Gerhard Huisken

Mathematisierung der Gravitation: Die Schwarzschildlösung der Einsteingleichungen als Grundmodell vieler Phänomene der Gravitation

Als Beispiel für ein mathematisches Modell in der theoretischen Physik habe ich die Schwarzschildlösung der Einsteinschen Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie ausgewählt. Für die Auswahl dieses speziellen Modells gibt es mehrere Gründe: Zum einen handelt es sich um ein grundlegendes Modell, das eine entscheidende Rolle in der allgemeinen Relativitätstheorie spielt, die als sehr erfolgreiches Modell der Gravitation in der theoretischen Physik bekannt ist. Das Modell erlaubt eine besonders deutliche Darstellung der engen Beziehungen zwischen verschiedenen Gebieten des Wissens, insbesondere zwischen Analysis, Geometrie und theoretischer Physik. Darüber hinaus kann man zeigen, daß das Modell in einer historischen Kontinuität von mathematischen und physikalischen Konzepten steht; das Modell ist nicht auf einmal vom Himmel gefallen, sondern baut auf bekanntem Wissen auf, insbesondere den Keplerschen Planetenbahnen und der Newtonschen Gravitationstheorie. Schließlich habe ich das Modell ausgewählt, weil es für einen Mathematiker, der sich mit diesem Gebiet beschäftigt, ein ästhetisch besonders schönes Modell ist, das auf sehr elegante Weise vorher ganz unerwartete Beziehungen herstellt zwischen Konzepten der Physik und grundlegenden Strukturen der theoretischen Geometrie. Zu guter Letzt weckt es noch Verwunderung: Warum gibt es überhaupt ein mathematisches Modell, das so natürlich eine grundlegende Rolle in Geometrie und Analysis spielt und gleichzeitig qualitativ und quantitativ so genau auf eine Vielzahl von Gravitationsphänomen paßt?

Um das Modell einzuführen, möchte ich mit einem Rückblick auf die Newtonsche Gravitationstheorie beginnen, und zwar den statischen Fall ohne Dynamik: Für einen rotationssymmetrischen Zentralkörper weiß man, daß man das aus dem Zentralkörper herrührende Gravitationsfeld im Vakuum durch ein rotationssymmetrisches Potential U beschreiben kann, das berühmte Newtonsche Potential

$$U = M/r,$$

wobei M die Masse des Körpers und r den Abstand vom Zentrum des Körpers bezeichnet. Ein Testteilchen der Masse m erfährt dann eine Kraft proportional zu m und zum Gradienten des Potentials, in diesem Fall zu mM/r^2 in Richtung des stärksten Anstiegs des Potentials U (Newtonsches Kraftgesetz).

Grundlegende Eigenschaft eines solchen Potentials (im Vakuum) ist die Differentialgleichung, die es erfüllt: Die Spur der Matrix der zweiten Ableitungen von U verschwindet ($\Delta U = 0$). In gewisser Weise befinden sich solche sogenannten harmonischen Funktionen U in einem perfekten, sie charakterisierenden Gleichgewicht: Der Mittelwert ihrer (reinen) zweiten Ableitungen ist Null und die Funktionswerte von U selbst stimmen an jeder Stelle des Raumes genau mit dem Mittelwert von U in allen kleinen umgebenden Kugeln der betrachteten Stelle überein. Da die Differentialgleichung für U linear ist, gilt in der Newtonschen Theorie zudem ein Superpositionsprinzip: Das Potential U eines allgemeinen gravitierenden Körpers läßt sich durch geeignete lineare Superposition von rotationssymmetrischen Potentialen des Typs M/r zusammensetzen, und die Gravitationswirkung ausgedehnter Körper aufeinander läßt sich durch die Betrachtung geeigneter Punktmassen in den Massenzentren der Körper vereinfacht beschreiben.

Was entspricht dem grundlegenden Newtonschen Potential $U=M/r$ nun in der allgemeinen Relativitätstheorie?

Wenn man zur allgemeinen Relativitätstheorie übergeht, dann muß man den euklidischen Raum, also die gewohnten kartesischen Koordinaten x, y, z, durch ein Raum-Zeit-Kontinuum ersetzen, das Raum- und Zeitkoordinaten miteinander verquickt. Einsteins zentrale Idee war, daß dieses Raum-Zeit-Kontinuum kein euklidischer Raum mehr sein muß mit all seinen Symmetrien, die ihn an jeder Stelle in jeder Richtung gleich aussehen lassen, sondern daß die Raumzeit durch die darin enthaltene Materie nach einem ganz bestimmten Gesetz gekrümmt wird. In einem gekrümmten Raum-Zeit-Kontinuum kann man genauso mit Koordinaten rechnen wie man auf der gekrümmten Erdoberfläche mit Hilfe der Karten eines Atlanten in Koordinaten rechnen kann – und eine von Einsteins grundlegenden Forderungen lautet, daß alle physikalischen Gesetze unabhängig sein müssen von den speziellen Karten, die man gerade zum Rechnen verwendet.

Um die neuen Differentialgleichungen formulieren zu können, ist das Potential U, das wir in der Newtonschen Theorie diskutiert hatten, durch eine andere Struktur zu ersetzen, die die Abweichung vom (leeren) euklidischen Raum beschreiben kann. Es stellt sich heraus, daß die geeignete Struktur eine Metrik ist, das ist eine Vorschrift, die an jedem Punkt des Raum-Zeit-Kontinuums angibt, wie an diesem Punkt Winkel, Längen und Uhrzeiten gemessen werden, – anders ausgedrückt, liefert eine Metrik an jedem Punkt des

Raumes eine Vorschrift, die einem sagt, auf welche Weise das Gesetz des Pythagoras an diesem Punkt der Raumzeit vom euklidischen Fall abweicht.

Um unter den vielen möglichen Metriken die physikalisch sinnvollen zu finden, braucht man für die Metrik eine Differentialgleichung, die zu der Gleichung für das Newtonsche Potential ($\Delta U = 0$) analog ist. In der allgemeinen Relativitätstheorie, im einfachsten Fall des Vakuums, ist die von Einstein vorgeschlagene Gleichung eine Mittelwerteigenschaft für die Krümmungen der Raum-Zeit-Metrik: So wie in der Newtonschen Theorie der Mittelwert der zweiten Ableitungen des Potentials U überall verschwindet, so muß bei Einstein der Mittelwert der Krümmungen der Metrik an jeder Stelle der Raumzeit Null sein.

Der Begriff der Krümmung für einen vierdimensionalen Raum ist kompliziert, läßt sich aber nach B. Riemann auf die ursprüngliche Formulierung von Gauß für zweidimensionale Flächen zurückführen. Man kann das im Sinne von Abweichungen der Winkelsumme im Dreieck formulieren: Gauß hat einen Krümmungsbegriff – Gaußsche Krümmung – für Metriken auf zweidimensionalen Flächen entwickelt, der mißt, wie sehr die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck auf der Fläche von 180 Grad abweicht. In einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum gibt es viele zweidimensionale Flächen mit zugehörigen Gaußschen Krümmungen, – hieraus kann für jede gegebene Richtung an einer Stelle der Raumzeit auf sinnvolle Weise der Mittelwert der Gaußschen Krümmungen in den (infinitesimalen) zweidimensionalen Flächen berechnet werden, die die gegebene Richtung an einer Stelle enthalten. Die Einsteinschen Gleichungen im Fall des Vakuums sagen gerade, daß alle diese Mittelwerte der Gaußschen Krümmungen für alle Richtungen an allen Stellen der Raumzeit gleich Null sind.

