Durch Sehnen in Kegelschnitten gleich grofse Segmente abzuschneiden, und isotomische oder äquisegmentarische Figuren von beliebiger Seitenzahl einzuschreiben.

Von

Hrn. GRUSON.

[Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 28. April 1824.]

Als ich vor mehreren Jahren meine 1809 erschienene Geodäsie bearbeitete, veranlafste mich die Aufgabe:

> In einem gegebenen Winkel durch eine gerade Linie einen Triangel von gegebenem Inhalt abzuschneiden,

den geometrischen Ort von den Mittelpunkten aller Linien zu bestimmen, die von einem gegebenen Winkel einen Triangel von gegebenem und immer gleichem Inhalte abschneiden.

Diese Untersuchung führte auf die verwandten Aufgaben:

> Den geometrischen Ort von der Mitte aller Sehnen zu bestimmen, die in den Kegelschnitten gleich grofse Segmente abschneiden.

Diese Untersuchungen wurden von mir anfänglich mittelst der höhern Analysis ausgeführt, aber die Einfachheit der erhaltenen Resultate liefs mich ahnden, dafs elementarische Betrachtungen zum Ziele führen könnten, wodurch dieser Gegenstand für mich um so mehr an Interesse gewonnen hat, so dafs ich nicht anstehe, diese äufserst einfachen und leichten Auflösungen einer auf den ersten Anblick, selbst durch die höhere Analysis für Anfänger schwierig scheinenden Aufgabe, hier mitzutheilen.

I. Aufg. Den geometrischen Ort von der Mitte aller zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels gezogenen Linien zu finden, wodurch dem Winkel immer gleich grofse Triangel von gegebenem Inhalte abgeschnitten werden.

Aufl. 1. Der gegebene Winkel sei 2α, der Inhalt des abzuschneidenden Triangels gleich F; bezeichnet man die abgeschnittenen Schenkel dieses Triangels mit $2x$ und $2y$, so hat man

$$\frac{2x \cdot 2y}{2} \cdot \sin 2\alpha = F;$$

hieraus $x \cdot y \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} F$.

Diese Formel drückt den constanten Inhalt eines Parallelogramms aus, dessen Seiten x, y, und 2α der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel ist.

2. Diese Gleichung wird sogleich als eine Gleichung zwischen den Assymptoten einer Hyperbel erkannt, deren Assymptotenwinkel 2α, x und y die Coordinaten sind.

3. $xy = \frac{F}{2 \sin 2\alpha}$ ist bekanntlich gleich der Potenz der Hyperbel $= \frac{a^2 + b^2}{4}$, wenn $2a$ und $2b$ die Quer- und conjugirten Axen bezeichnen.

4. Zur Bestimmung dieser Axen dienen die Gleichungen

$$a^2 + b^2 = \frac{2F}{\sin 2\alpha} \text{ und } 2a \cdot b = 2F,$$

woraus

$$a + b = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + 1\right) 2F} \text{ und } a - b = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - 1\right) 2F};$$

folglich $a = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + 1\right) 2F} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - 1\right) 2F}$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2F}{\sin 2\alpha}} \cdot \left[\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \sqrt{1 - \sin 2\alpha}\right] = \sqrt{\frac{F}{2 \sin 2\alpha}} \cdot \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{F \cdot \cot \alpha}$$

$$\text{und } b = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sin 2\alpha}+1\right)2F} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sin 2\alpha}-1\right)2F}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2F}{\sin 2\alpha}}\left[\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sqrt{1-\sin 2\alpha}\right] = \tfrac{1}{2}\sqrt{F.\operatorname{tg}\alpha}.$$

5. Durch eine reine, geometrisch abgeleitete Construction ergeben sich die Axen, wenn man von dem Winkel 2α einen gleichschenkligen Triangel $\frac{4x^2}{2}\,.\sin 2\alpha = F$ abschneidet. Auch würden sich hier die Werthe von a und b leichter als in (4) finden, weil $b = x \sin \alpha$ und $a = x \cos \alpha$ ist.
6. Zeichnet man die dazu gehörige Hyperbel, so ergiebt sich sogleich, dafs alle Linien, welche von dem gegebenen Winkel gleich, grofse Triangel abschneiden sollen, Tangenten von der gezeichneten Hyperbel werden, und da bekanntlich alle zwischen den Assymptoten liegende Tangenten von der Hyperbel im Berührungspunkte halbirt werden, so folgt: dafs der gesuchte geometrische Ort eine Hyperbel ist, deren Assymptoten Winkel 2α und deren Axen $2a$, $2b$, wir in (4) bestimmt haben.
7. Ist x die Absisse für den Berührungspunkt, so ergeben sich, wenn man aus den Endpunkten der Tangente Perpendikel auf die Queraxe und deren Verlängerung fallen läfst, durch die dadurch entstehenden ähnlichen Triangel, die drei Seiten A, B, C des in Rede stehenden Triangels, nemlich:

die Länge der Seite, welche die Tangente bildet,

$$A = \frac{2}{a}\sqrt{(a^2+b^2)\,x^2 - a^4}\,,$$

die Seite $\quad B = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\,(x + \sqrt{x^2-a^2})$

und die Seite $C = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\,(x - \sqrt{x^2-a^2})$.

Da nun bekanntlich

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[(B+C)^2 - A^2\right]\left[A^2-(C-B)^2\right]},$$

so ergiebt sich $(B+C)^2 = \left[\frac{2x}{a}\sqrt{a^2+b^2}\right]^2 = \frac{4x^2}{a^2}(a^2+b^2)$,

$$A^2 = \frac{4x^2}{a^2}(a^2+b^2) - 4a^2$$

Also $(B+C)^2 - A^2 = 4a^2$.

Eben so $(C-B)^2$

$$= \left[-\frac{2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right]^2 = \frac{4x^2}{a^2}(a^2+b^2) - 4a^2 - 4b^2,$$

also $A^2-(C-B)^2 = 4b^2$,

Folglich $F = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2.4b^2} = ab$, welches mit (4) stimmt.

8. Ist in einem geraden Kegel der Scheitelwinkel des Axentriangels $= 2\alpha$, und man schneidet diesen Kegel parallel mit dem Axentriangel in der Entfernung b, so erhält man die Hyperbel, deren Queraxe $= 2a$ und deren conjugirte Axe $= 2b$, und denkt man die Ebene dieser Hyperbel projicirt auf die Ebene des parallelen Axentriangels, so leuchtet es sogleich ein, dafs die Seiten dieses Axentriangels die Assymptoten gedachter Hyperbel sind.

9. Denkt man sich einen solchen hohlen Kegel, und giefst irgend eine bestimmte Quantität Flüssiges hinein, so werden die elliptischen, horizontalen Wasserspiegel die tangentirenden Ebenen von solchen Hyperbeln, also auch von der Hyperboloïde, die durch eine solche Hyperbel erzeugt wird, deren halbe Queraxe in der verticalen Stellung des Kegels die Entfernung der Kegelspitze vom Wasserspiegel, und deren conjugirte Axe gleich dem Durchmesser des Wasserspiegels ist.

II. Aufg. Den geometrischen Ort von der Mitte aller Sehnen zu bestimmen, die in den Kegelschnitten isotomische Segmente abschneiden.

Aufl. 1. Wie die höhere Analysis dergleichen Aufgaben auflöst, will ich hier übergehen, und erlaube mir, deshalb auf Brandes treffliches Lehrbuch der höhern Geometrie 2^r Theil §. 239-242. zu verweisen. Ich werde hier nur die ungemein einfache, elementare Auflösung davon geben.

2. Bekanntlich kann jeder Kegelschnitt als irgend eine Projection des Kreises betrachtet werden, und umgekehrt der Kreis als irgend eine Projection eines beliebigen Kegelschnitts. — Hier soll nur von orthographischer Projection, als die leichteste die Rede sein, und um die Sache in der Vorstellung zu erleichtern, wollen wir unter den Kegelschnitten die Ellipse wählen.

3. Will man in einer Ellipse durch eine Sehne ein Segment von gegebenem Flächeninhalte, oder ein Segment abschneiden, welches zu der Fläche der ganzen Ellipse ein gegebenes Verhältnifs hat, so würde es blos darauf ankommen, in dem über der kleinen Axe beschriebenen Kreise ein Kreissegment abzuschneiden, welches zu dem ganzen Kreise in dem gegebenen Verhältnisse stehet. — Sieht man nun die Ellipse als die Projection dieses Kreises an, so ziehe man nur durch die Endpunkte der Kreissehne Parallelen mit der grofsen Axe, und verbinde die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der Ellipse durch eine Ellipsensehne, so hat man der Projectionslehre gemäfs ein Ellipsensegment, welches zu seiner Ellipse dasselbe Verhältnifs hat, wie das Kreissegment zu seinem Kreise.

4. Soll man in einer Ellipse z. B. ein Sechsseit einschreiben, dessen Segmente isotomisch sind, so beschreibe man in dem Kreis über der kleinen Axe ein reguläres Sechsseit, ziehe wie (3) durch alle Winkelspitzen Parallelen mit der grofsen Axe, und verbinde die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der Ellipse durch gerade Linien, so ist die Aufgabe gelöst; weil nach (3) jedes entstandene Ellipsensegment zur ganzen Ellipse immer dasselbe Verhältnifs, wie das zugehörige Kreissegment zum ganzen Kreise haben mufs, und da im Kreise die Segmente alle gleich sind, so sind es auch die in der Ellipse.

5. Denkt man sich nun einen Berührungskreis in dem im Kreise (4) eingeschriebenen, regulären Sechsseit, so ist dessen Projection offenbar eine der erstern ähnliche Ellipse, die jede Ellipsensehne des isotomischen Sechsseits in ihrer Mitte berührt.

6. Der gesuchte geometrische Ort von der Mitte aller Ellipsensehnen, die zu isotomischen Segmenten gehören, ist also eine der äufsern Ellipse ähnliche und concentrische Ellipse, d. h. deren Axen in beiden Ellipsen einerlei Verhältnifs zu einander haben.
7. Die allgemeine Eigenschaft der ähnlichen, concentrischen Ellipsen ist also einzig die, dafs alle Tangenten der innern Ellipse in der äufsern Ellipse isotomische Ellipsensegmente abschneiden. Aber so wenig jeder innere concentrische Kreis geeignet ist, durch seine Tangenten den äufsern Kreis in gleiche Theile zu theilen, eben so wenig ist dazu jede innere concentrische, ähnliche Ellipse geeignet, die Peripherie der äufsern Ellipse genau so zu theilen, dafs eine ganze Anzahl getrennter isotomischer Ellipsensegmente entstehen.
8. Bei den ähnlichen concentrischen Hyperbeln lassen sich dieselben Schlüsse, wie oben bei der Ellipse machen. Es ist nur noch zu bemerken, dafs bei den Hyperbeln diejenige, welche die gröfsern Axen hat, die innere wird, und ihre Convexität der Concavität der äufsern Hyperbel zukehrt. Uebrigens wird man gleichfalls sehen, dafs, da jede Tangente der innern Hyperbel zugleich eine doppelte Ordinate zu einem Durchmesser der äufsern Hyperbel ist, sie nothwendig in dem Berührungspunkt halbirt ist.
9. Da eine Parabel als eine Ellipse angesehen werden darf, deren grofse Axe, und folglich auch ihre Hälfte, oder die Entfernung des Scheitelpunkts vom Mittelpunkt unendlich ist, so folgt hieraus, dafs in der Parabel die Diameter zur Axe parallel werden. Nun mufs, wie in Betreff der Ellipse, der Diameter die Tangente der innern Kurve halbiren, und folglich diese Tangente parallel zu der Tangente der äufsern Parabel, oder, welches einerlei ist, die correspondirenden Bogen ähnlich sein, und also auch die Abscissen und die Ordinaten von diesen zwei Bogen sich wie die Parameter dieser zwei Parabeln verhalten. Da aber wegen der Parallelität der Dia-

meter mit der Axe die zwei zu den Berührungspunkten gehörigen Ordinaten gleich sind, und also die beiden Parameter auch gleich sein müssen, oder beide Parabel sind nicht wie alle Parabeln, blos ähnlich, sondern völlig einander gleich, so liegt der Scheitel auf der Axe da, wo eine auf die Axe perpendikuläre Sehne von der gegebenen Parabel eine Fläche von verlangter Gröfse abschneidet.

10. Ist ein hohler Cylinder, dessen parallele und congruente Grundflächen Ellipsen sind, mit einer bestimmten Quantität Flüssigkeit gefüllt, so schneidet jede in eine Lage, wo die Grundflächen vertikal stehen, isotomische Körpersegmente ab, deren Wasserspiegel immer von concentrischen, den Grundflächen ähnlichen Ellipsen berührt werden.