Verallgemeinerung einiger in der Abhandlung über die ausführlichere Bezeichnung der Krystallflächen (s. d. Abh. d. phys. Kl. a. d. J. 1818 u. 19. S. 270-304.) vorgetragenen Lehrsätze.

Von
Hrn. C. S. WEISS.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 26. Februar 1824.]

I. Vollständigerer Ausdruck des a. a. O. S. 277. aufgestellten Lehrsatzes über die Theilung der Dreiecke.

Wir theilten ein Dreieck *ABC* (Fig. 1.) beliebig durch zwei Linien *AD* und *CE*, aus den Ecken *A* und *C* nach beliebigen Punkten *D* und *E* der gegenüberliegenden Seiten gezogen; wir bestimmten durch die einfachsten Formeln das Verhältniſs der Stücke, sowohl der getheilten Seiten des Dreiecks, als der sich einander schneidenden, theilenden Linien selbst, indem von zwei gegebenen Verhältnissen solcher Paare die beiden andern abhängig sind. Wir ziehen jetzt aus der dritten Ecke *B* durch den Schneidungspunkt *F* der Linien *AD* und *CE* die Linie *BQ*, so entstehen uns sechs Paare von Stücken, sowohl der Seiten des Dreiecks, als der theilenden Linien *AD*, *BQ* und *CE*, von welchen immer das gegebene Verhältniſs zweier solcher Paare die übrigen bestimmt. Es treten daher für jedes Paar zehn Gleichungen ein; denn es wird z. B. für jede getheilte Seite des Dreiecks das Verhältniſs der Stücke gefolgert, entweder aus dem gegebenen Verhältniſs der Stücke in den beiden andern, oder aus dem in einer von ihnen und einer der drei inneren Linien, oder endlich aus den dreierlei Combinationen der getheilten inneren Linien, wenn für zwei von ihnen das Verhältnifs ihrer Stücke bekannt ist; und so umgekehrt durch zehn ähnliche Formeln das Verhältnifs der Stücke einer inneren theilenden Linie.

Es ergeben sich für die Bestimmung der Stücke einer Seite des Dreiecks durch die gegebenen Verhältnisse der Stücke der beiden andern, und eben so für die einer inneren getheilten Linie durch die beiden andern überaus einfache Lehrsätze; die übrigen Bestimmungen lassen sich füglich nur durch die Formeln selbst aussprechen.

Es sind nehmlich die Produkte je dreier abwechselnder Stücke der getheilten Seiten des Dreiecks sich gleich, also

$$AE \times BD \times CQ = EB \times DC \times QA$$

folglich $AE : EB = DC \times QA : BD \times CQ$

oder es verhalten sich die Stücke einer getheilten Seite, wie die Produkte der, einem jeden anliegenden und gegenüberliegenden Stücke der beiden andern.

Der Beweis ist eben so leicht zu führen, als der des früheren, a. a. O. S. 277. aufgestellten Lehrsatzes selbst. Wir ziehen aus C sowohl CG parallel mit AD, als CH parallel mit BQ, beide bis zum Durchschnitt mit der verlängerten AB, so ist, wie dort erwiesen wurde,

$$CD : DB = AE \,.\, CF : FE \,.\, AB$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABQ und AHC aber folgt

$$CQ : QA = BH : AB, \text{ oder } BH = \frac{AB \,.\, CQ}{QA}$$

und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke FEB und CEH,

$$CF : FE = BH : EB = \frac{AB \,.\, CQ}{QA} : EB.$$

Also ist $CD:DB = AE \,.\, \frac{AB\,.\,CQ}{QA} : EB\,.\,AB = AE\,.\,CQ : EB\,.\,QA$

folglich $AE\,.\,CQ\,.\,DB = EB\,.\,QA\,.\,CD$, wie oben.

Die übrigen Formeln abzukürzen und überschaulicher zu machen, benennen wir wieder die einzelnen Stücke der getheilten Linien mit einfachen Buchstaben, und um der Anschauung bei der Auffassung der Bedeutung der einzelnen Ausdrücke soviel als möglich zu Hülfe zu kommen, gebrauchen wir für jedes Paar von Stücken einen Vokal mit dem auf ihn folgenden Consonanten in der natürlichen Folge, so dafs wir die Stücke der getheilten Seiten des Dreiecks, a, b; e, f; i, k nennen, die abwechselnden Stücke mit Vokalen, die mit ihnen abwechselnden mit den Consonanten bezeichnend. Wir setzen für die Stücke der getheilten inneren Linien dieselbe Reihe der Vokale, mit den auf sie folgenden Consonanten so fort, dafs wir die Vokale o, u, y den, den Ecken zugekehrten Stücken beilegen, die ihnen folgenden Consonanten p, v, z den den Seiten zugekehrten Stücken, so dafs o, p der gegen die Seite $a + b$; u, v der gegen $e + f$; und y, z der gegen die Seite $i + k$ sich richtenden Linie zukommt. Wir setzen also für AE, a, u.s.f. wie die Fig. 1. zeigt.

Wir geben die Formeln für eine getheilte Seite des Dreiecks unter der Form des Verhältnisses $a:b$, und die für eine getheilte innere Linie unter der Form $o:p$, und fügen jedem den entsprechenden Werth seines Ganzen, d.i. $a+b$ und $o+p$ bei, da es im Gebrauch eben so oft vorkommt, dafs das Verhältnifs eines Stückes zu seinem Ganzen das unmittelbar gesuchte ist, als das der Stücke zu einander, und da bald in einem der ersteren, bald in einem der anderen Verhältnisse die einfachere Regel unmittelbar sich ausspricht.

Von den je zehn Proportionen für die Bestimmung der Stücke einer äufseren sowohl als einer inneren Linie des Dreiecks konnten drei aus dem Lehrsatz, wie wir ihn in der früheren Abhandlung vortrugen, unmittelbar abgeleitet werden (1); drei andere sind die nemlichen Proportionen, nur das dritte gleichartige Element, sei es Seite des Dreiecks oder theilende Linie, einem der beiden ersten substituirt. Von den vier übrigen Proportionen sind wiederum zwei ähnliche Gegenstücke zu einander mit Austausch analog liegender Theile als gegebener; drei aber sind, wesentlich verschieden unter sich und von den ersten sechs, Folgen der Erweiterung des Lehrsatzes. Ueberhaupt also sind von den zu gebenden je zehn Proportionen sechs wesentlich verschiedener Construction, vier aber als Wiederholungen von vieren der sechs anzusehen.

Die Art wie wir aus den ersten, durch die geometrische Demonstration unmittelbar erhaltenen Proportionen, die übrigen finden, bedarf keiner ausführlichen Erörterung. Wir suchen z. B. die Theilung einer innern Linie, wenn uns die der beiden andern innern Linien gegeben ist. So giebt uns der frühere Lehrsatz unmittelbar (2)

$$o : p = uf + v\,(e+f) : ue.$$

(1) Alle Proportionen nemlich, wie sie in dem früher vorgetragenen Lehrsatz direct begründet waren, wo wir y und x nannten, was jetzt e und f, n und m, was jetzt o und p, und v und w, was jetzt u und v genannt ist, waren vollständig diese:

$$x : y : x+y = \begin{cases} na : m\,(a+b) : na + m\,(a+b) \\ aw : bv - aw : bv \\ nv - mw : m\,(v+w) : v\,(n+m) \end{cases}$$

$$a : b : a+b = \begin{cases} vx : w\,(x+y) : vx + w\,(x+y) \\ mx : ny - mx : ny \\ nv - mw : w\,(n+m) : n\,(v+w) \end{cases}$$

$$n : m : n+m = \begin{cases} x\,(a+b) : ya : ya + x\,(a+b) \\ w\,(a+b) : vb - wa : b\,(v+w) \\ vx + w\,(x+y) : vy : (v+w)\,(x+y) \end{cases}$$

$$v : w : v+w = \begin{cases} a\,(x+y) : bx : bx + a\,(x+y) \\ m\,(x+y) : ny - mx : y\,(n+m) \\ na + m\,(a+b) : nb : (n+m)\,(a+b) \end{cases}$$

Je drei solche sind es, welche sich in der nunmehrigen, verallgemeinerten Aufstellung, unter veränderten Buchstaben, wiederfinden; sie beruhen auf folgenden vier Grundgleichungen: I. $nya = mx\,(a+b)$; II. $vbx = wa\,(x+y)$; III. $vbn = w\,(an+am+bm)$; oder $w\,(a+b)\,(n+m) = bn\,(v+w)$; IV. $nyv = m\,(xv+xw+yw)$; oder $m\,(x+y)\,(v+w) = yv\,(n+m)$.

(2) Es ist dies die Uebersetzung der Formel $n : m = vx + w\,(x+y) : vy$, wie sie in der vorigen Note hiefs, in die gegenwärtige Bezeichnung.

Wir müssen jetzt e und f in u und v, und y und z auflösen. Dies geschieht durch Anwendung einer andern Formel des nemlichen Lehrsatzes

$$e : f : e + f = uy - vz : z(u+v) : u(y+z) \text{ (}^1\text{)}.$$

So ist

$$o : p = uz(u+v) + vu(y+z) : u(uy-vz) = z(u+v) + v(y+z) : uy - vz$$

und $o : p : o + p = z(u+v) + v(y+z) : uy - vz : (u+v)(y+z)$.

Folgendes sind nun die Proportionen zur Auffindung des Verhältnisses der Stücke, sei es einer getheilten Seite des Dreiecks, oder einer getheilten inneren Linie desselben, aus zwei gegebenen andern.

$$a : b : a + b = \begin{cases} fk : ei : ei + fk \\ uf : v(e+f) : uf + v(e+f) \\ z(i+k) : yi : yi + z(i+k) \\ fp : eo - fp : eo \\ ko - ip : ip : ko \\ iu - kv : iv : iu + v(i-k) \\ fz : fy - ez : fy + z(f-e) \\ ou - pv : v(o+p) : o(u+v) \\ z(o+p) : oy - pz : o(y+z) \\ z(u+v) : v(y+z) : z(u+v) + v(y+z) \end{cases}$$

$$o : p : o + p = \begin{cases} f(a+b) : ea : ea + f(a+b) \\ i(a+b) : kb : kb + i(a+b) \\ fk + ei : ek : ei + k(e+f) \\ v(a+b) : ub - va : b(u+v) \\ z(a+b) : ya - zb : a(y+z) \\ uf + v(e+f) : ue : (u+v)(e+f) \\ yi + z(i+k) : yk : (y+z)(i+k) \\ f(y+z) - ez : ez : f(y+z) \\ i(u+v) - kv : kv : i(u+v) \\ z(u+v) + v(y+z) : uy - vz : (u+v)(y+z) \end{cases}$$

Die letzte Formel führt offenbar auf den Ausdruck

$$\frac{o}{o+p} = \frac{z}{y+z} + \frac{v}{u+v}$$

(¹) Die Formel der vorigen Note

$$a : b : a + b = nv - mw : w(n+m) : n(v+w)$$

wird hier so angewendet, dafs e für a, f für b gesetzt wird; dann mufs u für n, v für m, y für v, und z für w gesetzt werden; und so in ähnlichen Fällen.

welches in Worten ausgedrückt, soviel heifst als: von einer getheilten inneren Linie ist das gegen die Ecke gekehrte Stück von seinem Ganzen der so vielste Theil, als die Summe der Theile, welche die gegen die Seiten gekehrten Stücke der beiden andern innern Linien von ihren Ganzen sind.

Wenn aber $\frac{o}{o+p} = \frac{z}{y+z} + \frac{v}{u+v}$, so ist auch

$$\frac{u}{u+v} = \frac{z}{y+z} + \frac{p}{o+p}, \text{ und}$$

$$\frac{y}{y+z} = \frac{p}{o+p} + \frac{v}{u+v}$$

Es ist also offenbar

$$\frac{o}{o+p} + \frac{u}{u+v} + \frac{y}{y+z} = 2 \cdot \left(\frac{p}{o+p} + \frac{v}{u+v} + \frac{z}{y+z}\right)$$

oder: die Summe der Quotienten, welche die gegen die Ecken gekehrten Stücke der getheilten innern Linien von ihren Ganzen ausdrücken, ist doppelt so grofs, als die Summe derer, welche die gegen die Seiten gekehrten Stücke ausdrücken.

Da aber ferner $\frac{p}{o+p} = 1 - \frac{o}{o+p}$, und

$$\frac{z}{y+z} = \frac{o}{o+p} - \frac{v}{u+v} \text{ oder } \frac{v}{u+v} = \frac{o}{o+p} - \frac{z}{y+z},$$

so ist $\frac{p}{o+p} + \frac{v}{u+v} + \frac{z}{y+z} = 1 - \frac{o}{o+p} + \frac{o}{o+p} - \frac{z}{y+z} + \frac{z}{y+z} = 1$

kurz
$$\frac{p}{o+p} + \frac{v}{u+v} + \frac{z}{y+z} = 1$$

und
$$\frac{o}{o+p} + \frac{u}{u+v} + \frac{y}{y+z} = 2$$

mit Worten ausgedrückt: Die Summe der Quotienten, welche die gegen die Seiten des Dreiecks gerichteten Stücke der getheilten inneren Linien im Verhältnifs zu ihren Ganzen ausdrücken, ist Eins; die Summe derer, welche die gegen die Ecken gerichteten Stücke ausdrücken, ist gleich Zwei; ein Satz, der durch seine Allgemeinheit — denn bisher kannte man ihn wohl nur beiläufig für den Fall, wenn die theilenden Linien aus den Ecken nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogen sind — in seiner hier erwiesenen Allgemeinheit, sage ich, gewifs nicht minder merkwürdig ist, als jener zuerst vorgetragene, welcher die getheilten Seiten des Dreiecks betraf, und die Gleichheit der Produkte je dreier abwechselnder Stücke derselben aussprach.

II. Verallgemeinerung der in der angeführten Abhandlung S. 275 und 300 gegebenen ausführlichen Zeichen der Krystallflächen des sphäroëdrischen Systems.

In jenen Zeichen gaben wir an, wieviel eine Fläche, von welcher bekannt ist, wieviel sie abschneidet in jeder der drei Grunddimensionen des Systems, d. i. in den gröfsten Octaëderdimensionen oder den auf den Würfelflächen senkrechten, zugleich abschneidet in jeder der sechs mittleren zwischen je zwei der vorigen, d. i. in jeder der sechs auf den Granatoëderflächen senkrechten; ferner in jeder der vier kleinsten Octaëderdimensionen, oder der auf den Octaëderflächen senkrechten, d. i. der mittleren zwischen je drei der ersten; endlich in jeder der zwölf auf den Flächen des Leucitkörpers senkrechten, d. i. der mittleren zwischen den letzteren und den ersteren, so wie zugleich zwischen je zwei benachbarten der zweiten Gattung. Ob nun gleich nicht allein von allen den genannten fünfundzwanzig Dimensionen Rechenschaft gegeben, sondern auch positive und negative Werthe in ihnen unterschieden werden mufsten, so vereinigte sich doch in dem gegebenen bildlichen Zeichen die bestimmte Beziehung jeder möglichen Stelle im Bilde auf alles zu unterscheidende in den Dimensionen mit der höchsten Einfachheit aller auszudrückenden Werthe und ihrem harmonischen Zusammenhang untereinander so glücklich, dafs, auch abgesehen von den mannichfaltigen Vortheilen, welche ein solches Bild für die Berechnung der Körper des sphäroëdrischen Systems und ihrer Eigenschaften gewährt, ihm sein geometrisches Interesse für sich bleibt. Es scheint mir, dafs eben in diesem die Aufforderung liegt, dem Bilde die gröfstmögliche Allgemeinheit zu geben, und es auf die entsprechenden Werthe in allen und jeden erdenklichen zwischenliegenden Dimensionen auszudehnen. Dies gelingt in ähnlicher Einfachheit, wie sie sich schon in der ersten Gestalt des Bildes ankündigte; und ich erlaube mir, es hier schrittweise bis zu seiner allergenerellsten Gestalt fortzuführen, da jede der Stufen seiner Verallgemeinerung ihr eigenthümliches Interesse hat.

§. 1.

Suchen wir fürs erste die Werthe in den zwischenliegenden Dimensionen zwischen jenen sechs mittleren Octaëderdimensionen und den drei Grunddimensionen, so sind dies solche, welche senkrecht stehen werden auf den Flächen der verschiedenen möglichen Pyramidenwürfel. Es ist klar, dafs ihre Stellen in unserm Bilde liegen müssen in den Seiten des Dreiecks und deren Verlängerungen, immer je zwei zu beiden Seiten einer solchen Stelle, wie $\frac{2}{n+1}$ u. s. f., welche der auf der Granatoëderfläche senkrechten Dimension angehörte, d. i. zwischen einer solchen und den Stellen der drei Grunddimensionen oder ihrer Entgegengesetzten, d. i. der negativen Werthe der Grunddimensionen (deren Stellen im Bilde, in der Verlängerung im Unendlichen liegen sowohl von den Seiten des Dreiecks, als von jeder Richtung, die von den Stellen der drei Grunddimensionen aus irgend wohin gezogen wird). In den Granatoëderflächen fallen je zwei Pyramidenwürfelflächen in Eine, und so die entsprechenden Stellen in unserm Bilde ebenfalls.

Es sei nun die Pyramidenwürfelfläche, in deren Normalen oder Senkrechten die verschiedenen Werthe gesucht werden, nach einem allgemeinen Ausdruck = $\boxed{a : z . a : \infty a}$, und irgend eine gegebene Fläche, deren Werthe in den auf $\boxed{a : z . a : \infty a}$ senkrechten Dimensionen gesucht werden, heifse wiederum, wie wir sie früher bezeichnet haben $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$, so findet sich, wenn als Einheit in der neuen

Dimension angenommen wird die Linie im Octaëder aus dem Mittelpunkt nach demjenigen Punkte der Octaëderkante gezogen, in welchem die Octaëderkante von der neuen (durch den Mittelpunkt des Octaëders gelegten) Dimension geschnitten wird, die gesuchte Gröfse als diese Einheit multiplicirt mit einem Coëfficienten von der Form $\frac{z+1}{1.z+n.1}$, $\frac{z+1}{n.z+1.1}$ u. s. f. — man vergleiche Fig. 2. — so dafs der Zähler des Bruches allen zu unterscheidenden achtzehn Werthen (¹) gemeinschaftlich ist, der Nenner aber die Summe der Produkte der Divisoren in den Werthen der Grunddimensionen, zwischen welchen die gesuchte liegt, der Divisor der ihr zunächst liegenden multiplicirt mit z, der andere multiplicirt mit 1. Die Einheit der neuen Dimension δ aber, ausgedrückt in der Einheit des ganzen Systems, d. i. der Grunddimension selbst, oder die halbe Octaëderaxe $= 1$ gesetzt, ist

$$\delta = \frac{\sqrt{z^2+1}}{z+1}$$

Daher, wenn man eine jede der gesuchten Gröfsen unmittelbar in der Einheit des Systems ausdrücken will, der gemeinschaftliche Zähler aller Coëfficienten, $z+1$, nur zu vertauschen ist mit $\sqrt{z^2+1}$; die gesuchten Werthe sind also in dieser Einheit $\frac{\sqrt{z^2+1}}{z+n}$, $\frac{\sqrt{z^2+1}}{n.z+1}$ u. s. f. In dem Bilde selbst aber werden wir, wie bisher, die Coëfficienten der neuen Dimensionseinheit als solche, im Zähler mit $z+1$ schreiben.

Wird $z = 1$ gesetzt, so haben wir offenbar die mittleren Octaëderdimensionen selbst, oder die senkrechten auf den Granatoëderflächen $= \boxed{a : a : \infty a}$; und je zwei Werthe, wie die oben geschriebenen, fallen zusammen in den Werth $\frac{2}{n+1}$, d. i. in den, welchen unser frü-

(¹) Von den zwölf neuen Dimensionen sind wiederum in sechsen die der geschriebenen Fläche zukommenden Werthe, an den Stellen nemlich, welche innerhalb unsers Dreiecks liegen, nothwendig positiv; ihre negativen sind daher im Bilde ausgeschlossen. In den sechs andern aber kann der geschriebenen Fläche der Werth sowohl in positivem als in negativem Sinne zukommen; daher hat unser Zeichen $6+12$, d. i. achtzehn verschiedene Stellen, welche sich auf diese Dimensionen beziehen, zu unterscheiden; und eben soviel wirklich correspondirende Stellen giebt es in demselben.

heres Bild für den Werth in einer mittleren Octaëderdimension, deren Einheit wir d nannten, angab; der Werth $\sqrt{z^2+1}$ wird $= \sqrt{2}$, wie dies die Gröfse war, welche den Zählern der Coëfficienten der mittleren Octaëderdimensionen substituirt werden konnte, um diese Coëfficienten in die absoluten Werthe, wenn die Grunddimension $= 1$ gesetzt ist, überzutragen.

In der Fig. 2. sind die achtzehn verschiedenen Werthe, welche einer und derselben Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$ in den verschiedenen Richtungen zukommen, die senkrecht sind auf $\boxed{a' : z . a'' : \infty a'''}$, $\boxed{z . a' : a'' : \infty a'''}$, $\boxed{a' : \infty a'' : z . a'''}$, $\boxed{z . a' : \infty a'' : a'''}$, $\boxed{\infty a' : a'' : z . a'''}$, $\boxed{\infty a' : z . a'' : a'''}$; ferner auf $\boxed{a' : -z . a'' : \infty a'''}$, $\boxed{-z . a' : a'' : \infty a'''}$ u. s. f., die letzteren positiv oder negativ genommen, an den entsprechenden Stellen in den Seiten des Dreiecks und deren Verlängerungen geschrieben.

Der Beweis für die Richtigkeit des Schema's ist dieser:

Es sei in Fig. 3. C der Mittelpunkt unsrer Construction; Ca und Cb zwei halbe Axen des Octaëders, also ab die Kante des Octaëders, dessen Mittelpunkt C ist. Es sei $CF = z . Cb = z . Ca$, also aF der Durchschnitt einer Fläche $\boxed{a : z . a : \infty a}$ mit der Ebne Cab; so ist Ct, aus C senkrecht auf aF, zugleich senkrecht auf der Ebne $\boxed{a : z . a : \infty a}$, also eine der auf den Flächen des Pyramidenwürfels $\boxed{a : z . a : \infty a}$ senkrechten Dimensionen. Wir fragen zuerst: in welchem Punkte o schneidet diese Dimension die Octaëderkante ab? und welches ist der Werth von Co, d. i. der Einheit dieser neuen Dimension für das Octaëder, dessen halbe Axe $Ca = 1$? So haben wir $at : tF = a^2 : z^2 a^2 = 1 : z^2$ und nach unserm Lehrsatz

$$ao : ob = at . CF : tF . Cb = 1 . z : z^2 . 1 = 1 : z$$
$$ao : ob = 1 : z$$

wodurch der Punkt o bestimmt ist.

So wie nun $ob = \frac{z}{z+1}\, ab$, und $ao = \frac{1}{z+1}\, ab$,

so ist auch $Ch = \frac{z}{z+1}\, Ca$, und $ho = \frac{1}{z+1}\, Ca$; folglich

$$Co = \sqrt{(Ch)^2 + (ho)^2} = \sqrt{\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{z+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{z^2+1}}{z+1}$$

Die Einheit der neuen Dimension ist also im Octaëder $= \frac{\sqrt{z^2+1}}{z+1}$, wie wir oben sagten.

Es sei nun eine Fläche gegeben $= \boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ mit beliebigen Werthen in den drei Grunddimensionen; ihr Werth in Ca sei $\frac{1}{m}\ Ca$; in Cb, $\frac{1}{n}\ Cb$. Wir legen sie durch den Endpunkt a der ersteren, so dafs ag ihr Durchschnitt mit der Ebne Cab ist; so ist $Cg = \frac{m}{n}\ Cb$, $gb = \left(1 - \frac{m}{n}\right) Cb = \frac{n-m}{n}\ Cb$, also $Cg : gb = m : n - m$ und wir haben nach unserm Lehrsatze $o : o + p = f\,(a+b) : ea + f\,(a+b)$ in Fig. 3., $Cr : Co = Cg \,.\, ab : gb \,.\, ao + Cg \,.\, ab =$

$$m \,.\, (z+1) : (n-m)\, 1 + m\,(z+1) = m\,(z+1) : n \,.\, 1 + m \,.\, z$$

$$Cr = \frac{m\,(z+1)}{n \,.\, 1 + m \,.\, z}\ Co$$

Aber Cr ist der Werth in der Dimension Co, welcher der Fläche $\boxed{a : \frac{m}{n}a : \frac{m}{p}a}$, d.i. der obengenannten Fläche, durch den Endpunkt des ersten a in der Einheit gelegt, zukommt; der entsprechende Werth für die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ also ist $\frac{1}{m} \,.\, Cr = \frac{z+1}{n \,.\, 1 + m \,.\, z}\ Co.$

Mit z ist, wie wir sehen, im Nenner des Bruchs der Divisor desjenigen a der gegebenen Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ zu multipliciren, welches in der Fläche $\boxed{a : z \,.\, a : \infty a}$ in der Einheit angenommen wurde, und senkrecht war auf dem, worin die letztere mit $z \,.\, a$ genommen wurde; mit 1 umgekehrt der Divisor desjenigen, welches für die Fläche $\boxed{a : z \,.\, a : \infty a}$ als $z \,.\, a$ genommen wurde, und senkrecht war auf jenem, in welchem für sie $1 \,.\, a$ genommen war.

Setzen wir nun für unser Schema, Fig. 2. in der Formel des Coëfficienten $\frac{z+1}{n \,.\, 1 + m \,.\, z}$ für m, 1, für n unverändert n, d.i. statt der Form $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ unser gewöhnliches Zeichen $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$ (also n' für p), so wird der Coëfficient $= \frac{z+1}{z+n}$, wie an der Stelle unsres Schema, welcher die Pyramidenwürfelfläche $\boxed{a : z \,.\, a : \infty a}$ entspricht, der in dem ersten a, $1a$, während ihr in der Richtung des $\frac{1}{n}\ a$, $z.a$ zukommt. Wir unterscheiden also die drei a, so ist für den gegenwärtigen

Fall der gefundene Coëfficient der, welcher der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a' : z . a'' : \infty a'''}$ zukommt.

Setzen wir umgekehrt in dem allgemeinen Coëfficienten für m, das n unsrer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$, und für n, 1, so wird der Coëfficient $= \frac{z+1}{1+nz} = \frac{z+1}{nz+1}$, wie an der Stelle unsers Schema's, welche der Pyramidenwürfelfläche mit $z . a$ im ersten a, und mit $1 . a$ im zweiten unsrer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$ gehört; oder der gefundene Coëfficient ist der der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{z . a' : a'' : \infty a'''}$ zukommende.

Setzen wir für m wiederum n, und für n unser n', so haben wir $\frac{z+1}{nz+n'}$; und dieser Coëfficient gehört der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{\infty a' : a'' : z . a'''}$. Oder setzen wir für m unser n', für n ungeändert n, so erhalten wir $\frac{z+1}{n'z+n}$, als den Coëfficienten für die Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{\infty a' : z . a'' : a'''}$. Man sieht diese Werthe in unserm Schema an den correspondirenden Stellen.

Ist die Rede von einer Dimension, senkrecht auf der Fläche $\boxed{-a' : z . a'' : \infty a'''}$ und dem Werthe, welcher der gegebnen Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ in dieser Dimension zukommt, so wird z mit dem Divisor des ersten a im letzteren Zeichen, d. i. mit 1, das n oder der Divisor des zweiten a aber mit -1 zu multipliciren sein. Im Coëfficienten $\frac{z+1}{n . 1 + m . z}$ wird also $n . 1$ zu $-n$, und $m . z$ zu z; er wird also zu $\frac{z+1}{z-n}$.

Ist die Rede von der Dimension senkrecht auf $\boxed{-z . a' : a'' : \infty a'''}$, so ist $-z$ mit n zu multipliciren oder im allgemeinen Coëfficienten für mz zu setzen $-nz$, für $n . 1$ aber 1. Der Coëfficient also, der für die Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{-z . a' : a'' : \infty a'''}$ gilt, ist $\frac{z+1}{1-nz}$.

Da die beiden Gröfsen $z - n$ und $1 - nz$ negativ sein können, d. i. die Werthe der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ in den Dimensionen senkrecht auf $\boxed{-a' : z'' : \infty a'''}$ oder $\boxed{-z . a' : a'' : \infty a'''}$ in umgekehrten Richtungen Statt finden können, so unterscheidet unser Schema, wie das frühere, diese umgekehrte Lage eines solchen Werthes durch die derselben Dimension auf der Verlängerung einer Seite des Dreiecks nach entgegengesetzter Richtung zukommenden zwei entgegengesetzten Stellen; an der einen ist der Divisor des Coëfficienten der oben geschriebene, an der andern sein entgegengesetzter $n-z$ oder $nz-1$. Der erstere, d.i. der oben geschriebene, wird der Seite angehören, wo das erste a positiven Werth hat, der umgekehrte der, wo das erste a im negativen Werthe genommen ist, oder deren Stellen Richtungen bezeichnen, welche zwischen dem zweiten a im positiven Sinne, und dem Negativen des ersten liegen.

Dieselben Betrachtungen, welche anstatt der für die einzelnen Fälle angepaſsten geometrischen Constructionen dienen, wiederholen sich in Bezug auf alle übrigen Stellen, die unser Schema in den Seiten des Dreiecks und ihren Verlängerungen angiebt. Die gegenseitige Lage je zweier Stellen für die zwischen denselben zwei Grunddimensionen liegenden, je nachdem nemlich eine bestimmte von beiden der einen Grunddimension näher liegt, oder der andern, entspricht der Lage der Dimensionen im Raume selbst unter der Voraussetzung, daſs $z>1$. Nähme man $z<1$, so würden die entsprechenden Stellen mit ihren Coëfficienten ihre Lage je zwei vertauschen, so wie in dem Fall $z=1$ sie je zwei in Eins zusammen fallen.

§. 2.

Die Flächen der Pyramidenwürfel gehören bekanntlich der Kantenzone des Würfels. Wir wenden uns jetzt zur Entwicklung der Werthe, welche der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n}a}$ in solchen Richtungen zukommen, welche senkrecht sind auf Flächen aus der Hauptzone des Octaëders, d.i. der Ecken- oder Diagonalzone des Würfels.

Es werden also die jetzt zu untersuchenden Dimensionen senkrecht sein auf den Flächen der Leucitoïde mit Inbegriff des Leucitoëders, oder auf den Flächen der Pyramiden-Octaëder, je nachdem sie liegen zwischen den Grunddimensionen und einer kleinsten Octaëderdimension, oder zwischen einer kleinsten und einer mittleren, die auf ihnen senkrechten Flächen also zwischen einer Würfelfläche und Octaëderfläche, oder zwischen einer Octaëder- und Granatoëderfläche. Die allgemeine Eigenschaft einer Fläche aus der Hauptzone des Octaëders ist, dafs in zwei unsrer Grunddimensionen ihr gleiche Werthe zukommen, was wir im allgemeinen ausdrücken können mit der Form $\boxed{z.a:z.a:a}$. Ist $z > 1$, so haben wir Leucitoïdflächen; ist $z < 1$, Pyramidenoctaëderflächen. Der Fall $z = 1$ ist der des Octaëders selbst, als die Mitte zwischen jenen beiden Abtheilungen. Die Grenzglieder wären $z = \infty$, d. i. die Würfelfläche, oder $z = \frac{1}{\infty}$, die Granatoëderfläche. So war im vorigen die allgemeine Eigenschaft einer Pyramidenwürfelfläche $\boxed{a:z.a:\infty a}$ der Parallelismus mit einer der Grunddimensionen, oder ∞ als Coëfficient von einer derselben; die Mitte $z = 1$ war der Fall des Granatoëders, die beiden Endglieder $z = \infty$ und $z = 0$ beidemal der Fall des Würfels; und man wird nicht allein auch diese Grenzfälle in den Formeln unsers Schema's mit begriffen, sondern auch bei der nähern Vergleichung bestätigt finden, was wir vorhin von dem Tausch der Stellen sagten, wenn z, was wir > 1 annehmen, < 1 gesetzt wird.

Die Fig. 2. enthält neben den vorigen Werthen zugleich die (21) neuen, welche einer Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n}a}$ in den zwölf gleichartigen Dimensionen senkrecht auf beliebigen Flächen der Hauptzone des Octaëders zukommen, drei derselben innerhalb des Dreiecks, deren negative Werthe ausgeschlossen sind, wenn die Werthe in den Grunddimensionen positiv gegeben waren, die neun übrigen mit den negativen Werthen derselben, wie bald die einen, bald die andern der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n}a}$ zugehören können, an entsprechenden, sich entgegengesetzten Stellen aufserhalb des Dreiecks in den sechs, durch die verlängerten Seiten gesonderten Räumen. Die einundzwanzig neuen Werthe sind sogleich kenntlich durch ihren gemeinschaftlichen Zähler $z + 2$, welcher sie wieder, wie die vorigen der Zähler $z + 1$, auszeichnet. Die Stellen, die wir ihnen geben, entsprechen wieder der Voraussezung $z > 1$ in der Fläche $\boxed{z.a:z.a:a}$, in deren Normalen die der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n}a}$ zugehörigen Stücke bestimmt werden sollen; und so entspricht diese

Voraussetzung dem Fall, dafs es Leucitoïde sind, denen die Flächen $\boxed{z.a:z.a:a}$ angehören; es sind daher die nemlichen Stellen, die wir für die Werthe in den Richtungen senkrecht auf den Flächen des Leucitoëders selbst, d.i. auf den Flächen $\boxed{2a:2a:a}$ in dem Schema der früheren Abhandlung, S. 300. mit den Coëfficienten bezeichnet haben, welche den gemeinschaftlichen Zähler 4 hatten. Wenn $z=1$ wird, so ist es die Octaëderfläche $\boxed{a:a:a}$, von deren Normalen die Rede ist; der Coëfficient bekommt zum Zähler 3, wie in den früheren Schemen die Coëfficienten der auf den Octaëderflächen senkrechten, d. i. der kleinsten Octaëderdimensionen; und je drei unserer neuen Coëfficienten mit den Zählern $z+2$ fallen dann in Eins zusammen.

Wird $z<1$, sind es also Pyramidenoctaëderflächen, in deren Normalen die der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n}a}$ zugehörigen Stücke bestimmt werden sollen, so rückt die in dem Schema einer jeden derselben gebührende Stelle über den Punkt, wo je drei zusammenfielen, nach der entgegengesetzten Seite hinüber, und die drei innerhalb des Dreiecks z.B. liegenden Werthe bilden in demselben ein umgekehrtes, mit den Spitzen gegen die Seiten des grofsen gerichtetes Dreieck, statt dafs in unserm Schema es ein gleichförmig in das grofse eingeschriebenes Dreieck ist, welches ihre Stellen unter sich bilden. Von je dreien in einem Ausschnitt aufserhalb des Dreiecks geschriebenen Coëfficienten mit den Zählern $z+2$ gilt ganz das analoge; sie fallen auch je drei in Einen Punkt und Einen Werth zusammen, wenn $z=1$ ist, und treten in entgegengesetzten Richtungen wieder auseinander, wenn $z<1$ wird.

In den Nennern der Coëfficienten sieht man im Schema auch die gewohnte Einfachheit, und zwar mit z immer den Divisor derjenigen Grunddimension für $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n}a}$ multiplicirt, welche dem geschriebenen Coëfficienten am nächsten liegt, die beiden andern Divisoren unverändert oder mit 1 multiplicirt; die Summe der so multiplicirten Divisoren aber macht den Nenner des Coëfficienten aus. Die gröfseren Ausschnitte haben zu ihren Grenzen zwei Grunddimensionen in den positiven Werthen des Dreiecks, die dritte im negativen Werth, die Grenze des Ausschnitts im Unendlichen bildend. Die kleineren Ausschnitte haben zu ihren Grenzen eine der Grunddimensionen des Dreiecks in positivem Sinn, beide andre im negativen in den Verlängerungen der einschliefsenden Seiten im Unendlichen liegend. Welche Grunddimensionen zur Bildung des einen oder des andern Ausschnittes in negativem Werthe concurriren, diese gehen überall in demselben negativen Werthe auch in den Nenner des Coëfficienten ein, multiplicirt, wie vorhin, mit denselben Factoren.

Die Einheit in der neuen Dimension, womit die Coëfficienten sammt und sonders wieder zu multipliciren sind, ist abermals die dem Octaëder zukommende, also die Linie aus dem Mittelpunkt des Octaëders nach demjenigen Punkte der Oberfläche des Octaëders gezogen, in welchem dieselbe von der neuen Dimension geschnitten wird. Diese Linie λ, ausgedrückt in der Einheit des ganzen Systems, d.i. die halbe Octaëderaxe $= 1$ gesetzt, erhält den Ausdruck

$$\lambda = \frac{\sqrt{z^2+2}}{z+2}$$

und so verwandeln sich wiederum alle neuen Coëfficienten in ihre wahren Werthe, die halbe Octaëderaxe $= 1$, wenn statt ihrer gemeinschaftlichen Zähler $z+2$ gesetzt wird $\sqrt{z^2+2}$. In dem Schema für die auf den Leucitflächen senkrechten Dimensionen (wo $z = 2$) war der so in die absoluten Werthe übersetzte gemeinschaftliche Zähler $\sqrt{2^2+2} = \sqrt{6}$, und die Einheit in der entsprechenden Octaëderdimension war $\frac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Wir ziehen es indefs wiederum vor, in dem Schema die Coëfficienten als solche zu schreiben, da $z+2$ für diesen Zweck ein kürzerer und bequemerer Werth ist als $\sqrt{z^2+2}$.

Der Beweis für die Richtigkeit der angegebnen Werthe ist wieder eben so einfach als im vorigen Fall.

Es sei in Cad, Fig. 4. Ca eine Linie aus dem Mittelpunkt C unsrer Construction oder des Octaëders nach der Ecke desselben, also $Ca =$ einer halben Octaëderaxe $= a = 1$; d sei die Mitte einer Octaëderkante, welche die Endpunkte der beiden andern Grunddimensionen a verbindet; also $Cd = \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; so wird eine Fläche $\boxed{z.a:z.a:a}$ durch aF

gehen, wenn $FC = z \,.\, Cd$, Cd aber die zwischen $z.a$ und $z.a$ liegende mittlere Octaëderdimension ist. Die Linie Ct senkrecht auf aF gezogen, steht dann auch senkrecht auf der Fläche $\boxed{z.a:z.a:a}$. Wir setzen wieder die erste Frage: welches ist der Punkt o in der Octaëderdiagonale ad, in welchem die letztere von der auf $\boxed{z.a:z.a:a}$ senkrechten Ct geschnitten wird? ferner: welches ist der Werth von Co, d.i. der Einheit in dieser Octaëderdimension? So ist fürs erste

$$at : tF = (Ca)^2 : (CF)^2 = 1 : \frac{z^2}{2} = 2 : z^2$$

ferner $\qquad Cd : CF = 1 : z$

und nach unserm Lehrsatz $o : p = i\,(a+b) : kb$

$$ao : od = at \,.\, CF : tF \,.\, CD = 2 \,.\, z : z^2 \,.\, 1 = 2 : z$$

also die Octaëderdiagonale getheilt im Verhältnifs $2 : z$

und $Co = \sqrt{(Ch)^2 + (ho)^2} = \sqrt{\left(\frac{z}{z+2}\right)^2 + \left(\frac{2}{z+2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{z^2+2}}{z+2}$

also die Einheit der neuen Dimension, wie oben gesagt war, $= \frac{\sqrt{z^2+2}}{z+2}$

Nun nehmen wir wieder statt der Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n}\,a : \frac{1}{n'}\,a}$ einen noch allgemeineren Ausdruck $\boxed{\frac{1}{m}\,a : \frac{1}{n}\,a : \frac{1}{p}\,a}$, so dafs ihr in der Richtung Ca der Fig. 4. $\frac{1}{m}\,a$ zukomme. Wir legen sie durch den Endpunkt a der Linie Ca, d.i. wir nehmen sie in den Abständen vom Mittelpunkt $= \boxed{a : \frac{m}{n}\,a : \frac{m}{p}\,a}$, so kommt ihrem Durchschnitt ag mit der Ebne Cad der Werth $Cg = \frac{2m}{n+p}\,Cd$ in der mittleren Octaëderdimension Cd zu, wie aus dem früheren Schema einleuchtet; und

$$Cg : dg = \frac{2m}{n+p} : 1 - \frac{2m}{n+p} = 2m : n + p - 2m.$$

Gesucht wird nun zunächst, wenn r der Durchschnitt von ag mit Ct ist, das Verhältnifs von Cr zu Co. Dieses giebt nach unserm Lehrsatz die Formel

$$o : o + p = f(a+b) : ea + f(a+b)$$

Demnach $Cr : Co = Cg \,.\, ad : dg \,.\, ao + Cg \,.\, ad =$
$2m\,(z+2) : (n+p-2m)\,2 + 2m\,(z+2) = m\,(z+2) : n+p+mz$

also $Cr = \frac{m\,(z+2)}{n+p+mz}\,Co$

Nun aber kommt der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{p}a}$ in der Dimension Ct nicht Cr, sondern $\frac{1}{m}Cr$, d.i. $\frac{z+2}{n+p+mz}Co$ zu.

Mit z wird im Nenner des Coëfficienten, wie man sieht, der Divisor derjenigen Grunddimension der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{p}a}$ multiplicirt, welche in gleicher Richtung genommen wurde mit der des $1a$ im Zeichen der Fläche $\boxed{z.a:z.a:a}$. Schreiben wir also mit Unterscheidung der a die erstere $\boxed{\frac{1}{m}a^{\cdot}:\frac{1}{n}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{p}a^{\cdot\cdot\cdot}}$, so ist es die Fläche $\boxed{z.a^{\cdot\cdot}:z.a^{\cdot\cdot\cdot}:a^{\cdot}}$ oder $\boxed{a^{\cdot}:z.a^{\cdot\cdot}:z.a^{\cdot\cdot\cdot}}$, in deren Normale ihr der Werth $\frac{z+2}{n+p+mz}Co$ zukommt. Und damit werden wir wieder die Regel der Entwickelung sämmtlicher Coëfficienten für den Werth der Fläche $\boxed{a^{\cdot}:\frac{1}{n}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in den Richtungen senkrecht auf $\boxed{a^{\cdot}:z.a^{\cdot\cdot}:z.a^{\cdot\cdot\cdot}}$, auf $\boxed{z.a^{\cdot}:a^{\cdot\cdot}:z.a^{\cdot\cdot\cdot}}$, $\boxed{z.a^{\cdot}:z.a^{\cdot\cdot}:a^{\cdot\cdot\cdot}}$, $\boxed{-a^{\cdot}:z.a^{\cdot\cdot}:z.a^{\cdot\cdot\cdot}}$ u.s.f. haben, ohne der speciellen Ausführung der geometrischen Constructionen für die Fälle der verschiedenen Combinationen zu bedürfen.

Genauer ausgedrückt, würde indefs die Regel diese sein: Wir haben uns beide Flächen vorzustellen unter der Form $\boxed{\frac{1}{1}a^{\cdot}:\frac{1}{n}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ und $\boxed{\frac{1}{z}a^{\cdot}:\frac{1}{1}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{1}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ u.s.f., d.i. alle Dimensionsgröfsen unter der Form eines Bruches mit dem Zähler 1 geschrieben; so ist der Nenner des Coëfficienten die Summe der Produkte der beiderlei Nenner der gleichliegenden Dimensionen in den geschriebenen Flächen, mit dem Zeichen + oder —, als ebenfalls dem Produkte der Zeichen der nemlichen Dimensionen; der Zähler des Coëfficienten aber ist die Summe der Nenner der dreierlei Dimensionen der Fläche $\boxed{\frac{1}{z}a^{\cdot}:\frac{1}{1}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{1}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ (¹).

Es ist also der Coëfficient für $\boxed{a^{\cdot}:\frac{1}{n}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a^{\cdot}:z.a^{\cdot\cdot}:z.a^{\cdot\cdot\cdot}} = \frac{z+2}{z+n+n'}$; denn es ist das obige $m=1$, $n=n$, $p=n'$ gesetzt.

(¹) So ausgedrückt, umfafst auch die Regel den früheren Fall für die Dimensionen senkrecht auf den Pyramidenwürfelflächen; denn diese haben wir uns zu denken unter der Form $\boxed{\frac{1}{z}a^{\cdot}:\frac{1}{1}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{0}a^{\cdot\cdot\cdot}}$, so ist wieder der Zähler des Coëfficienten $=z+1+0=z+1$, und der Nenner $=z.1+1.n+0.n'=z+n$. u. s. f.

In der Richtung senkrecht auf $\boxed{z\,.\,a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot\cdot}}$ ist er $= \frac{z+2}{nz+n'+1}$; denn es ist statt des obigen m zu setzen n, statt n und p, n' und 1.

In der Richtung senkrecht auf $\boxed{z\,.\,a^{\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}}$ ist er $= \frac{z+2}{n'z+n+1}$; denn statt m ist zu setzen n', statt n und p, n und 1.

In der Richtung senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot\cdot}}$ ist der Coëfficient $= \frac{z+2}{n+n'-z}$, weil in der allgemeinen Formel desselben m zu 1 geworden, sein Produkt mit z aber mit dem Zeichen $-$ zu versehen ist, welches aus der Multiplication der Zeichen $+$ und $-$ hervorgeht, für n und p aber, n und n' gesetzt ist.

Wird dieser Coëfficient negativ, so gilt er in der umgekehrten Richtung, d. i. in der nemlichen Dimension, vom Mittelpunkt aus gerichtet gegen eine Fläche $\boxed{a^{\cdot} : z\,.\,-a^{\cdot\cdot} : z\,.\,-a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{\frac{1}{z}\,a^{\cdot} : -a^{\cdot\cdot} : -a^{\cdot\cdot\cdot}}$, welches Zeichen den Coëfficienten giebt $= \frac{z+2}{z-n-n'}$ da jetzt auch m zu 1, und n und p zu n und n' geworden, aber die beiden letzteren das Zeichen $-$, als das Produkt von $+$ mit $-$ tragen, während das Produkt $mz = 1\,.\,z$ das Zeichen $+$, als das Produkt von $+$ mit $+$ behält.

Unser Schema zeigt beide umgekehrte Werthe des Coëfficienten an den entsprechenden Stellen, nemlich den ersten in dem Ausschnitt zwischen $a^{\cdot\cdot}$, $a^{\cdot\cdot\cdot}$ und $-a^{\cdot}$, den zweiten in dem entgegengesetzten zwischen $a^{\cdot}$, $-a^{\cdot\cdot}$ und $-a^{\cdot\cdot\cdot}$.

Auf gleiche Weise ergiebt sich der Coëfficient in der Richtung senkrecht auf $\boxed{-z\,.\,a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{-a^{\cdot} : \frac{1}{z}\,a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}}$ als $\frac{z+2}{nz+n'-1}$, und für die umgekehrte Richtung gegen $\boxed{a^{\cdot} : -\frac{1}{z}\,a^{\cdot\cdot} : -a^{\cdot\cdot\cdot}}$ senkrecht, als $\frac{z+2}{1-nz-n'}$.

Eben so in der Richtung senkrecht auf $\boxed{-z\,.\,a^{\cdot} : z\,.\,a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{-a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z}\,a^{\cdot\cdot\cdot}}$ wird der Coëfficient $\frac{z+2}{n'z+n-1}$; der umgekehrte in der gegen $\boxed{a^{\cdot} : -a^{\cdot\cdot} : -\frac{1}{z}\,a^{\cdot\cdot\cdot}}$ senkrechten, $\frac{z+2}{1-n-n'z}$.

Und so alle übrige der Ordnung nach, wie sie im Schema Fig. 2. nach der Voraussetzung $z > 1$ gestellt sind.

§. 3.

Wir geben endlich unserm Schema die gröſseste Allgemeinheit, indem wir angeben, wie eine Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ jede andre Art von Dimensionen schneidet, senkrecht auf Flächen, die weder in der Hauptzone des Octaëders, noch in der Kantenzone des Würfels liegen, also weder Leucitoïdflächen noch Pyramidenoctaëder-, noch Pyramidenwürfelflächen angehören, sondern den Sechsmalachtflächnern oder Hexakisoctaëdern, welches bekanntlich die allgemeinste Form der von gleichartigen Flächen begrenzten Körper des sphäroëdrischen Systems war, die gleichartigen vollzählig, und in der Begrenzung des Körpers im Gleichgewicht unter sich genommen.

Wir geben der beliebigen Fläche des Systems, in deren Normale der einer Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ zukommende Werth allgemein bestimmt werden soll, den Ausdruck $\boxed{a:\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}a}$; sie wird einen Sechsmalachtflächner geben, wenn y und z endliche Gröſsen, verschieden von einander und verschieden von 1 sind. Fällt eine oder mehrere dieser Bedingungen weg, so reducirt sich der Sechsmalachtflächner auf einen der durch das Zusammenfallen mehrerer Flächen entstehenden Körper mit vierundzwanzig, zwölf, acht oder sechs Flächen.

Das Maximum der Anzahl gleichartiger Dimensionen ist also 24, in welchen wieder entgegengesetzte Richtungen oder Hälften zu unterscheiden sind. Die entgegengesetzten von sechs werden wieder von den Werthen, welche einer Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ zukommen können, ausgeschlossen, nemlich von denen, welche gegen Flächen gekehrt sind, in deren Zeichen $\boxed{a:\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}a}$ die Werthe von a in gleichem positivem Sinn verstanden sind, wie für die Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$. Diese sechs jederzeit in positivem Sinne der letzteren Fläche zugehörigen Werthe in sechs der zu untersuchenden Dimensionen zeigt unser Schema innerhalb des Dreiecks; von den übrigen achtzehn gleichartigen Dimensionen können der Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ Werthe bald in positivem bald in negativem Sinn zukommen. Die sechsunddreiſsig daraus entspringenden Gröſsen vertheilen sich je sechs in die sechs Ausschnitte auſserhalb des Dreiecks, und folgen in der Lage ihrer Stellen einer eben so festen Ordnung im Schema, wie die zu unterscheidenden Dimensionen mit ihren entgegengesetzten Richtungen im Raume selbst. Unser Schema besitzt also wieder zweiundvierzig für die zu unterscheidenden zweiundvierzig Werthe geeignete Stellen; es sind im allgemeinen die Räume zwischen je drei benachbarten, einer kleinsten, einer mittleren und einer gröſsten Octaëderdimension, so wie die neuen Dimensionen zwischen je drei solchen liegen. Die Formeln für die verschiedenen Coëfficienten sind, wie die Fig. 5. sie darstellt, in der That von ähnlicher Einfachheit, wie die vorigen; ja aus der vorhin ausgesprochenen Regel flieſsen sie wirklich sammt und sonders. Die Zähler sind wieder allen gemeinschaftlich $= y + z + 1 =$ der Summe der Nenner in den als Brüche mit dem Zähler 1 geschriebenen dreierlei Werthen in den Grunddimensionen für die Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$; die Nenner sind die Summen der Produkte der Nenner von den Werthen der beiderlei nach derselben Regel geschriebenen Flächen $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$ und $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$ in denselben Grunddimensionen, die zugehörigen positiven oder negativen Zeichen gleichfalls mit einander multiplicirt, und das daraus sich ergebende Zeichen, dem Produkt zu welchem sie gehören, beigefügt. Wenn also die beiden so eben geschriebenen Flächen in gleicher Folge der a zu verstehen sind, so ist der Coëfficient $\frac{y + z + 1}{ny + n'z + 1}$ u. s. f.

Die Einheit χ in der neuen Dimension aber, wiederum am Octaëder als die Linie aus dem Mittelpunkt nach demjenigen Punkt der Oberfläche gezogen, in welchem dieselbe von der auf $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$ senkrechten Richtung geschnitten wird, findet sich in der Einheit derselben Octaëderaxe wiederum ausgedrückt

$$\chi = \frac{\sqrt{y^2 + z^2 + 1}}{y + z + 1}$$

so daſs abermals der Coëfficient, wenn sein gemeinschaftlicher Zähler $y + z + 1$ mit $\sqrt{y^2 + z^2 + 1}$ vertauscht wird, in den absoluten Werth der zu bezeichnenden Gröſse in der allgemeinen Einheit des Systemes übergetragen ist.

Es wird jedoch nöthig sein, von der Richtigkeit der oben ausgesprochenen Formeln noch besondere Rechenschaft zu geben.

Es sei also in Fig. 6. $Cy = \frac{1}{y}\,CA = \frac{1}{y}\,a$; $Cz = \frac{1}{z}\,CB = \frac{1}{z}\,a$, und yz die Linie, welche einer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ in der Ebne CAB zukommt, wenn sie in der auf dieser Ebne in C (als dem Mittelpunkt der Construction) senkrechten Richtung durch einen Punkt geht, der um $1a$ von C absteht, während CA und CB die beiden andern Grunddimensionen a, a, folglich AB eine Octaëderkante bezeichnet. Wir fällen das Perpendikel Cp aus C senkrecht auf yz, und verlängern es, bis es die Octaëderkante AB in D schneidet; so wird in einer durch CpD und die auf CAB in C senkrechte Linie gelegten Ebne die auf $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ senkrechte Richtung liegen; und wenn in Fig. 7. CpD die vorige Linie, OC aber die auf CAB in C senkrechte Grunddimension a ist, so wird Op der Durchschnitt von $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ mit OCD, OD aber eine von O nach D in der Octaëderfläche ABO gezogene Linie sein; und das Perpendikel Ct aus C auf Op, verlängert nach F, als dem Durchschnitt mit OD, wird die auf $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ senkrechte Dimension, und CF die Einheit derselben für das Octaëder sein, dessen halbe Axe $= OC$ ist.

Um zuvörderst den Punkt D, oder das Verhältniſs $AD : DB$ in der durch CpD getheilten Octaëderkante zu kennen, ziehen wir in Fig. 6. aus A die Linie $A\vartheta$ parallel mit yz; sie schneide die Linie CD in r; so ist $C\vartheta = \frac{y}{z}\,CB$, oder $C\vartheta : CB = y : z$; ferner

$$Ar : r\vartheta = yp : pz = (Cy)^2 : (Cz)^2 = \frac{1}{y^2} : \frac{1}{z^2} = z^2 : y^2$$

und nach der Formel $a : b = uf : v(e+f)$ ist

$$AD : DB = Ar \,.\, C\vartheta : r\vartheta \,.\, CB = z^2 y : y^2 z = z : y = Cy : Cz$$

ferner ist nach der Formel $o : o + p = f(a+b) : ca + f(a+b)$

$$Cr : CD = C\vartheta \,.\, AB : \vartheta B \,.\, AD + C\vartheta \,.\, AB = y(y+z) : (z-y)z + y(y+z) = y(y+z) : z^2 + y^2$$

also $Cr = \frac{y(y+z)}{y^2+z^2}\,CD$

Aber $Cp = \frac{1}{y}\,Cr = \frac{y+z}{y^2+z^2}\,CD$

mithin $Cp : CD = y + z : y^2 + z^2$

$$Cp = \frac{\frac{a}{y} \cdot \frac{a}{z}}{\sqrt{\frac{a^2}{y^2} + \frac{a^2}{z^2}}} = \frac{a}{yz\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

Daher ist CD, in der Einheit der Grunddimension a ausgedrückt,

$$CD = \frac{y^2 + z^2}{y + z}\, Cp = \frac{a\sqrt{y^2 + z^2}}{y + z}$$

Suchen wir jetzt in Fig. 7. den Punkt F in der Linie OD auf der Octaëderfläche ABO, so ist fürs erste

$$Ot : tp = (CO)^2 : (Cp)^2 = a^2 : \frac{a^2}{y^2 + z^2} = y^2 + z^2 : 1$$

und nach der Formel $a : b = z(i + k) : yi$, oder $b : a = yi : z(i + k)$ ist $OF : FD = Ot . Cp : tp . CD = (y^2 + z^2)(y + z) : 1 . (y^2 + z^2) = y + z : 1$; und suchen wir die Einheit der neuen Octaëderdimension CF, so ist nach der Formel $o : o + p = i(a + b) : kb + i(a + b)$

$$Ct : CF = Cp . OD : pD . OF + Cp . OD =$$
$$(y + z)(y + z + 1) : (y^2 + z^2 - (y + z))(y + z) + (y + z)(y + z + 1) =$$
$$y + z + 1 : (y^2 + z^2 - y - z) + y + z + 1 = y + z + 1 : y^2 + z^2 + 1$$

also
$$CF = \frac{y^2 + z^2 + 1}{y + z + 1}\, Ct$$

Aber
$$Ct = \frac{CO . Cp}{\sqrt{(CO)^2 + (Cp)^2}} = \frac{a \cdot \frac{a}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{y^2 + z^2}}} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + z^2 + 1}}$$

folglich die Einheit in der neuen Octaëderdimension CF oder χ, wie oben angeführt war,

$$CF = \chi = \frac{a\sqrt{y^2 + z^2 + 1}}{y + z + 1}$$

Wir suchen aber nunmehr den Werth Cx Fig. 9, welchen eine durch Os gehende Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$ von der Richtung CF, von C aus gemessen, abschneidet. Wir substituiren dieser Fläche, um das allgemeinere Gesetz jenes Werthes deutlicher zu machen, den noch allgemeineren Ausdruck $\boxed{\frac{1}{p} a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{m} a}$, so dafs wir das $\frac{1}{p}\, a$ derselben in der Richtung des $1a$ der Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$, also in der Richtung

CO, das $\frac{1}{n}a$ in der Richtung des $\frac{1}{y}a$, also in CA, Fig. 6 und 8., und das $\frac{1}{m}a$ in der Richtung des $\frac{1}{z}a$, d. i. in CB, Fig. 6 und 8. nehmen. Wir legen die Fläche $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$ durch den Endpunkt O der ersten Grunddimension CO, also in die Lage $\boxed{a : \frac{p}{n}a : \frac{p}{m}a}$, so wird sie von den Linien CA und CB, Fig. 8. Stücke abschneiden

$$Cn = \frac{p}{n}\,CA, \text{ und } Cm = \frac{p}{m}\,CB.$$

Der Durchschnitt der Linie nm mit CD, welches die vorige Bedeutung behält, sei s. Wir ziehen Aq parallel mit nm; der Durchschnitt von Aq mit CD sei u; so ist $Cq = \frac{n}{p} \,.\, Cm = \frac{n}{m}\,CB$, und

$$Cq : qB = \frac{n}{m} : 1 - \frac{n}{m} = n : m - n$$

ferner ist nach der Formel $o : o + p = f(a+b) : ea + f(a+b)$

$$Cu : CD = Cq \,.\, AB : qB \,.\, AD + Cq \,.\, AB = n(y+z) : (m-n)\,z + n\,(y+z) = \\ n\,(y+z) : mz + ny$$

also $$Cu = \frac{n(y+z)}{mz+ny}\,CD$$

Aber $$Cs = \frac{p}{n}\,Cu = \frac{p(y+z)}{ny+mz}\,CD$$

Wenn nun in Fig. 9. $Cs : CD = p(y+z) : ny + mz$, oder

$Cs : sD = p(y+z) : ny + mz - p(y+z)$, so ist

nach der Formel $o : o + p = i(a+b) : kb + i(a+b)$

$$Cx : CF = Cs \,.\, OD : sD \,.\, OF + Cs \,.\, OD = \\ p(y+z)\,(y+z+1) : (ny+mz-py-pz)\,(y+z) + p(y+z)\,(y+z+1) = \\ p(y+z+1) : ny + mz + p \,.\, 1$$

also $$Cx = \frac{p(y+z+1)}{ny+mz+p\,.\,1}\,CF$$

Aber Cx war das Stück, das auf CF durch $\boxed{a : \frac{p}{n}a : \frac{p}{m}a}$ abgeschnitten wurde; folglich ist das Stück, welches durch $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$ abgeschnitten wird,

$$= \frac{1}{p}\, Cx = \frac{y+z+1}{ny+mz+p.1}\, CF = \frac{a\sqrt{y^2+z^2+1}}{ny+mz+p.1} = \frac{\sqrt{y^2+z^2+1}}{ny+mz+p.1},$$

wenn $a = 1$ gesetzt wird.

So sehen wir also wiederum, dafs in dem Coëfficienten $\frac{y+z+1}{ny+mz+p.1}$ der Zähler die Summe der Nenner ist von den einzelnen Werthen in $\boxed{\frac{1}{1}a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$, während der Nenner des Coëfficienten die Summe ist von den Produkten der Nenner in den Ausdrücken beider Flächen, $\boxed{\frac{1}{1}a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ und $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$, jede so geschrieben, dafs die Dimensionswerthe Brüche sind mit dem Zähler 1, und je zwei Nenner mit einander multiplicirt, welche den in gleicher Richtung genommenen Dimensionswerthen der beiderlei Flächen zukommen. Fügen wir noch hinzu, dafs diese Nenner zugleich die positiven oder negativen Zeichen der Dimensionswerthe tragen, denen sie angehören, so haben wir die Regel für die Bildung der sämmtlichen zweiundvierzig Coëfficienten, welche wieder nur die verschiedenen möglichen Combinationen von n, m, p, mit ± 1, y, z enthalten und, wie immer, erschöpfen.

Kehren wir also zurück zu unserm von Anfang gewählten Ausdruck einer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n'}a}$, setzen wir sie an die Stelle der vorigen $\boxed{\frac{1}{p}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a}$ und unterscheiden wir ihre verschiednen a, die sie bald mit den einen, bald mit den andern a einer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a}$ in gemeinschaftlicher Richtung hat, so ist für $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{y}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z}a^{\cdot\cdot\cdot}}$, χ als Einheit dieser Dimension genommen, der Coëfficient $= \frac{y+z+1}{ny+n'z+1.1}$; denn es wurde für p, 1, für m, n' gesetzt, n aber in der vorigen Bedeutung des allgemeinen Coëfficienten gelassen.

So wird für $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{z}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{y}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ der Coëfficient $= \frac{y+z+1}{nz+n'y+1.1}$; denn n steht für m, n' für n, 1 für p.

So wird ferner für $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n}a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{y}a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ der Coëfficient $= \frac{y+z+1}{1.y+n.1+n'z}$; in der senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{y}a^{\cdot} : \frac{1}{z}a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}}$ wird er $= \frac{y+z+1}{1.y+nz+n'.1}$;

senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{z}a^{\cdot}:a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{y}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ wird er $=\frac{y+z+1}{1.z+n.1+n'.y}$;
und senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{z}a^{\cdot}:\frac{1}{y}a^{\cdot\cdot}:a^{\cdot\cdot\cdot}}$ wird er $=\frac{y+z+1}{1.z+n.y+n'.1}$;
wie diese Coëfficienten in der Fig. 5. an den innerhalb des Dreiecks fallenden Stellen sich finden, durch welche Richtungen bezeichnet werden, die zwischen $+a^{\cdot}$, $+a^{\cdot\cdot}$ und $+a^{\cdot\cdot\cdot}$ liegen.

Was die zwischen $-a^{\cdot}$, oder $-a^{\cdot\cdot}$, $-a^{\cdot\cdot\cdot}$ und eine oder zwei $+a$.... fallenden Richtungen betrift, so ist der der Fläche $\boxed{a^{\cdot}:\frac{1}{n}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in Bezug auf sie zukommende Coëfficient auch klar durch das vorige bestimmt; er wird, wie man sieht, wenn die Rede ist von der Richtung senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot}:\frac{1}{y}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{z}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ kein andrer sein, als $\frac{y+z+1}{-1+n.y+n'z}$ u.s.f.

Die Stellen, welche den einzelnen Coëfficienten in unserm Schema gebühren, werden *im allgemeinen* abhängig sein von der Relation der Werthe, welche man den Gröfsen 1, n und n'; 1, y und z giebt. Wenn wir setzen $n' > n > 1$, wie wir in den früheren Schemen gethan haben, so liegt die Fläche $\boxed{a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n'}a}$ dem Mittelpunkt der Construction am nächsten in dem Raume, welcher in unserm Dreieck eingeschlossen ist zwischen dem Mittelpunkt desselben, der Mitte der Seite zwischen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n'}$, und der mit $\frac{1}{n'}$ bezeichneten Ecke. Der Coëfficient, welcher in diesem Raume steht, mufs also unter jener Voraussetzung immer der kleinste, sein Nenner folglich der gröfste sein. Dies ist für die Summe der drei Produkte von drei gegebnen Gröfsen 1, n, n', mit einer anderen von drei gegebenen anderen 1, y, z nur dann der Fall, wenn die gröfsten mit den gröfsten, die mittleren mit den mittleren, die kleinsten mit den kleinsten multiplicirt werden.

Setzen wir also $z > y > 1$, so ist die Summe der Produkte die gröfseste von $n'z+ny+1.1$. Es gehört also unter dieser Voraussetzung an die genannte Stelle in unserm Dreieck der Coëfficient $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$. Dies ist aber die Formel für den Coëfficienten, welcher der Fläche $\boxed{a^{\cdot}:\frac{1}{n}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{n'}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a^{\cdot}:\frac{1}{y}a^{\cdot\cdot}:\frac{1}{z}a^{\cdot\cdot\cdot}}$ zukommt; und es ist klar, dafs an dieser Stelle der kleinste Coëfficient liegen mufs, wenn für die Fläche $\boxed{a:\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}a}$ die kleinsten, mittleren und gröfsesten

Werthe in den Grunddimensionen in derselben Folge liegen, wie in der Fläche $\boxed{a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n'} a}$.

Die übrigen Stellen, und welche Coëfficienten ihnen angehören, folgt der Bestimmung der ersten. In dem Ausschnitt zwischen dem Mittelpunkt des Dreiecks, der Mitte zwischen 1 und $\frac{1}{n'}$, und der Ecke $\frac{1}{n'}$ mufs der Coëfficient zu stehen kommen, welcher der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ zukommt in der Richtung senkrecht auf derjenigen Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$, welche mit der vorigen $\boxed{a' : \frac{1}{y} a'' : \frac{1}{z} a'''}$ gemein behält das a''', und vertauscht das a' und a'', also auf $\boxed{\frac{1}{y} a' : a'' : \frac{1}{z} a'''}$; für diese Richtung aber ist der Coëfficient $\frac{z+y+1}{n'z+1 \,.\, y+n \,.\, 1}$.

Die beiden Coëfficienten $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ und $\frac{z+y+1}{n'z+y+n}$ werden gleich oder fallen in Einen zusammen, wenn $y = 1$; und ihr gemeinschaftlicher Ausdruck wird $\frac{z+2}{n'z+n+1}$, wie in Fig. 2. Dort aber war es der des Coëfficienten für $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ in der Richtung senkrecht auf $\boxed{z \,.\, a' : z \,.\, a'' : a'''} = \boxed{a' : a'' : \frac{1}{z} a'''}$, auf welchen letzteren Ausdruck sich jetzt die Fläche $\boxed{\frac{1}{y} a' : a'' : \frac{1}{z} a'''}$ reducirt, wenn $y = 1$.

Ferner mufs in dem Ausschnitt zwischen dem Mittelpunkt des Dreiecks, der Ecke $\frac{1}{n}$, und der Mitte zwischen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n'}$ derjenige Coëfficient stehen, welcher der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{n} a'' : \frac{1}{n'} a'''}$ zukommt in der Richtung senkrecht auf einer Fläche $\boxed{a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$, die mit der Fläche $\boxed{a' : \frac{1}{y} a'' : \frac{1}{z} a'''}$ vertauscht ihr a'' und a''', und gemeinschaftlich behält das a', d. i. in der Richtung senkrecht auf $\boxed{a' : \frac{1}{z} a'' : \frac{1}{y} a'''}$; wir wissen aber: für diese Richtung gilt der Coëfficient $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1 \,.\, 1}$. Dieser Coëfficient wird identisch mit dem ersten $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$, wenn $z = y$. Dies wird der Fall sein müssen, der sich auf eine Pyramiden-Octaëderfläche bezieht, wenn $z = y > 1$. Dafs auch dieser Fall mit dem in der Fig. 2. ihm correspondirenden Coëfficienten $\frac{z+2}{z+n+n'}$ stimmt, sehen wir leicht. Hier wurde die Fläche gedacht als $\boxed{a' : z \,.\, a'' : z \,.\, a'''}$, in unserm jetzigen als $\boxed{a' : \frac{1}{z} a'' : \frac{1}{z} a'''}$. Setzen wir aber in den Werth $\frac{z+2}{z+n+n'}$, $\frac{1}{z}$ für z, so ist $\frac{\frac{1}{z}+2}{\frac{1}{z}+n+n'} = \frac{1+2z}{1+(n+n')z}$. Und wenn wir in den obigen zwei identisch werdenden Coëfficienten $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$ und $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$, nach der

Gleichung $z = y$, für y auch z schreiben, so verwandeln sich beide in $\frac{2z+1}{z(n'+n)+1} = \frac{1+2z}{1+(n+n')z}$.

Es ist einleuchtend, dafs alle sechs Coëfficienten im Innern des Dreiecks in Einen Werth zusammenfallen, wenn $z = y = 1$, d. i. im Fall es die Octaëderfläche wird, auf welcher die gesuchte Richtung senkrecht steht. Und dann reduciren sich die sechs Ausdrücke in den Einen, schon aus unsern frühern Schemen bekannten, $\frac{3}{n'+n+1}$.

Es ist nicht minder deutlich, dafs an der Stelle aufserhalb des Dreiecks, welche in der Linie von der Ecke $\frac{1}{n'}$ bis nach der Mitte zwischen $\frac{1}{n'}$ und $\frac{1}{n}$ an die erste bezeichnete Stelle grenzt, d. i. in dem Ausschnitt, welcher sich zwischen den bezeichneten zwei Punkten und einer Mitte zwischen $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n'}$ und -1 befindet, ein Coëfficient stehen mufs, der sich auf die Richtung bezieht senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$; denn die beiden letzteren Werthe mufs diese Fläche gemein haben mit der, auf welche der erste Coëfficient sich bezog, der für $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ galt; den Werth in $a^{\cdot}$ aber mufs sie im negativen Sinn mit derselben gemein haben. Der Coëfficient aber, der der Fläche $\boxed{a^{\cdot} : \frac{1}{n} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{n'} a^{\cdot\cdot\cdot}}$ zukommt in der Richtung senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$, ist $\frac{z+y+1}{n'z+ny-1.1}$.

Auch dieser Coëfficient wird mit dem ersten $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ zusammenfallen, wenn in dem Ausdruck $\boxed{\frac{1}{1} a : \frac{1}{y} a : \frac{1}{z} a}$ der Divisor des ersten $a =$ Null wird, d. i. wenn die Rede ist von einer Richtung senkrecht auf einer Fläche $\boxed{\infty a^{\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$. Man sieht, dafs dies die Fläche eines Pyramidenwürfels wäre, und dafs die beiden erwähnten Coëfficienten werden würden $= \frac{z+y}{n'z+ny}$. In Fig. 2. aber hiefs dieselbe Fläche $\boxed{\infty a^{\cdot} : z a^{\cdot\cdot} : a^{\cdot\cdot\cdot}} = \boxed{\infty a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot\cdot}}$. Setzen wir aber statt $\frac{1}{y}$ $a^{\cdot\cdot}$ im ersten Ausdruck $1 a^{\cdot\cdot}$, also für y, 1, so ist der Coëfficient $\frac{z+y}{n'z+ny} = \frac{z+1}{n'z+n}$, wie er in Fig. 2. hiefs.

Wir überzeugen uns eben so, dafs in dem benachbarten Ausschnitt links vom vorigen in unserm Schema, der Coëfficient stehen mufs, welcher sich bezieht auf die Richtung senkrecht auf $\boxed{-a^{\cdot} : \frac{1}{z} a^{\cdot\cdot} : \frac{1}{y} a^{\cdot\cdot\cdot}}$. Dies giebt ihn $= \frac{z+y+1}{nz+n'y-1}$. Wiederum, wenn für 1, Null gesetzt, er also in den verwandelt wird, welcher sich auf die Pyramidenwürfelfläche $\boxed{\infty a' : \frac{1}{z} a'' : \frac{1}{y} a'''}$ bezieht, so wird er mit dem in unserm Schema über ihm stehenden Coëfficienten $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$ identisch, und beide zu $\frac{z+y}{nz+n'y}$. Dieser Ausdruck, verglichen mit dem ihm correspondirenden $\frac{z+1}{nz+n'}$ in Fig. 2. löset sich in denselben Werth auf, wenn die Fläche $\boxed{\infty a' : \frac{1}{z} a'' : \frac{1}{y} a'''}$ auf denselben Ausdruck zurückgeführt wird, der ihr in Fig. 2. gegeben war, d. i. auf $\boxed{\infty a' : a'' : z a'''} = \boxed{\infty a' : \frac{1}{z} a'' : a'''}$, also wenn $y = 1$ gesetzt wird.

Alle vier Coëfficienten $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$, $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$, $\frac{z+y+1}{n'z+ny-1}$ und $\frac{z+y+1}{nz+n'y-1}$ müssen in Einen Werth zusammenfallen, wenn $1 = 0$, und $z = y$ gesetzt wird. Die vier Flächen, auf welche sie sich beziehen, fallen dann zusammen in die Granatoëderfläche $\boxed{\infty a' : a'' : a'''} = \boxed{\infty a' : \frac{1}{z} a'' : \frac{1}{z} a'''}$; der gemeinschaftliche Werth des Coëfficienten ist $= \frac{2z}{z(n'+n)} = \frac{2}{n'+n}$, wie er aus dem ersten Schema bekannt ist.

Nach diesen Regeln geht das Schema unsrer Fig. 5. aus der Voraussetzung $z > y > 1$ und $n' > n > 1$ hervor. Setzte man hingegen $y > z > 1$, während immer $n' > n > 1$, so tauschten je zwei Coëfficienten wie $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ und $\frac{z+y+1}{nz+n'y+1}$ ihre Stellen. Letzteres würde dann wiederum der k l e i n s t e sein, welcher, so lange $n' > n > 1$, immer an der nemlichen Stelle unsers Dreiecks stehen mufs. Nach den verschiedenen möglichen Voraussetzungen $z > y > 1$, $y > z > 1$, $y > 1 > z$, $z > 1 > y$, $1 > y > z$, $1 > z > y$ würden der Reihe nach alle die sechs Coëfficienten innerhalb unsers Dreiecks an die Stelle unsers $\frac{z+y+1}{n'z+ny+1}$ zu stehen kommen; und umgekehrt würde dieser Werth fortrücken in der so eben angefangenen Richtung nach der Reihe der Voraussetzungen $z > y > 1$, $y > z > 1$, $y > 1 > z$, $1 > y > z$, $1 > z > y$, und $z > 1 > y$.

§. 4.

Wir können ohne Schwierigkeit, was wir von dem sphäroëdrischen System hier entwickelt haben, auf die übrigen Systeme anwenden, welche auf drei unter einander rechtwinklichen, aber ungleichen Grunddimensionen beruhen. Wir setzen also die drei *a* verschieden, als *a*, *b*, *c*, und suchen die Werthe in den Richtungen senkrecht auf einer Fläche

$\boxed{\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:1c}$ für eine gegebene Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a:\frac{1}{m}b:\frac{1}{p}c}$. So ist, mit Beibehaltung ganz der vorigen Construction, in Fig. 6, $CA=a$, $CB=b$, $Cy=\frac{1}{y}a$, $Cz=\frac{1}{z}b$ und $Ar:r\vartheta=yp:pz=\frac{a^2}{y^2}:\frac{b^2}{z^2}=z^2a^2:y^2b^2$; also

$$AD:DB=Ar.C\vartheta:r\vartheta.CB=z^2a^2\frac{y}{z}:y^2b^2.1=za^2:yb^2$$

$$Cr:CD=C\vartheta.AB:\vartheta B.AD+C\vartheta.AB=\frac{y}{z}(za^2+yb^2):(1-\frac{y}{z})\,za^2+\frac{y}{z}(za^2+yb^2)=y(za^2+yb^2):z^2a^2+y^2b^2$$

$$Cr=\frac{y(za^2+yb^2)}{z^2a^2+y^2b^2}CD$$

$$Cp=\frac{1}{y}Cr=\frac{za^2+yb^2}{z^2a^2+y^2b^2}CD;$$

aber auch
$$Cp=\frac{ab}{yz\sqrt{\frac{a^2}{y^2}+\frac{b^2}{z^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{z^2a^2+y^2b^2}}$$

folglich
$$CD=\frac{z^2a^2+y^2b^2}{za^2+yb^2}Cp=\frac{ab\sqrt{z^2a^2+y^2b^2}}{za^2+yb^2}=\frac{\sqrt{\frac{1}{y^2b^2}+\frac{1}{z^2a^2}}}{\frac{1}{yb^2}+\frac{1}{za^2}}$$

In Fig. 7. ist ferner $CO=c$, und $Ot:tp=c^2:\frac{a^2b^2}{z^2a^2+y^2b^2}$

$$OF:FD=Ot.Cp:tp.CD=c^2(za^2+yb^2):\frac{a^2b^2}{z^2a^2+y^2b^2}(z^2a^2+y^2b^2)$$
$$=c^2(za^2+yb^2):a^2b^2$$

$$Ct:CF=Cp.OD:pD.OF+Cp.OD=(za^2+yb^2)(a^2b^2+za^2c^2+yb^2c^2:$$
$$((z^2-z)a^2+(y^2-y)b^2)\times c^2(za^2+yb^2)+(za^2+yb^2)(a^2b^2+(za^2+yb^2)c^2)$$
$$=a^2b^2+za^2c^2+yb^2c^2:(z^2a^2+y^2b^2)c^2+a^2b^2$$

Aber $Ct:CF=a^2b^2+za^2c^2+yb^2c^2:a^2b^2+z^2a^2c^2+y^2b^2c^2=$
$$\frac{1}{c^2}+\frac{z}{b^2}+\frac{y}{a^2}:\frac{1}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}$$

Nun ist $Ct=\frac{CO.Cp}{Op}=\frac{abc}{\sqrt{z^2a^2+y^2b^2}.\sqrt{\frac{a^2b^2}{z^2a^2+y^2b^2}+c^2}}=$

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+z^2a^2c^2+y^2b^2c^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}}}$$

also ist CF oder die Einheit in der Dimension senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{y}a : \frac{1}{z}b : c}$ in dem Octaëder $\boxed{a : b : c}$,

$$CF = \frac{a^2b^2 + z^2a^2c^2 + y^2b^2c^2}{a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2}\ Ct = \frac{abc\sqrt{a^2b^2 + z^2a^2c^2 + y^2b^2c^2}}{a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}}}{\frac{1}{c^2} + \frac{z}{b^2} + \frac{y}{a^2}}$$

Wenn nun wiederum für die Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{p}c}$, durch den Endpunkt von c gelegt, mithin als $\boxed{\frac{p}{n}a : \frac{p}{m}b : c}$ angesehen, in Fig. 8. $Cn = \frac{p}{n}CA = \frac{p}{n}a$ und $Cm = \frac{p}{m}CB = \frac{p}{m}b$ ist, und wiederum $Cq : qB = \frac{n}{p} \cdot \frac{p}{m}b : (1 - \frac{n}{m})\,b = n : m - n$,

so wird $Cu : CD = Cq.AB : qB.AD + Cq.AB = n.(za^2 + yb^2) : (m - n)\,za^2 + n(za^2 + yb^2) = n\,(za^2 + yb^2) : m\,za^2 + nyb^2$

$$Cu = \frac{n\,(za^2 + yb^2)}{m\,za^2 + nyb^2}\ CD$$

$$Cs = \frac{p}{n}\ Cu = \frac{p\,(za^2 + yb^2)}{m\,za^2 + nyb^2}\ CD$$

folglich der der Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{p}c}$ selbst in der Richtung CD angehörige Werth $= \frac{1}{p}\ Cs = \frac{za^2 + yb^2}{m\,za^2 + nyb^2}\ CD$

Und in Fig. 9. wird, da $Cs : sD = p\,(za^2 + yb^2) : (m - p)\,za^2 + (n - p)\,yb^2$,

$$Cx : CF = Cs.OD : sD.OF + Cs.OD = p\,(za^2 + yb^2)\,(a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2) : ((m - p)\,za^2 + (n - p)\,yb^2)\,c^2\,(za^2 + yb^2) + p\,(za^2 + yb^2)\,(a^2b^2 + za^2b^2 + yb^2c^2) = p\,(a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2) : m\,za^2c^2 + nyb^2c^2 + pa^2b^2$$

$$Cx = \frac{p\,(a^2b^2 + za^2c^2 + yb^2c^2)}{p.1.a^2b^2 + nyb^2c^2 + m\,za^2c^2}\ CF$$

So wie aber Cx der durch O, d. i. durch den Punkt $1.c$ gelegten Fläche $\boxed{\frac{p}{n}a : \frac{p}{m}b : c}$ in der Richtung CF zukam, so kommt der durch $\frac{1}{p}c$ gelegten Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{p}c}$ in dieser Richtung der Werth zu

$$= \frac{1}{p}\ Cx = \frac{1.a^2b^2 + yb^2c^2 + za^2c^2}{p.1.a^2b^2 + nyb^2c^2 + m\,za^2c^2}\ CF = \frac{\frac{1}{c^2} + \frac{y}{a^2} + \frac{z}{b^2}}{\frac{1.p}{c^2} + \frac{n.y}{a^2} + \frac{m.z}{b^2}}\ CF =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}{\frac{n.y}{a^2} + \frac{m.z}{b^2} + \frac{p.1}{c^2}}$$

Und dies ist der gesuchte Werth in der Richtung senkrecht auf $\boxed{\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:c}$ für die Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a:\frac{1}{m}b:\frac{1}{p}c}$.

Wegen der Ungleichheit der Dimensionen a, b, c ist auch eine Fläche $\boxed{\frac{1}{z}a:\frac{1}{y}b:c}$ u.s.f. der vorigen $\boxed{\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:c}$ ganz ungleichartig, und daher die Wiederholung analoger Flächen durch Umtausch der Coëfficienten in den verschiedenartigen Grunddimensionen in der Natur solcher Systeme nicht gegründet. Für sie würde daher das Schema Fig. 5. sich vereinfachen in das Fig. 10., wo blofs der Unterschied positiver und negativer Gröfsen in den Dimensionen a, b, c bleibt, die Coëfficienten einer jeden übrigens unverändert gelassen werden. Dies giebt im allgemeinen acht zu unterscheidende Richtungen; senkrecht gegen $\boxed{\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:c}$ oder gegen $\boxed{-\frac{1}{y}a:-\frac{1}{z}b:-c}$; gegen $\boxed{\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:-c}$ oder gegen $\boxed{-\frac{1}{y}a:-\frac{1}{z}b:c}$; $\boxed{\frac{1}{y}a:-\frac{1}{z}b:c}$ oder $\boxed{-\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:-c}$; und $\boxed{-\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:c}$ oder $\boxed{\frac{1}{y}a:-\frac{1}{z}b:-c}$.

Von den letzteren sechs Werthen zeigt das Schema, Fig. 10. die drei, welche den gröfseren Ausschnitten aufserhalb des Dreiecks zugehören; ihre negativen, in den entgegengesetzten kleineren Ausschnitten hinzuzufügen, wäre überflüssig. Für den entgegengesetzten des ersten bedarf es im Schema wieder keiner Stelle, da er negirt ist, wenn in beiden Flächen $\boxed{\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:c}$ und $\boxed{\frac{1}{n}a:\frac{1}{m}b:\frac{1}{p}c}$ die entsprechenden Dimensionen alle in gleicher positiver Richtung genommen werden.

Es ist an sich klar, dafs, wenn eine der Gröfsen y, z, oder 1 (als Divisor des c) im Zeichen $\boxed{\frac{1}{y}a:\frac{1}{z}b:c}$ = Null gesetzt wird, der Coëfficient innerhalb des Dreiecks mit einem der angrenzenden aufserhalb identisch wird; seine Stelle rückt dann in die zwischen beiden liegende Seite des Dreiecks, und die gemeinte Richtung, in welcher er den Werth der Fläche $\boxed{\frac{1}{n}a:\frac{1}{m}b:\frac{1}{p}c}$ angiebt, ist dann senkrecht auf einer Fläche aus einer der drei Zonen, deren Axen parallel sind mit einer der drei Grunddimensionen a, b, oder c.

§. 5.

Der Fall des viergliedrigen Systems ist bekanntlich der, in welcher zwei der rechtwinklichen Grunddimensionen unter einander gleich sind, aber verschieden von der dritten. Wir setzen also $a = b$, so verwandelt sich in der Form des Coëfficienten der gemeinschaftliche Zähler in $\frac{y+z}{a^2} + \frac{1}{c^2}$, der Nenner aber in die verschiedenen Werthe, wie sie das Schema Fig. 11. giebt, mit Weglassung der entgegengesetzten von den geschriebenen. Es verdoppelt sich nemlich wieder die Zahl der gleichartigen Flächen gegen die vorige; die beiden gleichen a vertauschen ihre Coëfficienten wechselsweise und geben dann mit dem unveränderten c völlig gleiche Flächen; es sind die, welche zusammen einen Vierundvierkantner bilden. Sie liegen um die Endspitze c symmetrisch herum, welches in Fig. 11. unmittelbar einleuchten würde, wenn wir nicht der Bequemlichkeit des Raumes wegen, statt der in den kleinen Ausschnitt an c gehörigen, die ihnen entgegengesetzten im unteren grofsen Ausschnitt, geschrieben hätten. Im sphäroëdrischen System stellen sich um jede Octaëderecke drei Reihen solcher Vierundvierkantner und bilden den Sechsmalachtflächner. Welche je acht nebst den *ihnen parallelen* es sind, sieht man jetzt in der Fig. 5. sehr leicht. Nur die äufserste der drei um die obere Ecke des Dreiecks herumliegenden Reihen hat uns ihr Gegenstück in Fig. 11. gegeben; wir hätten jede der beiden anderen, die mittlere oder die innere Reihe wählen können; aber wenn wiederum $z > y > 1$, und $m > n > p$, so sind theils die Stellen, theils die jedesmaligen Combinationen der Gröfsen, aus welchen der Nenner des Coëfficienten zusammengesetzt wird, an den verschiedenen Stellen als diejenigen bestimmt, welche die Fig. 11. darlegt.