Wenn man bedenkt, daß die so definierte Krümmung einer Metrik durch einen Differentialoperator zweiter Ordnung beschrieben wird, dessen analytische Struktur der des Operators Δ in der Newtonschen Potentialgleichung ähnlich ist, so ergibt sich bereits hier eine enge strukturelle Verwandtschaft der beiden Gleichungen aus dem Sichtwinkel der Analysis. Die gravierenden Unterschiede der beiden Theorien haben ihren Ursprung vor allem darin, daß die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie nichtlinear sind und kein Superpositionsprinzip erlauben. Betrachtet man ein Testteilchen in solch einem Raum-Zeit-Vakuum mit einer Metrik, die die Einsteinschen Gleichungen für die Krümmung erfüllt, so lautet die Regel für das Teilchen nun, daß es sich auf Geodäten bewegen muß, das heißt auf Kurven extremaler Länge.

Hat man dieses Grundgerüst der allgemeinen Relativitätstheorie etabliert, so beginnen erst die konkreten Aufgaben: Es gibt eine Unzahl von Lösungen der Einsteinschen Gleichungen, das heißt von vierdimensionalen Geometrien mit der beschriebenen Mittelwert-

eigenschaft der Krümmung. Um ein konkretes Phänomen in der Natur zu beschreiben, müssen angemessene Lösungen ausgewählt werden, die etwas mit den Phänomenen zu tun haben. Wir betrachten daher nun das versprochene grundlegende Modell, also die Schwarzschildlösung der Einsteinschen Gleichungen, die Hauptgegenstand des Vortrags ist.

Die Schwarzschildlösung ist eigentlich ein vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum für die Beschreibung eines isolierten, statischen, rotationssymmetrischen schwarzen Loches; um die Darstellung aber so einfach wie möglich zu halten, werden wir die Zeitrichtung ignorieren und nur einen dreidimensionalen Schnitt durch diese vierdimensionale Raumzeit betrachten. Es handelt sich dann um einen unendlichen dreidimensionalen gekrümmten Raum, der in einem endlichen Bereich stark gekrümmt ist und asymptotisch in großer Entfernung wie der bekannte dreidimensionale euklidische Raum aussieht. Diesen speziellen Raum kann man ganz explizit mit einer Formel beschreiben: Wir lassen in dem dreidimensionalen Raum alle Winkel gleich und multiplizieren alle Abstände mit dem Faktor

$$(1 + M/2r)^2,$$

wobei die Radialkkoordinate $r>0$ wie bisher nach Pythagoras aus den alten kartesischen Koordinaten ausgerechnet wird. Man nennt die so entstandene neue Metrik wegen der Winkelerhaltung eine konforme Metrik, die sich nur in der Längenskala an jeder Stelle vom euklidischen Raum unterscheidet. Der Versuch, sich diesen Abstandsbegriff zu verbildlichen – natürlich kann man etwas Dreidimensionales nicht malen, aber durchaus versuchen, sich vorzustellen, was dieser Raum für eine Geometrie hat –, führt zu einem intuitiven Bild zweier übereinanderliegender, leicht gegeneinander gewölbter Ebenen, die an ihrem jeweiligen Ursprung durch einen „Trichter" oder „Schlund" miteinander verbunden sind. Wenn der Radius r nach unendlich geht, tendiert der Faktor gegen 1 und man erhält asymptotisch den üblichen euklidischen Raum auf der ersten der beiden Ebenen. Wenn der Radius r aber gegen 0 geht, dann ist $M/2r$ sehr groß und somit werden alle Abstände sehr groß, die vorher klein waren. Der ursprüngliche flache Raum in der Nähe des Ursprungs wird dadurch im Ursprung „aufgestochen" und aus der ersten Ebene „herausgestülpt" zu einer zweiten Ebene, die jenseits des entstandenen Trichters eine identischen Kopie der ersten Ebene ist.

