtungen ergiebt sich der folgende Satz:

Ist H ein kinetisches Potential ν^{ter} Ordnung von μ abhängigen Variabeln $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ und ρ unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_\rho$, und sind die durch das erweiterte HAMILTON-sche Princip

$$(1) \qquad \delta \int_{t_1^0}^{t_1^1} \int_{t_2^0}^{t_2^1} \cdots \int_{t_\rho^0}^{t_\rho^1} \left(H - \sum_1^\mu {}_s P_s p_s \right) dt_\rho\, dt_{\rho-1} \ldots dt_1 = 0,$$

worin die Variationen der Variabeln $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ an den Grenzen des $(t_1, t_2, \ldots t_\rho)$-Gebietes gleich Null angenommen werden und die Grössen P_s als Functionen der t vorgelegt sind, gegebenen erweiterten LAGRANGE'schen Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt_1} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots 0)}} - \frac{d}{dt_2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots 0)}} - \ldots - \frac{d}{dt_\rho} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots 1)}}$$
$$+ \frac{d^2}{dt_1^2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(20\ldots 0)}} + \frac{d^2}{dt_1\, dt_2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(11\ldots 0)}} + \ldots + \frac{d^2}{dt_\rho^2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(00\ldots 2)}}$$
$$+ \ldots + (-1^\nu) \frac{d^\nu}{dt_\rho^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots \nu)}}, = P_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu)$$

worin nunmehr H die unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_\rho$ nicht explicite enthalten soll und P_s als gegebene Functionen der abhängigen Grössen betrachtet werden mögen — wofür dann das HAMILTON'sche Princip die LAGRANGE'schen Gleichungen nicht darstellt —, so werden, wenn $a_1, a_2, \ldots a_\rho$ willkürliche Constanten bedeuten.

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_\rho t_\rho = t,\ p_s = q_s, \frac{d^r q_s}{dt^r} = q_s^{(r)}$$

gesetzt und der durch Substitution von

$$p_s^{(10\ldots 0)} = a_1 q_s', \ldots p_s^{(00\ldots 1)} = a_\varrho q_s', p_s^{(20\ldots 0)} = a_1^2 q_s'', p_s^{(110\ldots 0)} = a_1 a_2 q_s'', \ldots$$

hervorgehende Werth des kinetischen Potentials mit (H) bezeichnet wird, die partiellen Differentialgleichungen (2) für das so definirte kinetische Potential ν^{ter} Ordnung (H) der μ abhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ und der einen unabhängigen Variabeln t in die totalen Lagrange'schen Differentialgleichungen

$$(3)\quad \frac{\partial(H)}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(H)}{\partial q_s'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial(H)}{\partial q_s''} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial(H)}{\partial q_s^{(\nu)}} = (P_s)\quad (s = 1, 2, \ldots \mu)$$

übergehen, und es wird sich für ein Integralsystem

$$q_1 = \phi_1(t, c_1, c_2, \ldots c_\lambda), \ \ldots\ q_\mu = \phi_\mu(t, c_1, c_2, \ldots c_\lambda)$$

der Differentialgleichungen (3) ein Integralsystem der partiellen Differentialgleichungen (2) in der Form ergeben

$$p_1 = \phi_1(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_\varrho t_\varrho, c_1, \ldots c_\lambda), \ldots p_\mu = \phi_\mu(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_\varrho t_\varrho, c_1, c_2, \ldots c_\lambda).$$

Man sieht ebenso leicht, dass, wenn z. B. für ein kinetisches Potential erster Ordnung, welches die unabhängigen Variabeln nicht enthält, die für die Existenz des Energieprincips

$$H - \sum_1^\mu {}_s\, p_s^{(10\ldots 0)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots 0)}} - \sum_1^\mu {}_s\, p_s^{(01\ldots 0)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots 0)}} - \ldots - \sum_1^\mu {}_s\, p_s^{(00\ldots 1)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots 1)}} = h$$

nothwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt sind, man durch die oben angegebene Substitution auf die Gleichung

$$(H) - \sum_1^\mu {}_s\, q_s' \frac{\partial(H)}{\partial q_s'} = h$$

geführt wird, welche für das von $q_1, q_2, \ldots q_\mu, q_1', q_2', \ldots q_\mu'$ abhängige kinetische Potential (H) das stets ohne jede Bedingung für (H) gültige Energieprincip für alle Integrale des zu (H) gehörigen Lagrange'schen Differentialgleichungssystems darstellt, und dass somit für **eine** abhängige Variable ohne jede Bedingung für das kinetische Potential H alle vollständigen Integrale des erweiterten Princips der lebendigen Kraft auch der zugehörigen Lagrange'schen Gleichung Genüge leisten. Genau dieselben Sätze gelten für das Energieprincip von kinetischen Potentialen beliebiger Ordnung.

Ausgegeben am 21. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei