G. Frobenius

Über auflösbare Gruppen : [Teil] V

In:
Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – Berlin: Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften (in Commission bei Georg Reimer)
Jahrgang 1901 : Zweiter Halbband (Juli bis December)
S. 1324-1329

Persistent Identifier: urn:nbn:de:kobv:b4-opus4-41332

Über auflösbare Gruppen. V.

Von G. Frobenius.

In meiner Arbeit *Über auflösbare Gruppen IV.*, die ich hier mit *A. IV* citiren werde, habe ich in § 3 einen speciellen Satz entwickelt, der sich in folgender Art verallgemeinern lässt:

I. *Ist p^λ die höchste Potenz der Primzahl p, die in der Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{H}$ aufgeht, und ist jedes mit irgend einer Untergruppe der Ordnung p^α vertauschbare Element von $\mathfrak{H}$, dessen Ordnung nicht durch p theilbar ist, mit jedem Elemente der Untergruppe vertauschbar, so hat $\mathfrak{H}$ eine charakteristische Untergruppe vom Index p^λ, gebildet aus allen Elementen von $\mathfrak{H}$, deren Ordnungen nicht durch p theilbar sind.*

Aus dem Satze *A. II*, § 2 folgt daher:

II. *Ist p^λ die höchste Potenz der Primzahl p, die in der Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{H}$ aufgeht, und ist die Anzahl der mit irgend einer Untergruppe $\mathfrak{Q}$ der Ordnung p^α vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ zu $\vartheta(\mathfrak{Q})$ theilerfremd, so enthält $\mathfrak{H}$ eine charakteristische Untergruppe des Index p^λ.*

Ist

$$\mathfrak{Q} = Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_{m-1}$$

eine Gruppe der Ordnung m, die mit dem Elemente R vertauschbar ist, und ist $R^{-1}Q_\mu R = Q'_\mu$, so ist auch

$$\mathfrak{Q} = Q'_0 + Q'_1 + \cdots + Q'_{m-1}.$$

Den so erhaltenen *Isomorphismus von $\mathfrak{Q}$ in sich* oder kurz *Automorphismus von $\mathfrak{Q}$* bezeichne ich mit (R), und ich sage, er werde durch das Element R bewirkt. Die Ordnung von (R) ist ein Theiler der Ordnung von R. Gehört das Element R der Gruppe $\mathfrak{H}$ an, so sage ich auch, der Automorphismus (R) sei in $\mathfrak{H}$ enthalten. Die in $\mathfrak{Q}$ enthaltenen Automorphismen von $\mathfrak{Q}$ nenne ich *innere*, die Automorphismen, die nicht innere sind, *äussere*.

Die Voraussetzung des Satzes I. besagt dann, dass $\mathfrak{H}$ nur solche Automorphismen irgend einer Untergruppe $\mathfrak{Q}$ der Ordnung p^α enthält, deren Ordnungen in p^λ aufgehen. Und zu dem Satze II. führt die Bemerkung (vergl. Burnside, *Theory of groups*, § 175), dass die Ordnung eines Automorphismus von $\mathfrak{Q}$, wenn sie nicht durch p theilbar ist, ein Divisor von $\vartheta(\mathfrak{Q})$ sein muss.

Sei $p^\lambda n$ die Ordnung von $\mathfrak{H}$, also n nicht durch p theilbar, und sei $\mathfrak{P}$ eine in $\mathfrak{H}$ enthaltene Gruppe der Ordnung p^λ. Dann stützt sich der Beweis auf zwei Hülfssätze:

Lemma I: Ist ein Element oder eine Untergruppe von $\mathfrak{P}$ mit p^β Elementen von $\mathfrak{P}$ und mit $p^\beta a$ Elementen von $\mathfrak{H}$ vertauschbar, so ist a nicht durch p theilbar.

Die Elemente von $\mathfrak{P}$, die mit einem Elemente A von $\mathfrak{P}$ vertauschbar sind, bilden eine Gruppe $\mathfrak{K}$, die mit $\mathfrak{K}$ vertauschbaren eine Gruppe $\mathfrak{L}$, die mit $\mathfrak{L}$ vertauschbaren eine Gruppe $\mathfrak{M}$ u. s. w. Ist $\mathfrak{L}$ kleiner als $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{M}$ grösser als $\mathfrak{L}$. In der Reihe

$$\text{(A)} \qquad A,\ \mathfrak{K},\ \mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \ldots\ \mathfrak{N},\ \mathfrak{P}$$

ist daher die letzte Gruppe gleich $\mathfrak{P}$.

Sei $\mathfrak{A}$ ein Glied der Reihe (A), entweder das Element A, oder eine der Gruppen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, ..., und seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die beiden auf $\mathfrak{A}$ folgenden Glieder, p^β und p^γ die Ordnungen dieser Gruppen. Die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{P}$ bilden die Gruppe $\mathfrak{B}$, die mit $\mathfrak{B}$ vertauschbaren die Gruppe $\mathfrak{C}$. Die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{A}'$ der Ordnung $p^\beta a$, die mit $\mathfrak{B}$ vertauschbaren eine Gruppe $\mathfrak{B}'$ der Ordnung $p^\gamma b$. Ist $\mathfrak{B}=\mathfrak{N}$ die vorletzte, $\mathfrak{C}=\mathfrak{P}$ die letzte Gruppe der Reihe (A), so ist $\gamma=\lambda$, also b nicht durch p theilbar. Ist $\mathfrak{B}$ irgend eine Gruppe der Reihe (A), für die b nicht durch p theilbar ist, so ist, wie ich zeigen werde, auch a nicht durch p theilbar. Indem man dann für $\mathfrak{B}$ der Reihe nach die Gruppen $\mathfrak{N}$, ..., $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ setzt, erhält man den Beweis der Behauptung.

Bedeutet das Zeichen $\mathfrak{B}>\mathfrak{A}$, dass $\mathfrak{B}$ durch die Gruppe oder das Element $\mathfrak{A}$ theilbar ist, so ist, weil $\mathfrak{H}>\mathfrak{P}$ ist,

$$\mathfrak{A}<\mathfrak{B}<\mathfrak{A}', \qquad \mathfrak{A}<\mathfrak{B}<\mathfrak{C}<\mathfrak{B}'.$$

Der grösste gemeinsame Theiler $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ wird von allen Elementen der Gruppe $\mathfrak{H}$ gebildet, die sowohl mit $\mathfrak{A}$ als auch mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind. $\mathfrak{D}$ besteht aus allen Elementen von $\mathfrak{A}'$, die mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind: $\mathfrak{D}$ besteht aus allen Elementen von $\mathfrak{B}'$, die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind.

Jedes Element von $\mathfrak{B}'$ ist mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Jedes Element von $\mathfrak{B}'$, dessen Ordnung in b aufgeht, also nicht durch p theilbar ist, ist nach Voraussetzung mit jedem Elemente von $\mathfrak{B}$, demnach auch mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar, ist daher in $\mathfrak{A}'$ und folglich in $\mathfrak{D}$ enthalten. Mithin ist die Ordnung von $\mathfrak{D}$ durch b theilbar, und weil sie in $p^\gamma b$ aufgeht, gleich $p^\delta b$. $\mathfrak{D}$ besteht aus den Elementen von $\mathfrak{B}'$, die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind. Daher ist $\mathfrak{A}$ mit $p^\delta b$ Elementen von $\mathfrak{B}'$ vertauschbar. Transformirt man also $\mathfrak{A}$ mit den $p^\gamma b$ Elementen von $\mathfrak{B}'$, so erhält man

$$\frac{p^\gamma b}{p^\delta b} = p^{\gamma-\delta}$$

verschiedene Gruppen (Elemente), die sämmtlichen, die mit $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ conjugirt sind. Dass sich hier der Factor b hebt, ist der Kernpunkt des Beweises. Die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{C}$ bilden die Gruppe $\mathfrak{B}$. Transformirt man daher $\mathfrak{A}$ nur mit den Elementen von $\mathfrak{C}$, so erhält man $p^{\gamma-\beta}$ verschiedene Gruppen (Elemente). Da $\mathfrak{B}' > \mathfrak{C}$ ist, so ist $p^{\gamma-\delta} \geqq p^{\gamma-\beta}$, $\delta \leqq \beta$, also weil $\mathfrak{D} > \mathfrak{B}$ ist, $\delta = \beta$.

Nun benutze ich den Satz (*Über endliche Gruppen*, § 2, V; 1895):

Ist p^λ die höchste Potenz der Primzahl p, die in der Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{H}$ aufgeht, ist $\varkappa < \lambda$, und ist $\mathfrak{K}$ eine in $\mathfrak{H}$ enthaltene Gruppe der Ordnung $p^\varkappa$, so bilden die mit $\mathfrak{K}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ eine Gruppe $\mathfrak{K}'$, deren Ordnung die Primzahl p in einer höheren als der $\varkappa^{ten}$ Potenz enthält.

$\mathfrak{D}$ besteht aus den Elementen von $\mathfrak{A}'$, die mit der Gruppe $\mathfrak{B}$ der Ordnung p^β vertauschbar sind. Wäre nun a durch p theilbar, so wäre die Ordnung $p^\beta a$ von $\mathfrak{A}'$ durch $p^{\beta+1}$ theilbar, und folglich auch die Ordnung $p^\beta b$ von $\mathfrak{D}$, während b nicht durch p theilbar ist. Mithin ist a nicht durch p theilbar, und die Ordnungen der beiden Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'$ enthalten den Primfactor p genau in der gleichen Potenz.

Da $\delta = \beta$ ist, so erhält man die $p^{\gamma-\beta}$ verschiedenen Gruppen (Elemente), die mit $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}'$ conjugirt sind, schon sämmtlich, indem man $\mathfrak{A}$ mit allen Elementen von $\mathfrak{C}$ transformirt. Sie sind also alle (in $\mathfrak{B}$ enthalten und) schon in $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A}$ conjugirt.

Lemma II: Zwei in $\mathfrak{H}$ conjugirte Elemente oder Untergruppen von $\mathfrak{P}$ sind auch schon in $\mathfrak{P}$ conjugirt.

Sei A_1 ein Element von $\mathfrak{P}$ und

$$(A_1) \qquad A_1, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}$$

die zu A_1 in $\mathfrak{P}$ gehörige Reihe. Sind A und A_1 in $\mathfrak{H}$ conjugirt, so nenne ich A und A_1, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$, ... entsprechende Glieder beider Reihen. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei auf einander folgende Glieder der Reihe (A), $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ die entsprechenden der Reihe (A_1). Ist dann $\mathfrak{A}_1 = H^{-1}\mathfrak{A}H$ mit $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ conjugirt, so ist auch $\mathfrak{B}_1$ mit $\mathfrak{B}$ conjugirt: Denn unter Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen bilden die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{A}'$ der Ordnung $p^\beta a$, wo a nicht durch p theilbar ist, also die mit $\mathfrak{A}_1 = H^{-1}\mathfrak{A}H$ vertauschbaren die Gruppe $H^{-1}\mathfrak{A}'H$ derselben Ordnung. Die mit $\mathfrak{A}_1$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{P}$ bilden die Gruppe $\mathfrak{B}_1$. Daher ist nach dem *Lemma I* die Ordnung von $\mathfrak{B}_1$ gleich p^β.

$\mathfrak{A}_1$ ist mit jedem Elemente von $\mathfrak{B}_1$ vertauschbar, also $\mathfrak{A} = H\mathfrak{A}_1H^{-1}$ mit jedem von $H\mathfrak{B}_1H^{-1}$. Mithin sind $\mathfrak{B}$ und $H\mathfrak{B}_1H^{-1}$ zwei Gruppen der Ordnung p^β, die in der Gruppe $\mathfrak{A}'$ der Ordnung $p^\beta a$ enthalten sind. Folglich sind sie nach dem Sylow'schen Satze in $\mathfrak{A}'$ conjugirt,

$H\mathfrak{B}_1 H^{-1} = A'^{-1}\mathfrak{B}A'$, wo A' ein Element von $\mathfrak{A}'$ ist. Ist also $A'H = G$, so ist, weil A' mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar ist,

$$G^{-1}\mathfrak{A}G = \mathfrak{A}_1, \quad G^{-1}\mathfrak{B}G = \mathfrak{B}_1.$$

Setzt man für $\mathfrak{A}$ nach einander die Glieder A, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, ... der Reihe (A), so erkennt man, dass je zwei entsprechende Glieder der Reihen (A) und (A_1) in $\mathfrak{H}$ conjugirt sind, also dieselbe Ordnung haben, und dass beide Reihen aus gleich vielen Gliedern bestehen. Endlich kann man ein Element G finden, das gleichzeitig $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}_1$ transformirt.

Die letzten Glieder beider Reihen sind gleich $\mathfrak{P}$, also in $\mathfrak{P}$ conjugirt. Demnach ist nur noch allgemein zu zeigen: Sind die Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{P}$ conjugirt, so sind es auch die ihnen vorangehenden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$. Sei also Q ein Element von $\mathfrak{P}$ und $G^{-1}\mathfrak{B}G = \mathfrak{B}_1 = Q^{-1}\mathfrak{B}Q$. Dann ist $GQ^{-1} = B'$ mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar, also in $\mathfrak{B}'$ enthalten. Jede Gruppe (Element) $B'^{-1}\mathfrak{A}B'$ von $\mathfrak{B}'$, die mit $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}'$ conjugirt ist, ist aber, wie oben gezeigt, mit $\mathfrak{A}$ schon in $\mathfrak{C}$ conjugirt. Demnach ist $B'^{-1}\mathfrak{A}B' = P^{-1}\mathfrak{A}P$, wo $P < \mathfrak{C} < \mathfrak{P}$ ist; also, da $G = B'Q$ ist,

$$\mathfrak{A}_1 = G^{-1}\mathfrak{A}G = Q^{-1}(B'^{-1}\mathfrak{A}B')Q = Q^{-1}(P^{-1}\mathfrak{A}P)Q.$$

und folglich

$$\mathfrak{A}_1 = (PQ)^{-1}\mathfrak{A}(PQ),$$

wo PQ ein Element von $\mathfrak{P}$ ist.

Setzt man nun für $\mathfrak{B}$ nach einander $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$, $\cdots$ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$, so erkennt man schliesslich, dass A und A_1 in $\mathfrak{P}$ conjugirt sind.

Jetzt sei $\mathfrak{R}$ die Commutatorgruppe von $\mathfrak{P}$, und p^ρ ihre Ordnung. Nach $A.\ IV$, Satz I. folgt dann aus dem zweiten Lemma, dass die Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $p^\lambda n$ eine durch $\mathfrak{R}$ theilbare charakteristische Untergruppe der Ordnung $p^\rho n$ hat. Da $\rho < \lambda$ (sogar $\rho \leq \lambda - 2$) ist, kann man für diese Gruppe den Satz I. schon als bewiesen annehmen. Sie hat also eine charakteristische Untergruppe der Ordnung n, und diese ist auch eine solche für die Gruppe $\mathfrak{H}$. Da n und p^λ theilerfremd sind, besteht sie aus den n Elementen von $\mathfrak{H}$, deren Ordnungen in n aufgehen.