Physikalisch interessant ist die obere Hälfte des so enstandenen gekrümmten Raumes, jenseits des engsten Querschnitts des „Trichters", der zweidimensionalen Sphäre gegeben durch den Koordinatenradius $r=M/2$. Es handelt sich um den dreidimensionalen

räumlichen Querschnitt durch das mathematische Modell für ein statisches, rotationssymmetrisches schwarzes Loch der Masse M, mit seinem Horizont bei der zweidimensionalen Sphäre mit Radius r=M/2. In gewisser Weise ist es ein Wunder, daß es diese spezielle dreidimensionale Geometrie gibt, denn sie kann immens viele Dinge gleichzeitig leisten: Wenn man in der zugehörigen Raumzeit die Geodäten für ein Testteilchen berechnet, so erhält man asymptotisch im Bereich großer Abstände die Keplerbahnen um einen Zentralkörper der Masse M – und zusätzlich die Korrekturen, die man astronomisch beobachtet hat. Das bedeutet insbesondere, daß das Newtonsche Gesetz, das die Keplerbahnen ja impliziert, in unserem neuen geometrischen Modell mit enthalten ist. Man sieht an diesem Beispiel exemplarisch, daß es sich bei der allgemeinen Relativitätstheorie nicht um einen völligen Umsturz des alten Wissens, sondern um eine Erweiterung in neuer Formulierung handelt, in der die Erkenntnisse von Newton und Kepler eingebettet und in ihren Begrenzungen verstanden sind. Die historische Kontinuität der mathematischen Modelle für die Gravitation wird an diesem Beispiel auch noch in anderer, eher kurioser Weise deutlich, etwa wenn man sich klar macht, daß die beschriebene dreidimensionale Geometrie auch durch die Rotation eines zweidimensionalen Paraboloids um eine Achse des vierdimensionalen euklidischen Raumes erzeugt werden kann – also mit Hilfe eines Kegelschnittes, der schon Apollonius und Archimedes bekannt war.

Auch in der modernen konformen Geometrie spielt unser Modell eine ganz besondere Rolle, es ist ein fundamentales Beispiel der Theorie: Mit stereographischer Projektion bildet man unseren Raum ab auf die S^3, die dreidimensionale Sphäre – eines der Hauptbeispiele der dreidimensionalen Geometrie. Man kann sowohl in der Geometrie als auch in der Analysis auf verschiedenste Weise beschreiben, warum die S^3 und damit auch unsere Modellgeometrie eine Sonderrolle in der dreidimensionalen Geometrie spielt. Andererseits kann man in der allgemeinen Relativitätstheorie beweisen, daß die Schwarzschild-Metrik dort ein Grundmodell ist: Andere Modelle eines statischen, isolierten, gravitierenden Objektes müssen in einem präzisen quantitativen Sinne mehr Energie enthalten als die Schwarzschild-Metrik. Es ist also physikalisch gesehen ein Grundzustand der allgemeinen Relativitätstheorie, genauso wie es aus geometrischer Sicht einen Grundzustand darstellt. Aus ästhetischer Sicht ist das eine wunderschöne und faszinierende Korrespondenz. Daß es ein solches Objekt überhaupt gibt, das in der Geometrie, Analysis und in der Physik gleichzeitig diese überragende Rolle spielt, ist für mich bei allem technischen Verständnis dieser Tatsache immer wieder faszinierend.

Hiermit nicht genug, unser Modell stellt nicht einen Endpunkt der Theorie dar – man kann es erweitern: Es zeigt sich zum Beispiel, daß mit Hilfe dieses Modells nicht nur ein

statisches schwarzes Loch richtig modelliert wird, sondern auch das Außengebiet eines statischen Sternes. Damit wird unsere Geometrie auch zum Startpunkt für das Studium zum Beispiel von Sternen mit verschiedenen Materiearten.

