Nina Samuel

# »I look, look, look, and play with many pictures«[1]

## Zur Bilderfrage in Benoît Mandelbrots Werk

*Die Computergraphiken der Fraktalen Geometrie Benoît Mandelbrots wurden nicht nur zu einem Symbol der Digitalisierung, sondern führten auch zu einer kritischen Einschätzung der aus ihr resultierenden Bildeuphorie seit den achtziger Jahren. Vor dem Hintergrund mathematikhistorischer Entwicklungen, gegen die sich Mandelbrot bewusst abzugrenzen suchte, soll die Bedeutung sinnlicher Erkenntnis als Grundlage seines Schaffens in der Kernzeit zwischen 1963 und 1980 untersucht werden. Künstlerisch-assoziative Verfahren bei der Theoriebildung weisen dabei sowohl auf produktive Möglichkeiten als auch auf die Grenzen eines ›Denkens in Bildern‹ in der mathematischen Forschung hin.*

### Am Anfang war das Bild

Eine Anfrage an das Archiv von IBM Yorktown Heights New York nach Bildmaterial ihres Mitarbeiters Benoît Mandelbrot wurde mit einem offiziellen Pressefoto beantwortet (Abb. 1). Lächelnd und mit verschränkten Armen präsentiert sich der »Vater der Fraktale«[2] zusammen mit einem eingeschalteten IBM-Monitor, hinter ihm, handschriftlich als Formel notiert, die allgemeine Definition einer fraktalen Dimension.[3] Die darunter stehende Zeile mit dem Wort »Example« lässt ein konkretes mathematisches Beispiel erwarten, das Weiterlesen wird jedoch von der rechten Schulter Mandelbrots verhindert. Stattdessen fällt der Blick auf ein kosmisch anmutendes Szenario: Eine aus dem Dunkel des Monitors auftauchende, von links oben beleuchtete und an den Planeten Erde erinnernde Kugel thront über einer zerklüfteten und mit rundlichen Kratern bedeckten, schattierten Hügellandschaft. Das Bild, das Mandelbrots langjähriger Mitarbeiter Richard Voss unter

---

1 Benoît Mandelbrot: *Fractals and Chaos. The Mandelbrot Set and Beyond*, New York 2004, 34.

2 Jim Giles: »Father of fractals«. In: *Nature* 432 (2004), Nr. 7015, 266f.

3 Die für Fraktale maßgebliche, gebrochene Dimension ist keine originäre Erfindung von Mandelbrot, sondern stammt von Felix Hausdorff und Abram S. Besicovitch, vgl. Felix Hausdorff: »Dimension und äußeres Mass«. In: *Mathematische Annalen* 79 (1919), 157–179.

der Bezeichnung »Planetenaufgang über einem Labelgraph-Berg (Souvenir von einem Raumflug, der nie stattfand)« programmiert hatte, zeigt einen der Höhepunkte fraktaler Bildphantasien.[4] Es suggeriert, mit Hilfe der Fraktale eine zweite Natur erschaffen und damit das Prinzip der Entstehung der Welt mathematisch entschlüsselt zu haben. Die Formel rückt in dieser Anordnung im buchstäblichen Sinne in den Hintergrund, während sich der Wissenschaftler Mandelbrot auf das computergenerierte Bild stützt. Inszeniert wird nicht nur das Bild als Forschungsergebnis, sondern auch ein Vorrang des Bildes in seiner Denk- und Arbeitsweise und zwar des dezidiert digital erzeugten, das unverkennbare Bezüge zur sichtbaren Welt herstellt. Dementsprechend haben algorithmisch simulierte Kosmogonien mit einer Tendenz zur Science-Fiction-Ästhetik zusammen mit der von ihm geprägten ikonodulen Formel »Sehen heisst glauben«[5] die Auseinandersetzung mit Benoît Mandelbrot maßgeblich geprägt. In späteren Äußerungen radikalisierte er diesen Ansatz zu einer Apotheose des Bildlichen, indem er den ersten Satz aus dem Johannes-Evangelium in versteckter Polemik gegen das alttestamentarische Bilderverbot neu formulierte: »Müsste nicht sogar ›am Anfang war das Wort‹ ersetzt werden von ›am Anfang war das Bild‹?«[6]

Abb. 1: Pressefoto von Benoît Mandelbrot, um 1985, IBM Yorktown, New York.

---

4 Die stochastischen und »natürlich« wirkenden Fraktale sind dabei von der Mandelbrotmenge zu unterscheiden, die zur Kategorie der deterministischen Fraktale gehört. Die wiederholte Berechnung ergibt hier immer wieder das gleiche Bild.

5 Benoît Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur*, [New York 1982], Basel, Boston 1991, 33; vgl. ebenso ders.: *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*, New York 1997, 17.

