

Von der Integration der linearen Gleichungen mit partiellen endlichen Differenzen.

Von
Hrn. EYTELWEIN.



[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 3. Juni 1824.]

§. 1.

Bedeutet " G ", irgend eine unbekannte Funktion der veränderlichen Grössen m und r , wo m und r jeder ganzen Zahl oder 0 gleich seyn können, so heisst jede Gleichung in welcher diese Funktion für verschiedene Werthe von m und r vorkommt, eine Gleichung mit partiellen Differenzen, und man ist im Stande diese Differenzgleichung zu integriren, wenn der Werth der unbekannten Funktion " G ", angegeben werden kann. Dergleichen Differenzgleichungen gehören zu den doppelt wiederkehrenden oder recurro - recurrenten Reihen, und sowohl Laplace (*Mémoires sur les suites récurren- recurrentes, Mém. de Mathémat. Tom. VI. Paris 1774. — Rechreches sur l'intégration des équations différentielles finies, Mém. de Mathémat. Année 1773. Paris 1776.*) als auch Lagrange (*Recherches sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, Année 1775.*) haben zuerst über diese Reihen ausgezeichnete Untersuchungen angestellt, ohne jedoch die erzeugende Funktion, aus welcher " G ", entstanden ist, näher zu bestimmen. Man findet zwar in Arbogast, *Calcul des dérivations, (Strasbourg 1800.)* dergleichen Untersuchungen; allein abge-

sehen von der dortigen Bezeichnung, wird es nicht unwichtig seyn, die hierher gehörigen Entwickelungen noch auf einem anderen Wege zu erhalten, von welchem ich mir schmeichle, dass auf demselben die gesuchten Ausdrücke einfach und übersichtlich dargestellt werden.

Weil die partiellen Differenzgleichungn von der Form

$${}^m G_r + a. {}^m G_{r-1} + b. {}^{m-1} G_r + c. {}^{m-1} G_{r-1} = f(m; r)$$

am meisten vorkommen, wenn hier $f(m; r)$ irgend eine gegebene Funktion von m und r bedeutet und a, b, c willkürliche beständige Koeffizienten sind, welche auch einzeln $= 0$ seyn können, so wird man sich hier vorzüglich auf diese Differenzgleichung beschränken; es wird sich aber sehr leicht übersehen lassen, dass mit Anwendung des polynomischen Lehrsatzes und einer einfachen Bezeichnung der Polynomalkoeffizienten, die Untersuchung auch leicht auf jede andere gegebene Differenzgleichung angewendet werden kann. Uebrigens ist bei den von Lagrange untersuchten Differenzgleichungen durchgängig $f(m; r) = 0$ angenommen, wogegen hier dieser Ausdruck jede beliebige Funktion von m und r bezeichnen kann.

Bei den folgenden Untersuchungen wird zuerst die Entwicklung gebrochener Funktionen mit zwei veränderlichen x und y auseinander gesetzt und hiernächst bestimmt, wie gegebene Koeffizientengleichungen welche mit den angeführten Differenzgleichungen einerlei sind, integriert werden können.

Noch ist zu bemerken, dass hier zur Vereinfachung, Binomialkoeffizienten wie

$$(I) \dots \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} \text{ durch } \alpha$$

bezeichnet werden. Ferner wird man von einer Reihe

$$P = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n + \dots$$

den Koeffizienten A_n durch PK_n bezeichnen, um dadurch näher anzudeuten, zu welcher Reihe vorkommende Koeffizienten gehören. Man erhält daher auch

$$(II) P = PK_0 + PK_1 \cdot x + PK_2 \cdot x^2 + PK_3 \cdot x^3 + \dots + PK_n \cdot x^n + \dots$$

§. 2.

Man setze

$$\begin{aligned}
 A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_r x^r + \dots &= P \\
 {}^1 A y + {}^1 A_1 x y + {}^1 A_2 x^2 y + {}^1 A_3 x^3 y + \dots + {}^1 A_r x^r y + \dots &= P_1 y \\
 {}^2 A y^2 + {}^2 A_1 x y^2 + {}^2 A_2 x^2 y^2 + {}^2 A_3 x^3 y^2 + \dots + {}^2 A_r x^r y^2 &= P_2 y^2 \\
 {}^3 A y^3 + {}^3 A_1 x y^3 + {}^3 A_2 x^2 y^3 + {}^3 A_3 x^3 y^3 + \dots + {}^3 A_r x^r y^3 &= P_3 y^3 \\
 \dots &\dots \\
 {}^m A y^m + {}^m A_1 x y^m + {}^m A_2 x^2 y^m + {}^m A_3 x^3 y^m + \dots + {}^m A_r x^r y^m &= P_m y^m \\
 \dots &\dots
 \end{aligned}$$

und es sei die gebrochene Funktion

$$\frac{P^1}{1 + ax + by + cxy}$$

zu entwickeln, so ist die allgemeinste Form welche der Zähler P^1 erhalten kann

$$P^1 = P + P_1 y + P_2 y^2 + P_3 y^3 + \dots + P_m y^m + \dots \quad [I]$$

wenn $P; P_1; P_2; \dots$ die oben gegebene Bedeutung behalten.

Setzt man nun ferner:

$$\begin{aligned}
 G + G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \dots + G_r x^r + \dots &= Q \\
 {}^1 G y + {}^1 G_1 x y + {}^1 G_2 x^2 y + {}^1 G_3 x^3 y + \dots + {}^1 G_r x^r y + \dots &= Q_1 y \\
 {}^2 G y^2 + {}^2 G_1 x y^2 + {}^2 G_2 x^2 y^2 + {}^2 G_3 x^3 y^2 + \dots + {}^2 G_r x^r y^2 &= Q_2 y^2 \\
 \dots &\dots \\
 {}^m G y^m + {}^m G_1 x y^m + {}^m G_2 x^2 y^m + {}^m G_3 x^3 y^m + \dots + {}^m G_r x^r y^m &= Q_m y^m \\
 \dots &\dots
 \end{aligned}$$

und bezeichnet durch Q^1 die Entwicklung der gegebenen gebrochenen Funktion, also

$$(I) \dots \frac{P^1}{1 + ax + by + cxy} = Q^1$$

so ist die allgemeinste Gestalt welche diese Entwicklung erhalten kann

$$Q^1 = Q + Q_1 y + Q^2 y^2 + Q_3 y^3 + \dots + Q_m y^m + \dots \quad [II]$$

wo $A; A_1; A_2; A_3; \dots$ gegebene und $G; G_1; G_2; G_3; \dots$ noch näher zu bestimmende Koeffizienten bedeuten.

Nun werde $1 + ax = a$ und $b + cx = \beta$ gesetzt, so erhält man wegen (I)

$$Q^1 = \frac{P^1}{\alpha + \beta y} = P^1 \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta y}{\alpha^2} + \frac{\beta^2 y^2}{\alpha^3} - \dots \pm \frac{\beta^m y^m}{\alpha^{m+1}} \mp \dots \right]$$

oder statt P^1 aus [I] den entsprechenden Werth gesetzt, giebt:

$$Q^1 = \frac{P}{\alpha} + \frac{P_1}{\alpha} \left| y + \frac{P^2}{\alpha} \right| y^2 + \dots + \frac{P_m}{\alpha} \left| y^m + \dots \right.$$

$$- \frac{P\beta}{\alpha^2} \left| - \frac{P_1\beta}{\alpha^2} \right| - \frac{P_{m-1}\beta}{\alpha^2} \left| + \frac{P_{m-2}\beta^2}{\alpha^3} \right| \dots$$

$$+ \frac{P\beta^2}{\alpha^3} \left| + \frac{P_{m-2}\beta^2}{\alpha^3} \right| \dots$$

$$\dots$$

$$\pm \frac{P\beta^m}{\alpha^{m+1}}$$

daher wird nach der Bezeichnung §. 1. (II)

$$Q^1 K_m = \frac{P_m}{\alpha} - \frac{P_{m-1}\beta}{\alpha^2} + \frac{P_{m-2}\beta^2}{\alpha^3} - \dots \pm \frac{P\beta^m}{\alpha^{m+1}}$$

Denkt man sich diese Glieder in Reihen aufgelöst und nach den Potenzen von x geordnet, so findet man den zu x^r gehörigen Koeffizienten oder

$$(Q^1 K_m) K_r = \left(\frac{P_m}{\alpha} \right) K_r - \left(\frac{P_{m-1}\beta}{\alpha^2} \right) K_r + \left(\frac{P_{m-2}\beta^2}{\alpha^3} \right) K_r - \dots \pm \left(\frac{P\beta^m}{\alpha^{m+1}} \right) K_r \quad [\text{III}]$$

Nun ist $P_m = {}^m A + {}^m A_1 x + {}^m A_2 x^2 + {}^m A_3 x^3 + \dots + {}^m A_r x^r + \dots$ also

$$P_{m-n} = {}^{m-n} A + {}^{m-n} A_1 x + {}^{m-n} A_2 x^2 + {}^{m-n} A_3 x^3 + \dots + {}^{m-n} A_r x^r + \dots$$

und wenn man setzt

$$\frac{\beta^n}{\alpha^{n+1}} = \frac{(b + cx)^n}{(1 + ax)^{n+1}} = {}^n B + {}^n B_1 x + {}^n B_2 x^2 + {}^n B_3 x^3 + \dots + {}^n B_r x^r + \dots \quad [\text{IV}]$$

so wird

$$\frac{P_{m-n} \beta^n}{\alpha^{n+1}} = {}^{m-n} A \cdot {}^n B + {}^{m-n} A_1 \cdot {}^n B \left| \begin{array}{l} x + \dots + {}^{m-n} A_r \cdot {}^n B \\ + {}^{m-n} A \cdot {}^n B_1 \\ + {}^{m-n} A_{r-1} \cdot {}^n B_1 \\ + {}^{m-n} A_{r-2} \cdot {}^n B_2 \\ \dots \dots \dots \\ + {}^{m-n} A \cdot {}^n B_r \end{array} \right| x' + \dots \text{ daher §. 1. (II)}$$

$$\left(\frac{P_{m-n} \beta^*}{\alpha^{n+1}} \right) K_r = {}^{m-n}A_r \cdot {}^nB + {}^{m-n}A_{r-1} \cdot {}^nB_1 + {}^{m-n}A_{r-2} \cdot {}^nB_2 + \dots + {}^{m-n}A_r \cdot {}^nB_r$$

und man findet hieraus, wenn $0, 1, 2, 3, \dots$ statt n gesetzt wird

$$\left(\frac{P_m}{\alpha}\right) K_r = {}^m A_r \cdot B + {}^m A_{r-1} \cdot B_1 + {}^m A_{r-2} \cdot B_2 + \dots + {}^m A \cdot B_r$$

$$\left(\frac{P_{m-1}\beta}{\alpha^2}\right)K_r = {}^{m-1}A_r \cdot {}^1B + {}^{m-1}A_{r-1} \cdot {}^1B_1 + {}^{m-1}A_{r-2} \cdot {}^1B_2 + \dots + {}^{m-1}A \cdot {}^1B_r$$

$$\left(\frac{P\beta^m}{\alpha^{m+1}} \right) K_r = A_r \cdot {}^m B + A_{r-1} \cdot {}^m B_1 + A_{r-2} \cdot {}^m B_2 + \dots + A \cdot {}^m B, \text{ oder nach [III]}$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades m gilt.

Nach [II] ist $Q^1 K_m = Q_m$. Aber auch

$$Q_m = {}^m G + {}^m G_1 x + {}^m G_2 x^2 + {}^m G_3 x^3 + \dots + {}^m G_r x^r + \dots$$

daher wird auch $Q_m K_r = {}^m G_r$ oder

$$(Q^t K_m) K_r = Q_m K_r = {}^m G_r.$$

Ferner wird mit Anwendung des binomischen Lehrsatzes nach [IV]

$$(II) \quad {}^n B_r = \pm \left[(r+m)_m a^r b^m - (r+m-1)_m m a^{r-1} b^{m-1} c + (r+m-2)_m m_2 a^{r-2} b^{m-2} c^2 - \dots \pm m_r b^{m-r} c^r \right]$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades r gilt. Hiernach wird:

$$B_r = \pm a'$$

$${}^1B_r = \pm \left[(r+1) \ a' b - r a'^{-1} c \right]$$

$$^2B_r = \pm \left[(r+2)_2 a' b^2 - 2(r+1)_2 a'^{-1} b c + r_2 a'^{-2} c^2 \right]$$

$${}^3B_r = \pm \left[(r+3)_3 a' b^3 - 3(r+2)_3 a'^{-1} b^2 c + 3(r+1)_3 a'^{-2} b c^2 - r_3 a'^{-3} c^3 \right]$$

u. s. w. Ferner

$${}^mB \equiv b^m$$

$$\therefore {}^m B_1 = m \ b^{m-1} c - (m+1) ab^m$$

$${}^m B_2 = m {}_2 b^{m-2} c^2 - (m+1) m a b^{m-1} c + (m+2) {}_2 a^2 b^m$$

$${}^m B_3 = m_3 b^{m-3} c^3 - (m+1) m_2 a b^{m-2} c^2 + (m+2)_2 m a^2 b^{m-1} c - (m+3)_3 a^3 b^m$$

U. S. W.

Es ist daher $(Q^1 K_m) K_r$ oder

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades m gilt.

Hier nach ist man im Stande, weil " A ", gegeben ist und " B ", nach (II) aus a, b, c gefunden werden kann, die vollständige Entwicklung von Q' zu finden.

§. 3.

1. Zusatz. Sucht man die Entwicklung von

$$\frac{P^1}{1+ax+bx^2} = Q^1 = Q + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + \dots + Q_mx^m + \dots$$

wenn P^1 und Q^1 die bisherige Bedeutung behalten, so wird hier $c = 0$ also " $B_r = \pm (r+m)_m a' b'$ ", daher $B_r = \pm a'$; ${}^1 B_r = \pm (r+1) a' b$; ${}^2 B_r = \pm (r+2)_2 a' b^2$; und man findet

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades m gilt.

Für $m = 3$ und $r = 2$ wird hiernach

$${}^3G_2 = \left\{ \begin{array}{l} + \quad {}^3A_2 - {}^3A_1 a + {}^3A a^2 \\ - b \left[{}^2A_2 - 2 \cdot {}^2A_1 a + {}^3_2 \cdot {}^2A a^2 \right] \\ + b^2 \left[{}^1A_2 - 3 \cdot {}^1A_1 a + {}^4_2 \cdot {}^1A a^2 \right] \\ - b^3 \left[A_2 - 4 \cdot A_1 a + {}^5_2 \cdot A a^2 \right] \end{array} \right\}$$

S. 4.

2. Zusatz. Für die Entwicklung von

$$\frac{P^t}{1+ax+cx^2} = Q^t = Q + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + \dots + Q_nx^n + \dots$$

wird hier $b = 0$ also $B_r = \pm a^r$; ${}^1 B_r = \mp r a^{r-1} c$; ${}^2 B_r = \pm r_2 a^{r-2} c^2$;
 ${}^3 B_r = \mp r_3 a^{r-3} c^3$ und überhaupt ${}^m B_r = \pm (-1)^m r_m a^{r-m} c^m$, wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades r gilt. Hiernach findet man

$$\begin{aligned}
 B &= 1; \quad B_1 = -a; \quad B_2 = a^2; \quad B_3 = -a^3; \quad B_4 = a^4; \dots \\
 {}^1B &= 0; \quad {}^1B_1 = c; \quad {}^1B_2 = -2ac; \quad {}^1B_3 = 3a^8c; \quad {}^1B_4 = -4a^3c; \dots \\
 {}^2B &= 0; \quad {}^2B_1 = 0; \quad {}^2B_2 = c^2; \quad {}^2B_3 = -3_2ac^2; \quad {}^2B_4 = 4_2a^2c^2; \dots \\
 {}^3B &= 0; \quad {}^3B_1 = 0; \quad {}^3B_2 = 0; \quad {}^3B_3 = c^3; \quad {}^3B_4 = -4_3ac^3; \dots \\
 {}^4B &= {}^4B_1 = {}^4B_2 = {}^4B_3 = 0; \quad {}^4B_4 = c^4; \quad {}^4B_5 = -5_4ac^4; \dots \text{ folglich}
 \end{aligned}$$

$${}^m G_r = \left\{ \begin{array}{l} + {}^m A_r - {}^m A_{r-1} a + {}^m A_{r-2} a^2 - \dots + (-1)^r {}^m A a^r \\ - c [{}^{m-1} A_{r-1} - 2 \cdot {}^{m-1} A_{r-2} a + 3 \cdot {}^{m-1} A_{r-3} a^2 - \dots + (-1)^r r \cdot {}^{m-1} A a^{r-1}] \\ + c^2 [{}^{m-2} A_{r-2} - 3_2 \cdot {}^{m-2} A_{r-3} a + 4_2 \cdot {}^{m-2} A_{r-4} a^2 - \dots + (-1)^r r_2 \cdot {}^{m-2} A a^{r-2}] \\ - c^3 [{}^{m-3} A_{r-3} - 4_3 \cdot {}^{m-3} A_{r-4} a + 5_3 \cdot {}^{m-3} A_{r-5} a^2 - \dots + (-1)^r r_3 \cdot {}^{m-3} A a^{r-3}] \\ + c^4 [{}^{m-4} A_{r-4} - 5_4 \cdot {}^{m-4} A_{r-5} a + 6_4 \cdot {}^{m-4} A_{r-6} a^2 - \dots + (-1)^r r_4 \cdot {}^{m-4} A a^{r-4}] \\ - c^5 [{}^{m-5} A_{r-5} - 6_5 \cdot {}^{m-4} A_{r-6} a + 7_5 \cdot {}^{m-5} A_{r-7} a^2 - \dots + (-1)^r r_5 \cdot {}^{m-5} A a^{r-5}] \end{array} \right\}$$

Für $m = 4$ und $r = 3$ wird

$${}^4G_3 = \left\{ \begin{array}{l} + {}^4A_3 - {}^4A_2 a + {}^4A_1 a^2 - {}^4A a^3 \\ - c ({}^3A_2 - 2 \cdot {}^3A_1 a + {}^3A a^2) \\ + c^2 ({}^2A_1 - 3a \cdot {}^2A a) \\ - c^3 \cdot {}^1A \end{array} \right\}$$

§. 5.

3. Zusatz. Sucht man die Entwicklung von

$$\frac{P^1}{1 + b\gamma + cxy} = Q^1 = Q + Q_1\gamma + Q_2\gamma^2 + Q_3\gamma^3 + \dots + Q_n\gamma^n + \dots$$

so wird hier $a = 0$ also, " $B_r = m_r b^{-r} c^r$ ", daher " $B_r = 0$ " für $r > m$, wegen des Factors m_r . Hiernach erhält man

Für $m = 4$ und $r = 7$ wird

$${}^4G_7 = \left\{ \begin{array}{l} + {}^4A_7 \\ - {}^3A_7 b - {}^3A_6 c \\ + {}^2A_7 b^2 + 2 \cdot {}^2A_6 b c + {}^2A_5 c^2 \\ - {}^1A_7 b^3 - 3 \cdot {}^1A_6 b^2 c - 3_2 \cdot {}^1A_5 b c^2 - {}^1A_4 c^3 \\ + A_7 b^4 + 4 \cdot A_6 b^3 c + 4_2 \cdot A_5 b^2 c^2 + 4_3 \cdot A_4 b c^3 + A_3 c^4 \end{array} \right\}$$

§. 6.

4. Zusatz. Für diejenigen Fälle in welchen der Nenner der gegebenen gebrochenen Funktion nur aus einer zweitheiligen Größe besteht, erhält man für Q sehr einfache Ausdrücke.

Wäre die gegebene Funktion $\frac{P^1}{1+ax}$ zu entwickeln, so setze man $b = 0$ in §. 3 oder $c = 0$ in §. 4. Dies giebt

$${}^nG_r = {}^nA_r - {}^nA_{r-1} a + {}^nA_{r-2} a^2 - {}^nA_{r-3} a^3 + \dots + {}^nA (-a)^r$$

daher findet man nach §. 2:

$$Q = A + (A_1 - Aa)x + (A_2 - A_1a + Aa^2)x^2 + (A_3 - A_2a + A_1a^2 - Aa^3)x^3 + \dots$$

$$Q_1 = {}^1A + ({}^1A_1 - {}^1Aa)x + ({}^1A_2 - {}^1A_1a + {}^1Aa^2)x^2 + ({}^1A_3 - {}^1A_2a + {}^1A_1a^2 - {}^1Aa^3)x^3 + \dots$$

$$Q_2 = {}^2A + ({}^2A_1 - {}^2Aa)x + ({}^2A_2 - {}^2A_1a + {}^2Aa^2)x^2 + ({}^2A_3 - {}^2A_2a + {}^2A_1a^2 - {}^2Aa^3)x^3 + \dots$$

u. s. w. Hieraus folgt

$$(I) \frac{P^1}{1+ax} = \left\{ \begin{array}{l} + A + (A_1 - Aa)x + (A_2 - A_1a + Aa^2)x^2 \\ \quad + (A_3 - A_2a + A_1a^2 - Aa^3)x^3 + \dots \\ + [{}^1A + ({}^1A_1 - {}^1Aa)x + ({}^1A_2 - {}^1A_1a + {}^1Aa^2)x^2 \\ \quad + ({}^1A_3 - {}^1A_2a + {}^1A_1a^2 - {}^1Aa^3)x^3 + \dots] y \\ + [{}^2A + ({}^2A_1 - {}^2Aa)x + ({}^2A_2 - {}^2A_1a + {}^2Aa^2)x^2 \\ \quad + ({}^2A_3 - {}^2A_2a + {}^2A_1a^2 - {}^2Aa^3)x^3 + \dots] y^2 \\ + [{}^3A + ({}^3A_1 - {}^3Aa)x + ({}^3A_2 - {}^3A_1a + {}^3Aa^2)x^2 \\ \quad + ({}^3A_3 - {}^3A_2a + {}^3A_1a^2 - {}^3Aa^3)x^3 + \dots] y^3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

Zur Entwicklung der Funktion $\frac{P^1}{1+by}$ setze man $a = 0$ in §. 3 oder $c = 0$ in §. 5, so wird

$${}^mG_r = {}^mA_r - {}^{m-1}A_r b + {}^{m-2}A_r b^2 - {}^{m-3}A_r b^3 + \dots \pm A_r b^m$$

Hiernach die Werthe Q , Q_1 , Q_2 bestimmt, so erhält man

$$(II) \frac{P^1}{1+by} = \left\{ \begin{array}{l} + A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 \\ \quad + A_7x^7 + \dots \\ + [{}^1A - Ab + ({}^1A_1 - A_1b)x + ({}^1A_2 - A_2b)x^2 \\ \quad + ({}^1A_3 - A_3b)x^3 + ({}^1A_4 - A_4b)x^4 + \dots] y \\ + [{}^2A - {}^1Ab + Ab^2 + ({}^2A_1 - {}^1A_1b + A_1b^2)x \\ \quad + ({}^2A_2 - {}^1A_2b + A_2b^2)x^2 + \dots] y^2 \\ + [{}^3A - {}^2Ab + {}^1Ab^2 - Ab^3 + ({}^3A_1 - {}^2A_1b + {}^1A_1b^2 \\ \quad - A_1b^3)x + \dots] y^3 \\ + [{}^4A - {}^3Ab + {}^2Ab^2 - {}^1Ab^3 + Ab^4 + ({}^4A_1 - {}^3A_1b \\ \quad + {}^2A_1b^2 - {}^1A_1b^3 + A_1b^4)x + \dots] y^4 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

Die Funktion $\frac{P^4}{1+cxy}$ zu entwickeln, setze man $a = 0$ in §. 4 oder $b = 0$ in §. 5, so erhält man

$${}^mG_r = {}^m A_r - {}^{m-1} A_{r-1} c + {}^{m-2} A_{r-2} c^2 - {}^{m-3} A_{r-3} c^3 + {}^{m-4} A_{r-4} c^4 - \dots$$

und wenn hiernach die Werthe Q , Q_1 , Q_2 , bestimmt werden, so findet man

$$\frac{P^1}{1+cx^2y} = \left\{ \begin{array}{l} + A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6 + A_7 x^7 + \dots \\ + [{}^1A + ({}^1A_1 - {}^1Ac) x + ({}^1A_2 - {}^1A_1 c) x^2 + ({}^1A_3 - {}^1A_2 c) x^3 \\ \quad + ({}^1A_4 - {}^1A_3 c) x^4 + \dots] y \\ + [{}^2A + ({}^2A_1 - {}^1Ac) x + ({}^2A_2 - {}^1A_1 c + {}^1Ac^2) x^2 + ({}^2A_3 - {}^1A_2 c \\ \quad + {}^1A_1 c^2) x^3 + \dots] y^2 \\ + [{}^3A + ({}^3A_1 - {}^2Ac) x + ({}^3A_2 - {}^2A_1 c + {}^2Ac^2) x^2 + ({}^3A_3 - {}^2A_2 c + {}^1A_1 c^2 \\ \quad - {}^1Ac^3) x^3 + \dots] y^3 \\ + [{}^4A + ({}^4A_1 - {}^3Ac) x + ({}^4A_2 - {}^3A_1 c + {}^2Ac) x^2 + ({}^4A_3 - {}^3A_2 c + {}^2A_1 c^2 \\ \quad - {}^1Ac^3) x^3 + \dots] y^4 \\ + [{}^5A + ({}^5A_1 - {}^4Ac) x + ({}^5A_2 - {}^4A_1 c + {}^3Ac) x^2 + ({}^5A_3 - {}^4A_2 c + {}^3A_1 c^2 \\ \quad - {}^2Ac^3) x^3 + \dots] y^5 \end{array} \right.$$

§. 7.

Besteht der Zähler $P^t = P + P_1 y + P_2 y^2 + P_3 y^3 + \dots$ aus einer bestimmten Anzahl Glieder, so lässt sich leicht übersehen, dass alsdann die gefundenen Ausdrücke noch sehr vereinfacht werden können. Sucht man z. B. die Entwicklung von

$$\frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + {}^1 A y + {}^1 A_1 x y + {}^2 A y^2}{1 + c x y},$$

so sind hier außer A ; A_1 ; A_2 ; 1A ; 1A_1 ; 2A ; die übrigen Koeffizienten = 0, daher erhält man

$$\frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + {}^1 A y + {}^1 A_1 x y + {}^2 A y^2}{1 + c x y} = \left\{ \begin{array}{l} + A + A_1 x + A_2 x^2 \\ - [- {}^1 A - ({}^1 A_1 - A c) x + A_1 c x^2 + A_2 c x^3] y \\ + [{}^2 A - {}^1 A c x - ({}^1 A_1 - A c) c x^2 + A_1 c^2 x^3 \\ \quad + A_2 c^2 x^4] y^2 \\ - [{}^2 A - {}^1 A c x - ({}^1 A_1 - A c) c x^2 + A_1 c^2 x^3 \\ \quad + A_2 c^2 x^4] c x y^3 \\ + [{}^2 A - {}^1 A c x - ({}^1 A_1 - A c) c x^2 + A_1 c^2 x^3 \\ \quad + A_2 c^2 x^4] c^2 x^2 y^4 \\ - [{}^2 A - {}^1 A c x - ({}^1 A_1 - A c) c x^2 + A_1 c^2 x^3 \\ \quad + A_2 c^2 x^4] c^3 x^3 y^5 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

§. 8.

Den Zusammenhang der eingeführten Koeffizienten zu übersehen, dienen folgende Auseinandersetzungen. Es war

$$P^1 = (1 + a x + b y + c x y) \cdot Q^1$$

oder aus §. 2 die entsprechenden Werthe für P^1 und Q^1 gesetzt und nach den Potenzen von y geordnet, gibt

$$P + P_1 y + P_2 y^2 + P_3 y^3 + \dots + P_m y^m \dots =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + Q + Q_1 \Big| y + Q_2 \Big| y^2 \dots + Q_m \Big| y^m \dots \\ + a x Q + a x Q_1 \Big| + a x Q_2 \Big| + a x Q_m \Big| \\ \quad + b Q \Big| + b Q_1 \Big| + b Q_{m-1} \Big| \\ \quad + c x Q \Big| + c x Q_1 \Big| + c x Q_{m-1} \Big| \end{array} \right\}$$

daher wird nach der Lehre von den unbestimmten Koeffizienten $P_m = (1 + a x) Q_m + (b + c x) Q_{m-1}$, oder wenn man für P_m , Q_m und Q_{m-1} die entsprechenden Werthe nach §. 2 setzt:

$${}^n A + {}^n A_1 x + {}^n A_2 x^2 + {}^n A_3 x^3 + \dots + {}^n A_r x^r + \dots =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + {}^n G + {}^n G_1 \Big| x + {}^n G_2 \Big| x^2 + \dots + {}^n G_r \Big| x^r + \dots \\ \quad + a \cdot {}^n G \Big| + a \cdot {}^n G_1 \Big| + a \cdot {}^n G_2 \Big| + a \cdot {}^n G_{r-1} \Big| \\ + b \cdot {}^{n-1} G + b \cdot {}^{n-1} G_1 \Big| + b \cdot {}^{n-1} G_2 \Big| + b \cdot {}^{n-1} G_r \Big| \\ \quad + c \cdot {}^{n-1} G \Big| + c \cdot {}^{n-1} G_1 \Big| + c \cdot {}^{n-1} G_{r-1} \Big| \end{array} \right\}$$

daher nach der Lehre von den unbestimmten Koeffizienten

$$(I) \quad {}^m A_r = {}^m G_r + a \cdot {}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1}$$

Nach einander 0, 1, 2, 3, statt r und m gesetzt, so wird wegen $\bar{A}_{-r} = 0$ und $\bar{A}_r = 0$

$$\begin{aligned}
 {}^m A &= {}^m G + b \cdot {}^{m-1} G \\
 {}^m A_1 &= {}^m G_1 + a \cdot {}^m G + b \cdot {}^{m-1} G_1 + c \cdot {}^{m-1} G \\
 {}^m A_2 &= {}^m G_2 + a \cdot {}^m G_1 + b \cdot {}^{m-1} G_2 + c \cdot {}^{m-1} G_1 \\
 {}^m A_3 &= {}^m G_3 + a \cdot {}^m G_2 + b \cdot {}^{m-1} G_3 + c \cdot {}^{m-1} G_2 \\
 &\dots \\
 A_r &= G_r + a \cdot G_{r-1} \\
 {}^1 A_r &= {}^1 G_r + a \cdot {}^1 G_{r-1} + b \cdot G_r + c \cdot G_{r-1} \\
 {}^2 A_r &= {}^2 G_r + a \cdot {}^2 G_{r-1} + b \cdot {}^1 G_r + c \cdot {}^1 G_{r-1} \\
 {}^3 A_r &= {}^3 G_r + a \cdot {}^3 G_{r-1} + b \cdot {}^2 G_r + c \cdot {}^2 G_{r-1} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man ferner

$$\begin{array}{ll} {}^0A = {}^0G & A_0 = G_0 \\ {}^1A = {}^1G + b . \quad G & A_1 = G_1 + aG \\ {}^2A = {}^2G + b . \quad {}^1G & A_2 = G_2 + aG_1 \\ {}^3A = {}^3G + b . \quad {}^2G & A_3 = G_3 + aG_2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

§. 9.

Aufgabe. Die gegebene partielle Differenzgleichung

$${}^m G_r + a \cdot {}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1} = f(r, m)$$

zu integriren oder den Werth von " G " zu finden, wenn $f(r, m)$ irgend eine Funktion von r und m ist.

Auflösung. Man vergleiche den gegebenen Ausdruck mit (I) §. 8 so wird $\mathcal{A}_r = f(r, m)$, und man kann hiernach \mathcal{A}_r für alle Werthe von r und m finden, daher erhält man \mathcal{G}_r nach (III) §. 2 wenn zuvor der Werth von \mathcal{B}_r nach (II) §. 2 bestimmt ist.

Beispiel. Die zum integrieren gegebene Differenzgleichung sei

$${}^m G_r + {}^m G_{r-1} + {}^{m-1} G_r + {}^{m-1} G_{r-1} = m r$$

so wird hier $a = b = c = 1$ und $A_r = mr$, also §. 2 (II)

$${}^*B_r = \pm \left[(r+m)_m - (r+m-1)_m m + (r+m-2)_m m_2 - \dots \pm m_r \right]$$

oder weil nach den Eigenschaften der Binomialkoeffizienten dieser Ausdruck $= \pm 1$ wird, so erhält man

$"B_r = \pm 1$, wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades r gilt. Hiernach findet man

${}^n B_0 = 1; {}^n B_1 = -1; {}^n B_2 = 1; {}^n B_3 = -1; \dots$ daher §. 2 (III)
wegen $A_r = 0$

oder weil $[r - (r-1) + \dots \mp 1] = (-1)^r [-1 + 2 - 3 + \dots \pm r]$
 $= \frac{2r+1-(-1)^r}{4}$ ist, so erhält man auch

$${}^m G_r = \left[m - (m-1) + (m-2) - \dots \mp 1 \right] \xrightarrow{\frac{2r+1-(-1)^r}{4}} \text{folglich}$$

$${}^m G_r = \frac{2m+1 - (-1)^m}{4} \cdot \frac{2r+1 - (-1)^r}{4}$$

Für $m = r$ wird ${}^r G_1 + {}^{r-1} G + \dots + {}^1 G_1 + {}^0 G = 1$.

$$\text{Aber } {}^1G_1 = {}_1; \quad {}^1G = 0; \quad G_1 = 0; \quad G = 0;$$

$$\text{daher } 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

Für $m = 3$ und $r = 2$ wird ${}^3G_2 + {}^3G_1 + {}^2G_2 + {}^2G_1 = 3 \cdot 2$.

$$\text{Aber } {}^3G_2 = 2; \quad {}^3G_1 = 2; \quad {}^2G_2 = 1; \quad {}^2G_1 = 1;$$

$$\text{daher } 2 + 2 + 1 + 1 = 6.$$

Für $m = 7$ und $r = 6$ wird ${}^7G_6 + {}^7G_5 + {}^6G_6 + {}^6G_5 = 7 \cdot 6$.

$$\text{Aber } {}^7G_6 = 12; \quad {}^7G_5 = 12; \quad {}^6G_6 = 9; \quad {}^6G_5 = 9;$$

$$\text{daher } 12 + 12 + 9 + 9 = 42.$$

Sucht man die Funktion aus welcher die gegebene Differenzgleichung entstanden ist und bemerkt dass hier $a = b = c = 1$ ist, so wird

$\frac{P^t}{x+y+xy}$ die gesuchte erzeugende Funktion, und man findet nach §. 2 wegen ${}^nA = 0$ und $A = 0$

$$P^t = \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 1 xy + 1 \cdot 2 x^2 y + 1 \cdot 3 x^3 y + 1 \cdot 4 x^4 y + 1 \cdot 5 x^5 y + \dots \\ 2 \cdot 1 xy^2 + 2 \cdot 2 x^2 y^2 + 2 \cdot 3 x^3 y^2 + 2 \cdot 4 x^4 y^2 + 2 \cdot 5 x^5 y^2 + \dots \\ 3 \cdot 1 xy^3 + 3 \cdot 2 x^2 y^3 + 3 \cdot 3 x^3 y^3 + 3 \cdot 4 x^4 y^4 + 3 \cdot 5 x^5 y^4 + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ m \cdot 1 xy^m + m \cdot 2 x^2 y^m + m \cdot 3 x^3 y^m + m \cdot 4 x^4 y^m + m \cdot 5 x^5 y^m + \dots \end{array} \right\}$$

Für verschiedene Werthe von nG_r erhält man nachstehende Tafel mit doppelten Eingängen

nG_r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	r
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	
3	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	
4	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	
5	0	3	3	6	6	9	9	12	12	15	
6	0	3	3	6	6	9	9	12	12	15	
7	0	4	4	8	8	12	12	16	16	20	
.....	
m												

§. 10.

Zusatz. Es lassen sich nun noch die Fälle entwickeln, wenn von den Koeffizienten a, b, c einer oder zwei $= 0$ werden, und es wird hinreichend seyn, den Fall $a = 0$, auseinander zu setzen. Es sei daher die Gleichung

$${}^nG_r + b \cdot {}^{n-1}G_r + c \cdot {}^{n-1}G_{r-1} = f(m, r)$$

zum integrieren gegeben, so erhält man hier,

$${}^nA_r = f(m, r) \text{ und wegen } a = 0, {}^nB_r = m_r b^{m-r} c^r, \text{ daher}$$

Diesen Fall auf die besondere Gleichung

$${}^m G_r + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1} = (m+1) \ r$$

angewandt, giebt $f(m, r) = (m + 1)r$, daher wird hier

Nun ist nach den Eigenschaften der Reihen mit Binomialkoeffizienten

$$rb^m + m(r-1)b^{m-1}c + m_2(r-2)b^{m-2}c^2 + \dots + m_{r-1} \cdot b^{m-r+1}c^{r-1} \\ = (rb + rc - mc)(b+c)^{m-1}$$

Hierin nach einander 1, 2, 3, 4, statt m gesetzt, so erhält man auch

$$"G_r = (m+1) r - \left\{ \begin{array}{l} + (rb + rc - c) \cdot m \\ - (rb + rc - 2c) (b+c) (m-1) \\ + (rb + rc - 3c) (b+c)^2 (m-2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mp (rb + rc - mc) (b+c)^{m-1} \cdot 1. \end{array} \right\}$$

Die vorstehende in Klammern befindliche arithmetische Reihe der zweiten Ordnung, könnte zwar auch summirt werden, weil aber dadurch für die Berechnung keine Abkürzung entsteht, so wird solche unverändert beibehalten werden.

Als Beispiel zur Berechnung sei

$$^m G_r + 2 \cdot {}^{m-1} G_r + 3 \cdot {}^{m-1} G_{r-1} = (m+1) r$$

gegeben, so wird hier $b = 2$ und $c = 3$, daher

$$\begin{aligned} {}^m G_r = & r(m+1) - (5r-3)m + (5r-6)5(m-1) - (5r-9)5^2(m-2) \\ & + (5r-12)5^3(m-3) - \dots \end{aligned}$$

Hieraus folgt ${}^0 G_r = r$ und ${}^m G_0 = 0$;

$${}^m G_1 = 1(m+1) - 2m - 5(m-1) + 100(m-2) - 875(m-3) + 6250(m-4) - \dots$$

$${}^m G_2 = 2(m+1) - 7m + 20(m-1) - 25(m-2) - 250(m-3) + 3125(m-4) - \dots$$

$${}^m G_3 = 3(m+1) - 12m + 45(m-1) - 150(m-2) + 375(m-3) - 0(m-4) - \dots$$

$${}^m G_4 = 4(m+1) - 17m + 70(m-1) - 275(m-2) + 1000(m-3) - 3125(m-4) + \dots$$

$${}^m G_5 = 5(m+1) - 22m + 95(m-1) - 400(m-2) + 1625(m-3) - 6250(m-4) + \dots$$

u. s. w. Man erhält daher nachstehende Tafel.

${}^m G_r$	0	1	2	3	4	5	6	7.....r							
0	0	+	1	+	2	+	3	+	4	+	5	+	6	+	7.....
1	0		0	-	3	-	6	-	9	-	12	-	15	-	18.....
2	0	-	6	+	12	+	30	+	48	+	66	+	84	+	102.....
3	0	+	88	+	2	-	84	-	170	-	256	-	342	-	428.....
4	0	-	693	-	258	+	177	+	612	+	1047	+	1482	+	1917.....
5	0	+	4776	+	2607	+	438	-	1731	-	3900	-	6069	-	8238.....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m															

Für verschiedene Werthe von m und r erhält man

$$\begin{aligned} {}^5 G_3 + 2 \cdot {}^4 G_3 + 3 \cdot {}^4 G_2 &= 6 \cdot 3 \text{ oder} \\ &+ 438 + 2 \cdot 177 - 3 \cdot 258 = 18. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^5 G_6 + 2 \cdot {}^4 G_6 + 3 \cdot {}^4 G_5 &= 6 \cdot 6 \text{ oder} \\ &- 6069 + 2 \cdot 1482 + 3 \cdot 1047 = 36. \end{aligned}$$

§. 11.

Aufgabe. Die gegebene partielle Differenzgleichung

$${}^m G_r + a \cdot {}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1} = 0$$

zu integrieren, wenn ${}^m G$ und G_r gegeben sind, oder willkürlich angenommen werden.

Auflösung. Die gegebene Gleichung mit (I) §. 8 verglichen, zieht hier ${}^m A_r = 0$, dagegen wird nach der dortigen Entwicklung:

$${}^m A = {}^m G + b \cdot {}^{m-1} G \text{ und } A_r = G_r + a \cdot G_{r-1},$$

daher nach §. 2

$${}^m G_r = \left\{ \begin{aligned} & + {}^m A \cdot B_r - {}^{m-1} A \cdot {}^1 B_r + {}^{m-2} A \cdot {}^2 B_r - \dots + (-1)^m \cdot A \cdot {}^m B_r \\ & + (-1)^m [A_r \cdot {}^m B + A_{r-1} \cdot {}^m B_1 + A_{r-2} \cdot {}^m B_2 + \dots + A_1 \cdot {}^m B_{r-1}] \end{aligned} \right\}$$

WO

$${}^m B_r = (-1)^r \left[(r+m)_m a' b^m - (r+m-1)_m m a'^{-1} b^{m-1} c + (r+m-2)_m m_2 a'^{-2} b^{m-2} c^2 - \dots \pm m_r b^{m-r} c^r \right] \text{ ist.}$$

Auch erhält man für den Zähler des erzeugenden Bruchs:

$$P^1 = \left\{ A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \dots \right\}$$

Beispiel. Die zum integrieren gegebene Differenzgleichung sei

$${}^m G_r + {}^m G_{r-1} + {}^{m-1} G_r + {}^{m-1} G_{r-1} = 0.$$

Ferner sei $G = m$ und $G_r = r^2$ gegeben, so wird

$${}^m A = {}^m G + {}^{m-1} G = m + m - 1 = 2m - 1,$$

$$A_r = G_r + G_{r-1} = r^2 + (r-1)^2 = 2r(r-1) + 1 = 4r_2 + 1 \text{ und}$$

$${}^n B_r = (-1)^r \left[(r+m)_m - (r+m-1)_m + \dots \pm m_r \right] = (-1)^r \text{ daher}$$

$${}^mB_0 = 1; \quad {}^mB_1 = -1; \quad {}^mB_2 = 1; \quad {}^mB_3 = -1; \quad u.s.w.$$

Ferner ist nach §. 8. ${}^0A = {}^0G$ und $A_0 = G_0$ daher ${}^0A = A_0 = 0$, folglich

Durch Summirung dieser Reihen erhält man

$$m = (2m-1) - (2m-3) + (2m-5) - \dots \pm 3 \mp 1$$

$$\frac{r^2}{4} - \frac{1 - (-1)^r}{8} = r_2 - (r-1)_2 + (r-2)_2 - (r-3)_2 + \dots + 2_2 (-1)^r \text{ und}$$

$$\frac{1 - (-1)^r}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 \cdot (-1)^{r-1}, \text{ daher wird auch}$$

$${}^m G_r = m (-1)^r + \left[r^2 - \frac{1 - (-1)^r}{2} \right] (-1)^m + \frac{1 - (-1)^r}{2} (-1)^m \text{ oder auch}$$

$${}^m G_r = m (-1)^r + r^2 (-1)^m$$

Berechnet man hiernach verschiedene Werthe von ${}^m G_r$, so entsteht folgende Tafel.

${}^m G_r$	0	1	2	3	4	5	6	7.....r
0	0	+ 1	+ 4	+ 9	+ 16	+ 25	+ 36	+ 49.....
1	1	- 2	- 3	- 10	- 15	- 26	- 35	- 50.....
2	2	- 1	+ 6	+ 7	+ 18	+ 23	+ 38	+ 47.....
3	3	- 4	- 1	- 12	- 13	- 28	- 33	- 52.....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m								

Für den Zähler des erzeugenden Bruchs erhält man

$$P^1 = \left\{ \begin{array}{l} +x + 5x^2 + 13x^3 + 25x^4 + 41x^5 + 60x^6 + \dots \\ +y + 3y^2 + 5y^3 + 7y^4 + 9y^5 + 11y^6 + \dots \end{array} \right\}$$

§. 12.

Zusatz. Werden nach einander $a, b, c = 0$ gesetzt, so entstehen folgende Ausdrücke.

Für $a = 0$ wird

$$(I) {}^m G_r + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1} = 0$$

$${}^m A = {}^m G + b \cdot {}^{m-1} G; \quad A_r = G_r; \quad {}^0 A = {}^0 G.$$

$${}^m B_r = m_r b^{m-r} c^r, \text{ also } {}^m B = b^m; \quad {}^m B_1 = m b^{m-1} c; \quad {}^m B_2 = m_2 b^{m-2} c^2; \dots$$

${}^m B_m = c^m$, wogegen ${}^m B_r = 0$ für $r > m$ wird. Hiernach erhält man

$${}^m G_r = \left\{ \begin{array}{l} +(-1)^r [{}^{m-r} A \cdot {}^r B_r - {}^{m-r-1} A \cdot {}^{r+1} B_r + {}^{m-r-2} A \cdot {}^{r+2} B_r - \dots] \\ \quad + (-1)^{m-r} \cdot A \cdot {}^m B_r \end{array} \right\} \text{ oder}$$

$${}^m G_r = \left\{ \begin{array}{l} +(-1)^r [c^r \cdot {}^{m-r} A - (r+1)_2 b^{r+1} c^r \cdot {}^{m-r-1} A + (r+2)_2 b^2 c^r \cdot {}^{m-r-2} A - \dots] \\ \quad + (-1)^{m-r} m_r b^{m-r} c^r \cdot A \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} +(-1)^n [b^m \cdot A_r + m b^{m-1} c \cdot A_{r-1} + m_2 b^{m-2} c^2 \cdot A_{r-2} + \dots] \\ \quad + m_{r-1} b^{m-r+1} c^{r-1} \cdot A_1 \end{array} \right\}$$

Für $b = 0$ wird

$$(II) \quad {}^mG_r + a \cdot {}^mG_{r-1} + c \cdot {}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

$$\begin{aligned} {}^mA &= {}^mG; \quad A_r = G_r + a \cdot G_{r-1}; \quad B_r = a^r (-1)^r; \quad {}^1B_r = -ra^{r-1}c(-1)^r; \\ {}^2B_r &= r_1 a^{r-2} c^2 (-1)^r; \quad \dots \quad {}^rB_r = c^r \text{ und } {}^mB_r = 0 \text{ für } m > r \text{ folglich} \\ {}^mG_r &= {}^mA \cdot B_r - {}^{m-1}A \cdot {}^1B_r + {}^{m-2}A \cdot {}^2B_r - \dots + (-1)^r \cdot {}^{m-r}A \cdot {}^rB_r \text{ oder} \\ {}^mG_r &= (-1)^r \left[a^r \cdot {}^mG + ra^{r-1}c \cdot {}^{m-1}G + r_1 a^{r-2} c^2 \cdot {}^{m-2}G + \dots + c^r \cdot {}^{m-r}G \right] \text{ oder auch} \\ {}^mG_r &= (-1)^r \left[{}^mG + r \frac{c}{a} \cdot {}^{m-1}G + r_1 \frac{c^2}{a^2} \cdot {}^{m-2}G + r_2 \frac{c^3}{a^3} \cdot {}^{m-3}G + \dots + \frac{c^r}{a^r} \cdot {}^{m-r}G \right] \end{aligned}$$

Für $c = 0$ wird

$$(III) \quad {}^mG_r + a \cdot {}^mG_{r-1} + b \cdot {}^{m-1}G_r = 0$$

$$\begin{aligned} {}^mA &= {}^mG + b \cdot {}^{m-1}G; \quad A_r = G_r + a \cdot G_{r-1}; \quad {}^1A = {}^0G. \quad {}^mB_r \\ &= (-1)^r (r+m)_m a^r b^m \text{ folglich} \end{aligned}$$

$${}^mG_r = \begin{cases} + (-a)^r [{}^mA - (r+1)_1 b \cdot {}^{m-1}A + (r+2)_2 b^2 \cdot {}^{m-2}A - \dots + (-1)^m (r+m)_m b^m \cdot A] \\ + (-b)^m [A_r - (m+1)_1 a \cdot A_{r-1} + (m+2)_2 a^2 \cdot A_{r-2} - \dots - (-1)^r (m+r+1)_{r+1} a^{r+1} \cdot A_1] \end{cases}$$

In (I) $b = 0$ oder in (II) $a = 0$ gesetzt, gibt

$$(IV) \quad {}^mG_r + c \cdot {}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

$${}^mG_r = (-1)^r \cdot c^r \cdot {}^{m-r}G.$$

1. Beispiel. Die Gleichung.

$${}^mG_r - {}^{m-1}G_r - {}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

zu integrieren, wenn ${}^mG = 1$ und $G_r = 0$ gegeben ist, wird hier, nach (I)

$$b = -1; \quad c = -1; \quad {}^mA = 0, \quad A_r = 0; \quad {}^1A = 1 \text{ also}$$

$${}^mG_r = (-1)^r (-1)^{m-r} m_r (-1)^{m-r} (-1)^r \text{ folglich}$$

$${}^mG_r = m_r, \text{ wie bei Lagrange §. 10 a. a. O.}$$

Der erzeugende Bruch ist hier $= \frac{1}{1-y-xy}$.

2. Beispiel. Die Gleichung

$${}^mG_r - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot {}^mG_{r-1} - \frac{1}{n} \cdot {}^{m-1}G_{r-1} = 0$$

zu integrieren wird hier nach (II) $a = -\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ und $b = -\frac{1}{n}$ also
 $\frac{c}{a} = \frac{1}{n-1}$ daher

$${}^mG_r = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r \left[{}^mG + \frac{r}{n-1} \cdot {}^{m-1}G + \frac{r_2}{(n-1)^2} \cdot {}^{m-2}G + \frac{r_3}{(n-1)^3} \cdot {}^{m-3}G + \dots + \frac{r_r}{(n-1)^r} \cdot {}^{m-r}G \right]$$

wie bei Lagrange §. 64. a. a. O.

§. 13.

Es bleibt nun noch eine scheinbare Schwierigkeit für den besondern Fall zu heben, dass die partielle Differenzgleichung

$${}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1} = f(m; r)$$

zum integriren gegeben ist, weil diese Gleichung aus den vorhergehenden Entwickelungen nicht abgeleitet werden kann. Wird hier nach die Gleichung $\frac{P^1}{x + by + cxy} = Q^1$ als Grundlage zur Entwicklung angenommen, so kann $P^1 = P + P_1y + P_2y^2 + P_3y^3 + \dots$ oder $Q^1 = Q + Q_1y + Q_2y^2 + Q_3y^3 + \dots$ als gegeben vorausgesetzt werden. Es sei daher

so erhält man aus $(x + by + cx^2y) \cdot Q^t = P^t$ oder

Man setze $b + cx = \beta$, so wird $Q^1 = \frac{P^1}{x + \beta y}$ oder

$$Q^1 = P^1 \left[\frac{1}{x} - \frac{\beta y}{x^2} + \frac{\beta^2 y^2}{x^3} - \frac{\beta^3 y^3}{x^4} + \dots + (-1)^m \frac{\beta^m y^m}{x^{m+1}} + \dots \right]$$

daher eben so wie §. 2 der zu y^m gehörige Koeffizient $Q^1 K_m$ oder $Q_m = P_m x^{-1} - P_{m-1} \beta x^{-2} + P_{m-2} \beta^2 x^{-3} - \dots + (-1)^m P \beta^m x^{-m-1}$.

Diese Glieder in Reihen aufgelöst und nach den steigenden Potenzen von x geordnet, so findet man den zu x^r gehörigen Koeffizienten

$$(Q_m) K_r = \left(\frac{P_m}{x} \right) K_{m+r} - \left(\frac{P_{m-1} \beta}{x^2} \right) K_{m+r} + \left(\frac{P_{m-2} \beta^2}{x^3} \right) K_{m+r} - \dots + (-1)^m \left(\frac{P \beta^m}{x^{m+1}} \right) K_{m+r} \quad [I]$$

Ferner ist, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, $\frac{(b + cx)^n}{x^{n+1}}$ oder

$$\frac{\beta^n}{x^{n+1}} = b^n x^{-n-1} + n b^{n-1} c x^{-n} + n_2 b^{n-2} c^2 x^{1-n} + \dots + n_r b^{n-r} c^r x^{r-n-1} + \dots + n_n c^n x^{-1}$$

oder wenn man $n_r b^{n-r} c^r = {}^n B_r$ setzt

$$\frac{\beta^n}{x^{n+1}} = {}^n B x^{-n-1} + {}^n B_1 x^{-n} + {}^n B_2 x^{1-n} + \dots + {}^n B_r x^{r-n-1} + \dots + {}^n B_n x^{-1}$$

Diese Reihe mit

$$P_{m-n} = {}^{m-n} A \cdot x^{n+1-m} + {}^{m-n} A_1 \cdot x^{n+2-m} + {}^{m-n} A_2 \cdot x^{n+3-m} + \dots$$

multipliziert und nach den steigenden Potenzen von x geordnet, giebt den zu x^r gehörigen Koeffizienten

$$\left(\frac{P_{m-n} \beta^n}{x^{n+1}} \right) K_{m+r} = {}^{m-n} A_{m+r} \cdot {}^n B + {}^{m-n} A_{m+r-1} \cdot {}^n B_1 + {}^{m-n} A_{m+r-2} \cdot {}^n B_2 + \dots + {}^{m-n} A_{m+r-n} \cdot {}^n B_n$$

und hieraus

$$\left(\frac{P_m}{x} \right) K_{m+r} = {}^n A_{m+r} \cdot B$$

$$\left(\frac{P_{m-1} \beta}{x^2} \right) K_{m+r} = {}^{m-1} A_{m+r} \cdot {}^1 B + {}^{m-1} A_{m+r-1} \cdot {}^1 B_1$$

.....

$$\left(\frac{P \beta^m}{x^{m+1}} \right) K_{m+r} = A_{m+r} \cdot {}^m B + A_{m+r-1} \cdot {}^m B_1 + A_{m+r-2} \cdot {}^m B_2 + \dots + A_r \cdot {}^m B_m$$

oder nach [I] und weil $(Q_m) K_r = {}^n G_r$ ist

Ferner findet man aus $P^1 = (x + by + cxy)$ Q^1

$$P_m = x Q_m + (b + c x) Q_{m-1} \text{ oder}$$

$$P_m = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} b \cdot {}^{m-1}G + b \cdot {}^{m-1}G_1 & x + b \cdot {}^{m-1}G_2 & x^2 + \dots + b \cdot {}^{m-1}G_r & x^r + \dots \text{ und weil} \\ + c \cdot {}^{m-1}G & + c \cdot {}^{m-1}G_1 & + c \cdot {}^{m-1}G_{r-1} & \\ + {}^mG & + {}^mG_1 & + {}^mG_{r-1} & \end{array} \right.$$

$$P_m = {}^m A x^{1-m} + {}^m A_1 x^{2-m} + {}^m A_2 x^{3-m} + \dots + {}^m A_{m-1} x^0 + {}^m A_m x \\ + {}^m A_{m+1} x^2 + \dots + {}^m A_{m+r-1} x^r + \dots$$

so folgt aus der Vergleichung beider Ausdrücke

$$(II) \quad {}^m A_{m+r-1} = {}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1}$$

und wenn man in (I) die entsprechenden Werthe $B = 1$; ${}^1B = b$; ${}^1B_1 = c$; ${}^2B = b^2$; ${}^2B_1 = bc$; ${}^nB = n, b^{n-1}c$ setzt, so findet man auch

§. 14.

Aufgabe. Die gegebene partielle Differenzgleichung

$${}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1} = f(m, r)$$

zu integrieren, wenn $f(m, r)$ irgend eine Funktion von m und r ist.

Auflösung. Man setze ${}^m A_{m+r-1} = f(m, r)$, so wird ${}^m A_{m+r} = f(m, r+1)$;

$= f(1, m+r)$; $A_{m+r} = f(0, m+r+1)$. Diese Werthe in (III) §. 13 gesetzt, geben

Beispiel. Die Differenzgleichung ${}^m G_{r-1} + {}^{m-1} G_r + {}^{m-1} G_{r-1} = m \cdot r$ zu integrieren, wird hier $b = c = 1$ und $f(m, r) = m \cdot r$ also $f(0, r) = 0$, daher

$${}^m G_r = m(r+1) - (m-1)(2r+3) + 4(m-2)(r+2) - 4(m-3)(2r+5) \\ + 16(m-4)(r+3) - 16(m-5)(2r+7) + \dots$$

und es wird hiernach

$$G_r = 0; \quad {}^1 G_r = r + 1; \quad {}^2 G_r = -1; \quad {}^3 G_r = 3r + 5; \quad {}^4 G_r = -2r - 9; \\ \quad {}^5 G_r = 9r + 25; \quad \text{u. s. w.}$$

Für $m = 5$ erhält man

$$^5G_{r-1} + ^4G_r + ^4G_{r-1} = 5 \cdot r \text{ oder}$$

auch entsteht für verschiedene Werthe von m und r nachstehende Tafel

§. 15.

Aufgabe. Die gegebene partielle Differenzgleichung

$${}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1} = 0$$

zu integrieren, wenn der Werth für G_r gegeben ist, oder willkürlich angenommen wird.

Auflösung. Es ist nach (II) §. 13. ${}^m A_{m+r-1} = {}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-1}$, und wenn man hierin $m=0$, dann $r=0$ setzt, so findet man

$$A_{r-1} = G_{r-1} \text{ und } {}^m A_{m-1} = b \cdot {}^{m-1} G_r,$$

daher wenn ${}^m A_{m+r-1} = 0$ gesetzt wird, so wird zugleich erforderlich, dass A_{r-1} und ${}^m A_{m-1}$ die vorstehende Werthe behalten. Man erhält daher nach (III) §. 13.

$${}^m G_r = (-1)^m \left[b^m \cdot A_{m+r} + m b^{m-1} c \cdot A_{m+r-1} + \dots + c^m \cdot A_r \right]$$

oder wegen $A_r = G_r$; $A_{m+r} = G_{m+r}$;

$$\begin{aligned} {}^m G_r = (-1)^m & \left[b^m \cdot G_{m+r} + m b^{m-1} c \cdot G_{m+r-1} + m_2 b^{m-2} c^2 \cdot G_{m+r-2} + \dots \right. \\ & \left. + c^m \cdot G_r \right] \end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$G_r = G_r$$

$${}^1 G_r = -b \cdot G_{r+1} - c \cdot G_r$$

$${}^2 G_r = b^2 \cdot G_{r+2} + 2b c \cdot G_{r+1} + c^2 \cdot G_r$$

$${}^3 G_r = -b^3 \cdot G_{r+3} - 3b^2 c \cdot G_{r+2} - 3bc^2 \cdot G_{r+1} - c^3 \cdot G_r$$

u. s. w.

Beispiel. Die Differenzgleichung ${}^m G_{r-1} + {}^2 G_r + {}^3 G_{r-1} = 0$ zu integrieren, wenn $G_r = 4r$ gegeben ist, wird hier $G_r = 4r$; ${}^1 G_r = -4(2+5r)$; ${}^2 G_r = 20(4+5r)$; ${}^3 G_r = -100(6+5r)$; u.s.w. also für $m=3$

$${}^3 G_{r-1} + {}^2 G_r + {}^3 G_{r-1} = 0 \text{ oder auch}$$

$$-100(4+5r) + 2 \cdot 20(4+5r) + 3 \cdot 20(5r-1) = 0.$$

§. 16.

Die vorstehenden Untersuchungen lassen sich noch durch eine ähnliche Behandlung auf partielle Differenzgleichungen anwenden,

deren Index m und r noch in andern als den gegebenen Beziehungen gegen einander stehen. Setzt man den Nenner der erzeugenden Funktion

$$= (1 + ax + bx^2 + cx^3 + \dots) + (d + ex + gx^2 + hx^3 + \dots) y \\ \text{so wird eben so wie §. 8}$$

$$P^t = [1 + ax + bx^2 + cx^3 + \dots + (d + ex + gx^2 + hx^3 + \dots) y] Q^t$$

und wenn " A_r " den zu x^r gehörigen Koeffizienten der Reihe P^t bezeichnet

$$"A_r = "G_r + a \cdot "G_{r-1} + b \cdot "G_{r-2} + c \cdot "G_{r-3} + \dots \\ + d \cdot "G_{r-4} + e \cdot "G_{r-5} + g \cdot "G_{r-6} + \dots$$

woraus der Zusammenhang zwischen dem Nenner der erzeugenden Funktion und den Gliedern der Differenzgleichung hervor geht.

Sucht man daher das Integral der Gleichung

$$"G_r + b \cdot "G_{r-2} + d \cdot "G_{r-4} + h \cdot "G_{r-6} = f(m, r)$$

so ist der Nenner der erzeugenden Funktion $= 1 + bx^2 + (d + hx^3)y$.

Eben so wird für $"G_{r-1} + d \cdot "G_r + g \cdot "G_{r-2} = f(m, r)$
der zugehörige Nenner $= x + (d + gx^2)y$.

§. 17.

Aufgabe. Die partielle Differenzgleichung

$$"G_{r-1} + b \cdot "G_r + c \cdot "G_{r-2} = f(m, r)$$

zu integrieren, wenn $f(m, r)$ irgend eine gegebene Funktion von m und r bedeutet.

Auflösung. Man setze

$$\frac{P + P_1 y + P_2 y^2 + \dots}{x + by + cx^2 y} = Q^t = Q + Q_1 y + Q_2 y^2 + \dots$$

$Q_m = "G + "G_1 x + "G_2 x^2 + \dots$ so findet man wie §. 13.

$P_m = "A x^{1-m} + "A_1 x^{2-m} + "A_2 x^{3-m} + "A_3 x^{4-m} + \dots$ und
wenn man $b + cx^2 = \beta$ setzt

$$Q^t = P^t \left[\frac{1}{x} - \frac{\beta y}{x^2} + \frac{\beta^2 y^2}{x^3} - \frac{\beta^3 y^3}{x^4} + \dots + (-1)^m \frac{\beta^m y^m}{x^{m+1}} + \dots \right]$$

daher eben so wie §. 2 den zu γ^m gehörigen Koeffizienten $Q^1 K_m$ oder $Q_m = P_m x^{-1} - P_{m-1} \beta x^{-2} + P_{m-2} \beta^2 x^{-3} - \dots + (-1)^m P \beta^m x^{-m-1}$.

Diese Glieder, in Reihen aufgelöst und nach den steigenden Potenzen von x geordnet, geben den zu x^r gehörigen Koeffizienten

$$(Q_m) K_r = \left(\frac{P^m}{x} \right) K_{m+r} - \left(\frac{P_{m-1} \beta}{x^2} \right) K_{m+r-1} + \left(\frac{P_{m-2} \beta^2}{x^3} \right) K_{m+r-2} - \dots + (-1)^m \left(\frac{P \beta^m}{x^{m+1}} \right) K_{m+r}. \quad [I]$$

Bedeutet n eine positive ganze Zahl, so wird $\frac{(b+cx^2)^n}{x^{n+1}}$ oder $\frac{\beta^n}{x^{n+1}} = b^n x^{n-1} + n b^{n-1} c x^{1-n} + n_2 b^{n-2} c^2 x^{3-n} + \dots + n_r b^{n-r} c^r x^{2r-1-n} + \dots + c^n x^{n-1}$

und wenn man $n_r b^{n-r} c^r = {}^n B_r$ setzt

$$\frac{\beta^n}{x^{n+1}} {}^n B x^{-n-1} + {}^n B_1 x^{1-n} + {}^n B_2 x^{3-n} + \dots + {}^n B_r x^{2r-1-n} + \dots + {}^n B_n x^{n-1}.$$

Diese Reihe mit

$$P_{m-n} = {}^{m-n} A x^{n+1-m} + {}^{m-n} A_1 x^{n+2-m} + \dots + {}^{m-n} A_{m+r} x^{n+r-m} + \dots$$

multiplizirt und nach den Potenzen von x geordnet, giebt den zu x^r gehörigen Koeffizienten

$$\left(\frac{P_{m-n} \beta^n}{x^{n+1}} \right) K_{m+r} = {}^{m-n} A_{m+r} \cdot {}^n B + {}^{m-n} A_{m+r-2} \cdot {}^n B_1 + {}^{m-n} A_{m+r-4} \cdot {}^n B_2 + \dots + {}^{m-n} A_{m+r-6} \cdot {}^n B_3 + \dots$$

wo die Reihe entweder bei ${}^n B_n$ oder auch, wenn $m+r$ gerade ist, bei ${}^{m-n} A$ oder wenn $m+r$ ungerade ist, bei ${}^{m-n} A_1$ abbricht. Hiernach wird

$$\left(\frac{P_m}{x} \right) K_{m+r} = {}^m A_{m+r} \cdot B$$

$$\left(\frac{P_{m-1} \beta}{x^2} \right) K_{m+r} = {}^{m-1} A_{m+r} \cdot {}^1 B + {}^{m-1} A_{m+r-2} \cdot {}^1 B_1$$

$$\left(\frac{P_1 \beta^{m-1}}{x^m} \right) K_{m+r} = {}^1 A_{m+r} \cdot {}^{m-1} B + {}^1 A_{m+r-2} \cdot {}^{m-1} B_1 + {}^1 A_{m+r-4} \cdot {}^{m-1} B_2 + \dots$$

$$\left(\frac{P \beta^m}{x^{m+1}} \right) K_{m+r} = A_{m+r} \cdot {}^m B + A_{m+r-2} \cdot {}^m B_1 + A_{m+r-4} \cdot {}^m B_2 + A_{m+r-6} \cdot {}^m B_3 + \dots$$

daher wegen $(Q_m) K_r = {}^n G_r$ nach [I], wenn man zuvor statt $B; {}^1 B; {}^2 B; \dots$ die entsprechenden Werthe setzt

Ferner findet man aus $P^1 = (x+by+cx^2y) Q^1$

$$P_m = x Q_m + (b+c x^2) Q_{m-1}, \text{ daher}$$

$$(II) \quad {}^m A_{n+r-1} = {}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-2}$$

und wenn man ${}^m A_{m+r-1} = f(m, r)$ setzt

Beispiel. Die gegebene Gleichung ${}^m G_{r-1} + {}^{m-1} G_r + {}^{m-1} G_{r-2} = m \cdot r$ zu integrieren, wird hier $f(m, r) = m \cdot r$ also $f(0, r) = 0$ u. s. w. daher findet man

$${}^m G_r = (r+1) \left[m - 2(m-1) + 4(m-2) - 8(m-3) + 16(m-4) - 32(m-5) + \dots \right]$$

$$\text{also } G_r = 0; \quad {}^1G_r = r+1; \quad {}^2G_r = 0; \quad {}^3G_r = 3(r+1); \quad {}^4G_r = -2(r+1); \\ \quad {}^5G_r = 9(r+1); \quad {}^6G_r = -12(r-1); \quad \text{u. s. w.}$$

Für $m = 2$ und $m = 5$ findet man hiernach

$${}^2 G_{r-1} + {}^1 G_r + {}^1 G_{r-2} = 2r \text{ und } {}^5 G_{r-1} + {}^4 G_r + {}^4 G_{r-2} = 5r \text{ oder}$$

$$0 + r + 1 + r - 1 = 2r \quad 9r - 2r - 2 - 2r + 2 = 5r.$$

§. 18.

Aufgabe. Die partielle Differenzgleichung

$${}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-2} = 0$$

zu integriren, wenn die Werthe ${}^m G$ und G_r gegeben sind oder willkührlich angenommen werden.

Auflösung. Nach (II) §. 17 ist

$${}^m A_{m+r-1} = {}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-2}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} A_{r-1} &= G_{r-1}; \quad {}^m A_{m-1} = b \cdot {}^{m-1} G; \quad {}^m A_m = {}^m G + b \cdot {}^{m-1} G_1; \quad {}^m A_{m+1} \\ &= {}^m G_1 + b \cdot {}^{m-1} G_2 + c \cdot {}^{m-1} G; \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Setzt man nun ${}^m G_{r-1} + b \cdot {}^{m-1} G_r + c \cdot {}^{m-1} G_{r-2} = 0$, so wird

$${}^m A_{m+1} = 0; \quad {}^m A_{m+2} = 0; \quad {}^m A_{m+3} = 0; \quad \text{u. s. w.}$$

dagegen aber erhalten A_r ; ${}^m A_{m-1}$ und ${}^m A_m$ bestimmte Werthe und man findet nach §. 17. (I) in der Voraussetzung, dass nur diese Werthe beibehalten werden, alle übrige aber wegfallen

$${}^m G_r = \left\{ \begin{array}{l} + {}^m A_{m+r} \\ - [b \cdot {}^{m-1} A_{m+r} + c \cdot {}^{m-1} A_{m+r-2}] \\ + [b^2 \cdot {}^{m-2} A_{m+r} + 2b \cdot c \cdot {}^{m-2} A_{m+r-2} + c^2 \cdot {}^{m-2} A_{m+r-4}] \\ - [b^3 \cdot {}^{m-3} A_{m+r} + 3b^2 \cdot c \cdot {}^{m-3} A_{m+r-2} + 3_2 b \cdot c^2 \cdot {}^{m-3} A_{m+r-4} \\ \qquad \qquad \qquad + c^3 \cdot {}^{m-3} A_{m+r-6}] \\ + [b^4 \cdot {}^{m-4} A_{m+r} + 4b^3 \cdot c \cdot {}^{m-4} A_{m+r-2} + 4_2 b^2 \cdot c^2 \cdot {}^{m-4} A_{m+r-4} \\ \qquad \qquad \qquad + 4_3 b \cdot c^3 \cdot {}^{m-4} A_{m+r-6} + c^4 \cdot {}^{m-4} A_{m+r-8}] \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

oder wegen $A_r = G_r$ und wenn man

$$\begin{aligned} {}^n H_r &= b^n \cdot G_{r+n} + n b^{n-1} c \cdot G_{r+n-2} + n_2 b^{n-2} c^2 \cdot G_{r+n-4} \\ &\quad + n_3 b^{n-3} c^3 \cdot G_{r+n-6} + \dots \dots \dots \text{ setzt} \end{aligned}$$

$${}^1 G_r = {}^1 A_{r+1} - {}^1 H_r$$

$${}^2 G_r = {}^2 A_{r+2} - c \cdot {}^1 A_r + {}^2 H_r$$

$${}^3 G_r = {}^3 A_{r+3} - c \cdot {}^2 A_{r+1} + 2b \cdot c \cdot {}^1 A_{r+1} + c^2 \cdot {}^1 A_{r-1} - {}^3 H_r$$

$${}^4 G_r = {}^4 A_{r+4} - c \cdot {}^3 A_{r+2} + 2b \cdot c \cdot {}^2 A_{r+2} + c^2 \cdot {}^2 A_r - 3b \cdot c^2 \cdot {}^1 A_r - c^3 \cdot {}^1 A_r + {}^4 H_r$$

$$\begin{aligned} {}^5 G_r &= {}^5 A_{r+5} - c \cdot {}^4 A_{r+3} + 2b \cdot c \cdot {}^3 A_{r+3} + c^2 \cdot {}^3 A_{r+1} - 3b \cdot c^2 \cdot {}^2 A_{r+1} - c^3 \cdot {}^2 A_{r-1} \\ &\quad + 6b^2 \cdot c^2 \cdot {}^1 A_{r+1} + 4b \cdot c^3 \cdot {}^1 A_{r-1} + c^4 \cdot {}^1 A_{r-3} - {}^5 H_r \end{aligned}$$

u. s. w.

Zur Bestimmung der Werthe ${}^1 A_1; {}^2 A_2; {}^3 A_3; \dots$ entwickle man hieraus

$${}^1G = {}^1A_1 - {}^1H$$

$${}^2G = {}^2A_2 - c \cdot {}^1A_1 + {}^2H$$

$${}^3G = {}^3A_3 - c \cdot {}^2A_2 + 2bc \cdot {}^1A_1 - {}^3H$$

$${}^4G = {}^4A_4 - c \cdot {}^3A_3 + 2bc \cdot {}^2A_2 - 3bc^2 \cdot {}^1A_1 + {}^4H$$

$${}^5G = {}^5A_5 - c \cdot {}^4A_4 + 2bc \cdot {}^3A_3 - 3bc^2 \cdot {}^2A_2 + 6b^2c^2 \cdot {}^1A_1 - {}^5H$$

u.s.w. so findet man wegen ${}^1A = bG; {}^2A_1 = b \cdot {}^1G; {}^3A_2 = b \cdot {}^2G;$
 ${}^4A_3 = b \cdot {}^3G; \dots \dots$

und wenn man statt ${}^1H; {}^2H; {}^3H; \dots \dots$ die entsprechenden Werthe setzt

$${}^1A_1 = {}^1G + b \cdot G_1$$

$${}^2A_2 = {}^2G - b(b \cdot G_2 + c \cdot G)$$

$${}^3A_3 = {}^3G - bc \cdot {}^1G + b^2(bG_3 + c \cdot G_1)$$

$${}^4A_4 = {}^4G - bc \cdot {}^2G - b^2(b^2 \cdot G_4 + 2bc \cdot G_2 + c^2 \cdot G)$$

$${}^5A_5 = {}^5G - bc \cdot {}^3G - b^2c^2 \cdot {}^1G + b^3(b^2 \cdot G_5 + 3bc \cdot G_3 + 2c^2 \cdot G_1)$$

u.s.w. folglich weil mG gegeben ist

$$\begin{array}{l} {}^1G_1 = -b \cdot G_2 - c \cdot G \\ {}^1G_2 = -b \cdot G_3 - c \cdot G_1 \\ {}^1G_3 = -b \cdot G_4 - c \cdot G_2 \\ {}^1G_4 = -b \cdot G_5 - c \cdot G_3 \\ \dots \dots \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} {}^2G_1 = b^2 \cdot G_3 + bc \cdot G_1 - c \cdot {}^1G \\ {}^2G_2 = b^2 \cdot G_4 + 2bc \cdot G_2 + c^2 \cdot G \\ {}^2G_3 = b^2 \cdot G_5 + 2bc \cdot G_3 + c^2 \cdot G_1 \\ {}^2G_4 = b^2 \cdot G_6 + 2bc \cdot G_4 + c^2 \cdot G_2 \\ \dots \dots \end{array} \right.$$

$${}^3G_1 = -b^3 \cdot G_4 - 2b^2c \cdot G_2 - bc^2 \cdot G - c \cdot {}^2G$$

$${}^3G_2 = -b^3 \cdot G_5 - 3b^2c \cdot G_3 - 2bc^2 \cdot G_1 + c^3 \cdot {}^1G$$

$${}^3G_3 = -b^3 \cdot G_6 - 3b^2c \cdot G_4 - 3bc^2 \cdot G_2 - c^3 \cdot G$$

$${}^3G_4 = -b^3 \cdot G_7 - 3b^2c \cdot G_5 - 3bc^2 \cdot G_3 - c^3 \cdot G_1$$

$$\dots \dots$$

$${}^4G_1 = b^4 \cdot G_5 + 3b^3c \cdot G_3 + 2b^2c^2 \cdot G_1 - bc^2 \cdot {}^1G - c \cdot G$$

$${}^4G_2 = b^4 \cdot G_6 + 4b^3c \cdot G_4 + 5b^2c^2 \cdot G_2 + 2bc^3 \cdot G + c^2 \cdot {}^2G$$

$${}^4G_3 = b^4 \cdot G_7 + 4b^3c \cdot G_5 + 6b^2c^2 \cdot G_3 + 3bc^3 \cdot G_1 - c^3 \cdot {}^1G$$

$${}^4G_4 = b^4 \cdot G_8 + 4b^3c \cdot G_6 + 6b^2c^2 \cdot G_4 + 4bc^2 \cdot G_2 + c^3 \cdot G$$

$${}^4G_5 = b^4 \cdot G_9 + 4b^3c \cdot G_7 + 6b^2c^2 \cdot G_6 + 4bc^3 \cdot G_3 + c^3 \cdot G_1$$

$$\dots \dots$$

$${}^5G_1 = -b^5 \cdot G_6 - 4b^4c \cdot G_4 - 5b^3c^2 \cdot G_2 - 2b^2c^3 \cdot G - bc^2 \cdot {}^2G - c \cdot {}^4G$$

$${}^5G_2 = -b^5 \cdot G_7 - 5b^4c \cdot G_5 - 9b^3c^2 \cdot G_3 - 5b^2c^3 \cdot G_1 + 2bc^3 \cdot {}^1G + c^2 \cdot {}^3G$$

$${}^5G_3 = -b^5 \cdot G_8 - 5b^4c \cdot G_6 - 10b^3c^2 \cdot G_4 - 9b^2c^3 \cdot G_2 - 3bc^4 \cdot G - c^3 \cdot {}^2G$$

$${}^5G_4 = -b^5 \cdot G_9 - 5b^4c \cdot G_7 - 10b^3c^2 \cdot G_5 - 10b^2c^3 \cdot G_3 - 4bc^4 \cdot G_1 + c^4 \cdot {}^1G$$

$${}^5G_5 = -b^5 \cdot G_{10} - 6b^4c \cdot G_8 - 10b^3c^2 \cdot G_6 - 10b^2c^3 \cdot G_4 - 5bc^4 \cdot G_2 - c^5 \cdot G$$

82 EYTELWEIN von der Integration der linearen Gleichungen.

$$\begin{aligned}
 {}^6G_1 &= b^6 \cdot G_7 + 5b^5c \cdot G_6 + 9b^4c^2 \cdot G_5 + 5b^3c^3 \cdot G_4 - 2b^2c^3 \cdot {}^1G - bc^2 \cdot {}^3G - c \cdot {}^5G \\
 {}^6G_2 &= b^6 \cdot G_8 + 6b^5c \cdot G_7 + 14b^4c^2 \cdot G_6 + 14b^3c^3 \cdot G_5 - 5b^2c^4 \cdot {}^1G + 2bc^3 \cdot {}^2G + c^2 \cdot {}^4G \\
 {}^6G_3 &= b^6 \cdot G_9 + 6b^5c \cdot G_8 + 15b^4c^2 \cdot G_7 + 49b^3c^3 \cdot G_6 - 9b^2c^4 \cdot {}^1G - 3bc^4 \cdot {}^1G - c^3 \cdot {}^3G \\
 {}^6G_4 &= b^6 \cdot G_{10} + 6b^5c \cdot G_9 + 15b^4c^2 \cdot G_8 + 20b^3c^3 \cdot G_7 - 14b^2c^4 \cdot {}^1G + 4bc^5 \cdot {}^2G + c^4 \cdot {}^2G \\
 {}^6G_5 &= b^6 \cdot G_{11} + 6b^5c \cdot G_{10} + 15b^4c^2 \cdot G_9 + 20b^3c^3 \cdot G_8 - 15b^2c^4 \cdot {}^1G + 5bc^5 \cdot {}^2G - c^5 \cdot {}^1G \\
 {}^6G_6 &= b^6 \cdot G_{12} + 6b^5c \cdot G_{11} + 15b^4c^2 \cdot G_{10} + 20b^3c^3 \cdot G_9 - 15b^2c^4 \cdot {}^1G + 6bc^5 \cdot {}^2G + c^6 \cdot {}^1G
 \end{aligned}$$

u. s. w.

Beispiel. Die Differenzgleichung ${}^mG_{r-1} + {}^{m-1}G_r + {}^{m-1}G_{r-2} = 0$ zu integrieren, wenn ${}^mG = G_r = 1$ gegeben sind. Weil hier $b = c = 1$ ist, so entsteht für verschiedene Werthe von m und r nachstehende Tafel:

mG_r	0	1	2	3	4	5	6	7	r
0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
1	+ 1	- 2	- 2	- 2	- 2	- 2	- 2	- 2	
2	+ 1	+ 1	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
3	+ 1	- 5	- 5	- 8	- 8	- 8	- 8	- 8	
4	+ 1	+ 4	+ 13	+ 13	+ 16	+ 16	+ 16	+ 16	
5	+ 1	- 14	- 17	- 29	- 29	- 32	- 32	- 32	
6	+ 1	+ 16	+ 43	+ 46	+ 61	+ 61	+ 64	+ 64	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m										