Schließlich stellte sich heraus, daß die Schwarzschildlösung nur die einfachste exakte Lösung der Einsteingleichung aus einer ganzen Familie solcher Lösungen ist. Es gibt die Kerrlösungen, die 50 Jahre später von R. Kerr gefunden wurden; sie können zusätzlich ein Drehmoment modellieren und somit rotierende schwarze Löcher. Aus physikalischer Sicht ist klar, daß man solche Modelle zur Verfügung haben möchte – schließlich sind praktisch alle Sterne oder schwarzen Löcher nicht statisch, sondern drehen sich. Aber es ist keineswegs selbstverständlich, daß in der Geometrie auch solche miteinander mathematisch und physikalisch konsistente Modelle mit den richtigen Eigenschaften zu finden sind! Kerrs Familie von Lösungen mit Drehmoment, mit genau der richtigen Anzahl freier Parameter, ist heute Grundlage nahezu aller Vorhersagen für das Verhalten rotierender schwarzer Löcher. Aus tiefliegenden geometrischen Eindeutigkeitssätzen folgt, daß es keine weiteren geometrischen Modelle mit den fraglichen Drehsymmetrien gibt, – mit anderen Worten, es gibt genau so viele geometrische Objekte mit den geforderten Eigenschaften, wie man in der Physik braucht.

Über die rotierenden Löcher oder Sterne hinaus, die ihre Gestalt nicht verändern, kann man das Schwarzschildmodell auch noch um Dynamik erweitern: Man kann etwa Objekte betrachten, die nicht ganz rotationssymmetrisch sind, man kann Binärsysteme betrachten oder zwei Objekte, die auf Kollisionskurs sind. Bei diesen Problemen, zu denen man keine exakten, durch Formeln gegebenen Lösungen erwarten kann, untersucht man zunächst Störungen der oben diskutierten exakten Modelle und versucht, das Stabilitätsverhalten von Lösungen der Einsteingleichungen zu verstehen. In vielen Fällen kann man bereits zeigen, daß dann die Lösungen der Einsteingleichungen Eigenschaften haben, die sowohl mit den mathematischen Eigenschaften statischer schwarzer Löcher als auch mit den Erwartungen der Physik übereinstimmen. Insbesondere sagen solche Untersuchungen die Existenz und die Eigenschaften von Gravitationswellen voraus, die man zur Zeit fieberhaft experimentell zu beobachten sucht. Die direkte Beobachtung von Gravitationswellen, deren Form zunächst auf der Basis von Störungen der Schwarzschild- und Kerrlösungen vorhergesagt wurde, wäre ein weiterer Erfolg dieser geometrischen Modelle, der – wie die Vorhersage schwarzer Löcher vor mehr als 50 Jahren – weit über die Newtonsche Theorie hinausgeht.

Zusammenfassend bleibt festzuhalten:

Die Schwarzschildlösung hat als Modell mehrere grundlegende Eigenschaften, die es zu einem besonders erfolgreichen Beispiel der Mathematisierung der Natur machen:

- Die Keplerschen Gesetze der älteren Newtonschen Theorie werden als Grenzfall vom Modell erfaßt, Abweichungen davon werden quantitativ genau vorhergesagt.
- Das Modell ist erweiterbar auf rotierende schwarze Löcher und andere physikalische Phänomene, mit genau der richtigen Anzahl freier Parameter.
- Die Eigenschaften des Modells sind stabil unter kleinen Störungen und erlauben eine Erweiterung auf dynamische Fragestellungen.
- Das Modell stellt eine tiefe Beziehung her zu grundlegenden geometrischen Konzepten von Raum und Zeit und bildet eine Schnittstelle zwischen grundlegenden Objekten der Geometrie, Analysis und der Physik.

Zum Schluß eine etwas provozierende These: Die Geometrie der Schwarzschildlösung als ein Modell für schwarze Löcher wird für immer in unserem Wissen verankert bleiben, solange wir über Geometrie und Gravitationsphänomene nachdenken – genauso wie die Kegelschnitte des Apollonius, die Keplerbahnen und das Newton-Potential. Auch in neuen, fortgeschrittenen Modellen der Gravitation wird die Schwarzschildgeometrie ihren Platz finden, so wie die Keplerbahnen ihren Platz in der allgemeinen Relativitätstheorie haben: Es handelt sich um Wissen, das nicht mehr verlorengeht.