Die Voraussetzung des Satzes I. braucht nicht für jede Untergruppe $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$ erfüllt zu sein, sondern nur für die Untergruppen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\cdots$ $\mathfrak{P}$, die man erhält, indem man zu jedem Elemente A von $\mathfrak{P}$ die zugehörige Reihe (A) bestimmt. Diese Gruppen sind alle durch die aus den invarianten Elementen von $\mathfrak{P}$ gebildete Gruppe $\mathfrak{Z}$ theilbar, und wenn eine von ihnen eine commutative Gruppe ist, so kann dies nur die unmittelbar auf A folgende Gruppe $\mathfrak{K}$ sein.

Die genaueste Fassung des Satzes I. ist die folgende:

III. *Sei p eine Primzahl, n nicht durch p theilbar, $\mathfrak{H}$ eine Gruppe der Ordnung $p^\lambda n$, $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe der Ordnung p^λ, $\mathfrak{R}$ die Commutator-*

gruppe von $\mathfrak{P}$, p^λ *ihre Ordnung. Ist dann* A *irgend ein Element von* $\mathfrak{P}$, *und* $A, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \cdots, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ *die zugehörige Reihe, so sei jedes Element von* $\mathfrak{H}$, *dessen Ordnung nicht durch* p *theilbar ist, und das mit einem Gliede dieser Reihe vertauschbar ist, auch mit dem vorhergehenden Gliede vertauschbar. Dann hat* $\mathfrak{H}$ *eine durch* $\mathfrak{N}$ *theilbare charakteristische Untergruppe der Ordnung* $p^\lambda n$, *die alle Elemente von* $\mathfrak{H}$ *umfasst, deren Ordnungen in* n *aufgehen.*

Nehmen wir umgekehrt an, eine Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $p^\lambda n$, wo n nicht durch die Primzahl p theilbar ist, habe eine invariante Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Ordnung n. Sei $\mathfrak{C}$ eine Untergruppe der Ordnung p^γ, die mit $\mathfrak{C}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ mögen die Gruppe $\mathfrak{B}$ der Ordnung $p^\beta d$ bilden, wo d ein Theiler von n ist. Ist $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Divisor von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so ist seine Ordnung d' ein Theiler von d. Da $\mathfrak{A}$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{B}$ vertauschbar ist, so hat die Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Ordnung $np^\beta \frac{d}{d'}$, und da diese Zahl ein Theiler von $p^\lambda n$ ist, so ist $d' = d$. Ferner ist $\mathfrak{D}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{B}$, und weil d und p^β theilerfremd sind, besteht $\mathfrak{D}$ aus allen Elementen von $\mathfrak{B}$, deren Ordnungen nicht durch p theilbar sind. Demnach sind $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zwei invariante Untergruppen von $\mathfrak{B}$, deren Ordnungen theilerfremd sind. Folglich ist jedes Element von $\mathfrak{C}$ mit jedem von $\mathfrak{D}$ vertauschbar. Jedes Element von $\mathfrak{H}$, dessen Ordnung nicht durch p theilbar ist, und das mit $\mathfrak{C}$ vertauschbar ist, muss also mit jedem Elemente von $\mathfrak{C}$ vertauschbar sein.

Ist $\mathfrak{P}$ eine commutative Gruppe (*A. III*, § 3), so ist ihre Commutatorgruppe $\mathfrak{N}$ die Hauptgruppe. Ist dann jedes mit $\mathfrak{P}$ vertauschbare Element von $\mathfrak{H}$, dessen Ordnung nicht durch p theilbar ist, mit jedem Elemente von $\mathfrak{P}$ vertauschbar, oder ist n zu $\vartheta(\mathfrak{P})$ theilerfremd, so hat $\mathfrak{H}$ eine charakteristische Untergruppe der Ordnung n.

