II.

Regulæ, quâ inveniuntur omnes cujuslibetcunque producti Algebraici divisores, dummodo in nullo divisore terminus sit incommensurabilis, brevis prælibatio.

Authore

Phil. Naudæo Juniore.

SIcut Disciplinæ Mathematicæ in genere omnes temporib9 nostris mirifice fuerunt excultæ, ita in specie Analysin speciosam, plurimum debere Clariorum hujus sæculi Virorum scrutinüs, inficias ire nemo potest. Ipsi autem haud sane immerito incubuerunt, cùm ob propriam Analyseos præ reliquis Matheseos partibus excellentiam, quâ scilicet ad detegendas veritates miras, & quoquo alio modo impervias viam sternit, tum ob magnam ejus per universas Mathematum partes utilitatem. Hoc quisquis adverterit, ultro concedet, Analyseos ignarum jure majori hodiè e Mathematicorum numero excludi, quam olim è Philosophiæ discipulis suis Pythagoras Geometriæ expertem excluserit; Quamvis vero circa dictam Analysin præclara jam & egregia fuerint præstita, nihilominus tamen in illa desideranda adhuc quædam veniunt. Ut cæteras enim Regulas taceamus, multa adhucdum liquet deficere, circa modum inveniendi divisores alicujus producti Algebraici, cujus usus nemini non est notus. Hunc usum Cartesius, ut in aliis, ita & hâc præsertim in scientia ævi sui facile Princeps satis declaravit, dum modum suum deprimendis æquationibus inseruientem indagavit; eundemque etiam usum ostendit Huddenius in suis ad Fr. van Schooten literis, ubi eidem fini plurimas acris utique ingenii produxit Regulas.

Sed quandoquidem & Cartesius & Huddenius solum illum intendebant scrutinii sui finem, ut nempe ipsius beneficio possent deprimi æquationes, factum inde est, ut ipsorum etiam modi, soli isti æquationum depressioni inserviant, quia nempe in Regularum suarum inventione mansit idea æquationis, nec plerumque subüt eorum animum idea producti cujuslibetcunque Algebraici. Hinc constat, ipso-

ipsorum Regulas, eâ de causa, dici debere particulares, cum sese ad omne productum Algebraicum non extendant. Ast ego considerans, eum, qui Regulam suppeditaret inveniendi divisores omnes producti in genere cujusvis Algebraici, ipsam non modo posse adhibere in æquationibus deprimendis, sed & quam sæpissime etiam aliis in locis ipsi usui fore quam maximo; rem aggressus, & nonnihil in ea consecutus sum, de quo aliquid hoc loco edi operæ pretium visum est.

Regula verò ista docet, quomodo ex productô quôlibetcunque Algebraico (sive illud æquatio sit, nec ne) elici queant producentes ejus omnes; Sed in hac Regulâ ratio est habenda rei, cujus nulla habebatur in aliorum Regulis de inveniendis divisoribus; scilicet ratio haberi debet terminorum concretorum, (*terminum* in producto quôdam dico *concretum*, quando nempe duo termini ob easdem in ipsis occurrentes literas in unum colliguntur & quasi concrescunt) Deinde etiam haberi debet ratio *terminorum destructorum* seu abolitorum; (terminos autem *destructos* voco, quotiescunque bini in producto termini, eò quod in solo signis differunt, sese invicem destruunt); hâc enim in Regulâ, omnem oportet concretum terminum divelli, omnemque abolitum restitui, antequam ervi possint producti dati producentes quæsiti. Quare etiam indigitat eadem ista Regula characterem, ex quo dignoscitur in producto terminus concretus, modumque ipsum in binos, quorum loco ponebatur divellendi, docet. Similiter etiam pro destructo termino characterem præbet, modumque insimul ejusmodi binos terminos plane absentes restituendi. Exempli gratiâ, si propronatur hoc productum.

$$abccddg + a^3eefg + ab^3ffg + ccd^3eg + a^3cdeg + bbeffgg + abcddfg + cde^3ff + bbcdfgg + cddefgg + e^3fg + abeef^3 + ac^3dde + ccd^3gg + aabccdf + accdefg + cdeeffg + abcdefg + a^4bef + ac^3ddg + aabbcdf + a^3cdee + abccdde + bbcdefg.$$

Juxta hanc Regulam invenitur illud esse formatum hisce ex producentibus in se ductis $cde + cdg + efg + abf$ & $a^3e + abcd + cddg + eeff + bbfg + accd$.

Simili

Simili prorsus ratione, si sit propositum productum:

$\frac{5}{9}aab^4 + \frac{5}{8}aab^3c - \frac{15}{4}aabc^3 + \frac{2}{3}ac^5 + \frac{5}{7}ab^3cc - \frac{608}{189}abc^4 + \frac{16}{27}c^6 - \frac{10}{3}aabbcc.$

Detegetur in ipso, per hanc Regulam, terminum $\frac{608}{189}abc^4$ concretum fuisse ex duobus hisce $\frac{16}{27}abc^4 - \frac{30}{7}abc^4$, & ortum illud esse ex producentibus istis $ab^3 - 6abcc + \frac{16}{15}c^4$ & $\frac{5}{7}cc + \frac{5}{8}ac + \frac{5}{9}ab$. Imo, non solum terminum concretum simplicem (i. e. qui duorum locum tenet) dissolvit; sed & concretum quem voco duplicem, (i. e. si quis in producto terminus occurreret in quo tres alii coaluissent) divellere docet; Pari etiam ratione, destructum duplicem (i. e. si occurrissent in producto tres termini, qui ob easdem literas coëundo, sese destruxissent] restituere omnes docet, licet illud quidem rarius contigerit. Sed adæquatam hujus Regulæ demonstratamque explicationem, quamvis proclo subiiciendo jamdudum paratam, hoc loco tradere haud fuit visum, utpote quæ in quinque quatuorve folia excurrisset ad minimum, adeoque in alium, si tulerit occasio, locum asservanda fuit. Interim tamen, cum intricatæ quæstiones & solutiones habeant intricatas & cuilibet Analystæ in propatulo sit, Regulam divisores inveniendi in Algebra ex difficilioribus atque prolixioribus Regulis semper fuisse; quod satis, tam ex Cartesii quam ex Huddenii Regulis colligere est, ita nec huic Regulæ suus labor deest. Nihilominus tamen, etsi etiam ipsa suos habeat limites, & exempla dari possint, in quibus, præ magna terminorum destructorum sive concretorum copia, characteres ipsorum fuerint alterati, adeoque eô casu Regula nostra succedere non potuerit, hisce omnibus neglectis, ipsam usus esse permagni & longe uberrimi, dixisse minime verebor, quod & omnis Analyseos ac Geometriæ peritus ultrò concesserit, cumprimum attenderit, hanc Regulam non solùm æquationibus dissolvendis & deprimendis posse inservire, sed etiam hoc in casu utiliter ipsam adhiberi; quando datô productô, & ipsius divisore, divisio tamen absolvi non potest, quia nempe nescitur, quem producti terminum certus divisoris terminus dividere debeat; tunc ergo si juxta hujus Regulæ normam procedatur, tutò ipsa per integram divisionem quasi manu ducet; sed præterea, quod nullæ hactenus Regulæ præstiterunt, ipsa inservit reperiendis producentibus seu divisoribus in genere cujuslibetcunque producti Algebraici, hoc autem in plerisque

construc-

construendis Problematis Planis, etiam intricatissimis, compendio poterit esse pulcherrimo; Sed, quid multis? coronidem hîc imponemus, adducendo saltem lineæ cujusdam propositæ constructionem, quoquo alio modo vix tentandam, & quæ huic potissimum Regulæ debetur.

Linea constructioni proposita hæc esto.

x æqualis fractioni, cujus numerator est $\sqrt{[4aabbcc + 8aab^3c - 28aabbcd - 4bbc^4 - 8b^3c^3 + 28b^3c^2d - 12aabccd + 12bc^4d - 12bc^3dd + 12aabcdd + 4aabcdf - 2aaeddf - 2c^4df - 4bc^3df + 2c^3ddf - \frac{1}{9}aaccff - \frac{2}{9}aa^3cff + \frac{1}{9}aacdff + \frac{1}{9}c^4ff + 2aaccdf + \frac{2}{9}bc^3ff - \frac{1}{9}c^3dff]}$. & cujus denominator est $\sqrt{[24a^3b - 120abee - 40acee + 8a^3c + 240aabd + 80aacd + 66aabe + 22aace + 18aabb + 6aabc + 180abbd + 60abcd + 72abbe + 24abce - 300abde - 100acde]}$.

Ad compendiosam hujus æquationis constructionem obtinendam, consulo Regulam hanc nostram inveniendi divisores producti, ut ipsius ope quis divisor detegatur, si nonnullus adsit, & reperio datæ fractionis numeratorem dividi posse per $cc + 2bc - cd$, nam quotientem reddet $4aabb - 4bbcc - 12aabd + 12bccd + 2aadf - 2ccdf - \frac{1}{9}aaff + \frac{1}{9}ccff$. Hôc apertô, ad hanc analogiam res eviden ter red t. $\sqrt{(24a^3b + 8a^3c + 240aabd + 80aacd + 66aabe + 22aace + 18aabb + 6aabc + 180abbd + 60abdc + 72abbe + 24abce - 300abde - 100acde - 120abee - 40acee]}$:

$\sqrt{[cc + 2bc - cd]} = \sqrt{[4aabb - 4bbcc - 12aabd + bccd + 2aadf - 2ccdf - \frac{1}{9}aaff + \frac{1}{9}ccff]} : x$. Quare denuo adhibeo Regulam nostram divisorum pro primo ac tertio hujus proportionis termino, & reperio terminum primum hos habere producentes, $\sqrt{(4aa + 3ab - 5ae)}$ & $\sqrt{(6ab + 2ac + 60bd + 2ccd + 2ube + 8ce)}$ tertii vero termini istos esse producentes $\sqrt{(aa - cc)}$ & $\sqrt{(bb - 12bd + 2df - \frac{1}{9}ff)}$ quô mihi suppeditatur ista concinna admodum constructio sequens.

Constructio

Ducatur ad IH normalis MB, fiat OC $= \frac{3}{4}b - \frac{5}{4}e$, centro C, intervallo $2a + \frac{3}{4}b - \frac{5}{4}e$ æquali CB, fiat sectio in B; sit etiam OD $= a - \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c + 10d + 4e$ & centro D, intervallo DE æquali $a + \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c + 10d + 4e$ fiat sectio in E; postea ex F medio BE ut centrô, Fig. 38.

 & radio

& radio FE fiat ſectio in G; Deinde ſit ON $= c$, centro N & radio PN $= a$ fiat ſectio in P; ſit adhuc OA $= \frac{1}{3}f - 3d$, centro A, radio $2b - 3d$ fiat ſectio in H, & centro L, medio nempe ex PH & radio LH fiat ſectio in K, deinde ducatur GK, & ipſi in K normalis KR; Poſtremò ſit OI $= b - \frac{1}{2}d$, centro I radio IM æquali $c + b - \frac{1}{2}d$ fiat ſectio in M, tandem duc rectam GM & per R ipſi parallelam RQ; dico OQ eſſe æqualem quæſitæ x.