Ist jedes Element von $\mathfrak{P}$ mit mindestens $p^{\lambda-1}$ Elementen von $\mathfrak{P}$ vertauschbar (*A. IV*, § 3), so besteht die Reihe jedes nicht invarianten Elements A nur aus drei Gliedern, $A, \mathfrak{L}, \mathfrak{P}$. Ferner besteht dann $\mathfrak{N}$ aus lauter invarianten Elementen von $\mathfrak{P}$ (Burnside, *Theory of groups*, p. 379). Denn ist $\mathfrak{Q}$ eine in $\mathfrak{P}$ enthaltene Gruppe der Ordnung $p^{\lambda-1}$, so ist $\mathfrak{Q}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{P}$, und $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}}$ eine commutative Gruppe. Daher ist $\mathfrak{Q} > \mathfrak{N}$. Ist A ein invariantes Element von $\mathfrak{P}$, so ist A auch mit jedem Elemente von $\mathfrak{N}$ vertauschbar. Bilden aber die mit A vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{P}$ eine Gruppe $\mathfrak{L}$ der Ordnung $p^{\lambda-1}$, so ist $\mathfrak{L} > \mathfrak{N}$. Demnach ist jedes Element von $\mathfrak{N}$ mit jedem Elemente A von $\mathfrak{P}$ vertauschbar. Die Voraussetzung des Satzes I. braucht also nur für $\mathfrak{P}$ selbst, für die Gruppen $\mathfrak{L}$ der Ordnung $p^{\lambda-1}$, die den nicht invarianten Elementen A

zugehören, und für die commutative Gruppe $\mathfrak{N}$ erfüllt zu sein. Dann hat $\mathfrak{H}$ eine charakteristische Untergruppe der Ordnung n.

Als eine Anwendung der entwickelten Principien beweise ich den Satz des Hrn. Burnside: Sind p, q, r drei verschiedene ungerade Primzahlen, so ist jede Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $h = p^4qr$ auflösbar. Denn jede Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist auflösbar, weil ihre Ordnung ein Product von höchstens 5 ungeraden Primzahlen ist. Ist also $\mathfrak{H}$ nicht auflösbar, so ist $\mathfrak{H}$ eine einfache Gruppe. p muss die kleinste der drei Primzahlen sein. Daher ist $n = qr$ zu p^2-1 theilerfremd. $\mathfrak{H}$ hat keine Untergruppe der Ordnung p^4q (oder p^4r). Denn sonst lässt sich $\mathfrak{H}$ als transitive Gruppe des Primzahlgrades r darstellen. Eine solche ist aber nach einem Satze des Hrn. Burnside, wenn sie nicht auflösbar ist, zweifach transitiv. Dann ist aber ihre Ordnung durch $r\,(r-1)$ theilbar, also eine gerade Zahl. Mithin ist $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$ und, wenn $\mathfrak{N}$ eine in $\mathfrak{P}$ enthaltene Gruppe der Ordnung p^3 ist, auch $\mathfrak{N}' = \mathfrak{P}$. Demnach enthält $\mathfrak{H}$ gar kein Element, dessen Ordnung in n aufgeht, und das mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q} = \mathfrak{N}$ vertauschbar ist. Ist aber die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ gleich p oder p^2, so ist n zu $\mathfrak{S}\,(\mathfrak{Q})$ theilerfremd. Folglich hat $\mathfrak{H}$ eine invariante Untergruppe der Ordnung n.

Ist $\lambda = 4$, so genügt es in der Regel zur Anwendung des Satzes I, dass n zu p^2-1 theilerfremd ist. Eine Ausnahme bilden nur die beiden Fälle, wo $\mathfrak{P}$ eine lineare Gruppe der Ordnung p^4 ist, und wo $\mathfrak{P}$ nicht commutativ ist, aber eine lineare Gruppe der Ordnung p^3 enthält. Der weitere denkbare Ausnahmefall ist ausgeschlossen nach dem Satze des Hrn. Young, dass es keine Gruppe $\mathfrak{P}$ giebt, die aus der Gruppe $\mathfrak{S}$ der Ordnung p und der linearen Gruppe $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{S}}$ der Ordnung p^3 zusammengesetzt ist.