6 Benoît Mandelbrot: »Les inattendus des fractales«. In: *Pour la Science* 234 (April 1997), 10–12; hier: 10.

Eine derartig unverhohlen zur Schau getragene Bilderliebe rief inner- und außerhalb von Mathematikerkreisen massive Kritik hervor. Psychedelisch gestaltete Vergrößerungsserien abstrakter Mandelbrot- und Juliamengen wurden zwar populär, lenkten aber von der spezifischen Rolle des Bildlichen als Erkenntnismedium in der Forschung zur komplexen Dynamik ab.[7] Auf die Problematik der Selbstreferentialität dieser Serien, die immer wieder zum Ausgangsbild zurückzukehren scheinen, hat neben vielen anderen der Mathematiker Steven Krantz, einer der schärfsten Kritiker dieser Bilder, verwiesen. Er sah gleichsam die Rückkehr zu mathematischen Fragestellungen in Gefahr: »In fractal geometry one uses some mathematics to generate a picture, then asks questions about the picture – which generates more pictures. Then asks more questions about the new pictures. And so on. One rarely, if ever, sees a return to the original mathematics«.[8] In der kunsthistorischen Diskussion wurde angesichts der Wiederkehr des Ewig-Gleichen ein Bruch mit der klassischen Mimesistheorie konstatiert, der durch eine Auflösung des Abbild-Urbild-Verhältnisses auch »die Differenz zwischen Bild und Realität selbst« bedrohte.[9] Es ist bezeichnend, dass sich diese Einschätzungen vorrangig an außerhalb der mathematischen Forschung produzierten und popularisierten Bildern orientierten und auf die direkte Einflussnahme reagierten, die ihre Rezeption auf den postmodernen Diskurs ausübte: Fraktale wurden zum Flagschiff der Simulationstheorie und zum Symbol der kategorial schwer fassbaren, anscheinend mit allen Bildtraditionen brechenden »neuen« oder sogar »immateriellen« Bildmedien.[10]

Mandelbrots Fokussierung auf das Visuelle wirft jedoch Fragen auf, deren Beantwortung aus bildwissenschaftlicher und erkenntnistheoretischer Perspektive eine weitergehende Analyse seines Gesamtwerks und seines spezifischen Umgangs mit Bildlichkeit verlangen. Seine Gleichsetzung von

---

7 Eindrückliche Beispiele in: Heinz-Otto Peitgen, Peter H. Richter: *The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems,* Berlin, Heidelberg 1986.

8 Steven G. Krantz: »Fractal Geometry«. In: *The Mathematical Intelligencer* 11.4 (1989), 12–16; hier: 16.

9 Gottfried Boehm: »Die Wiederkehr der Bilder«. In: Gottfried Boehm (Hrsg.): *Was ist ein Bild?*, München 1994, 11–38; hier: 35. Boehm bezieht sich hier allgemein auf »elektronische Simulationstechniken«. Grundlegend zur kunsthistorischen Diskussion siehe Karl Clausberg: »Feigenbaum und Mandelbrot. Neue Symmetrien zwischen Kunst und Naturwissenschaften«. In: *Kunstforum International* 85 (1986), 86–93 und Horst Bredekamp: »Mimesis, grundlos«. In: *Kunstforum International* 114 (1991), 278–288. Zur fundamentalen Kritik an den Bildern im Zusammenhang mit der postmodernen Simulationstheorie vgl. ders.: »Das Bild als Leitbild. Gedanken zur Überwindung des Anikonismus«. In: Ute Hoffmann, Bernward Joerges, Ingrid Severin (Hrsg.): *LogIcons: Bilder zwischen Theorie und Anschauung*, Berlin 1997, 225–245, vor allem 233–236.

10 Vgl. Jean Baudrillard: *Agonie des Realen*, Berlin 1978 sowie ders.: *Subjekt und Objekt: fraktal*, Bern, Wabern 1986. Vgl. die entsprechende Rhethorik einer »Ästhetik des Immateriellen«, Titel des *Kunstforum International* 97 (1988).

Sehen und Glauben ist zweifellos eine unbewiesene Behauptung, der man weder gerecht wird, wenn man sie als bloßes Zeugnis einer naiven Bildgläubigkeit wertet, noch wenn man sie als rhetorisches Ornament oder trocken kalkulierte Provokation einstufen würde. Sie steht als polarisierende, rhetorisch zugespitzte Gegenreaktion im Zusammenhang mit den aus seiner Sicht verheerenden Auswirkungen, die Entwicklungen in der Mathematik seit dem 19. Jahrhundert mit sich gebracht hatten.

## Das Bild als Gefahr

Mit einem »Fluch« sei das Kalkül belegt, so berichtete der französische Mathematiker Charles Hermite am Ende des 19. Jahrhunderts seinem Kollegen Thomas Jean Stieltjes, er »wende sich daher in Angst und Schrecken von der beklagenswerten Plage der Funktionen ohne Ableitungen ab«.[11] Die mathematische Welt befand sich zu diesem Zeitpunkt bereits mitten in einer Krise, die durch Abweichungen von klassischen Grundannahmen elementarer Begriffe ausgelöst wurde.[12] In ihrem Zentrum standen Funktionen, deren Werte unaufhörlich und unendlich dicht zwischen zwei Konstanten hin und her springen und die sich daher nicht mehr präzise zeichnen lassen. Bislang waren solche unanschaulichen Konstruktionen aus dem mathematischen Diskurs ausgeschlossen gewesen; gleichwohl drohten sie nun, »vor eine Grenze des Intellekts [zu] führen«.[13] Unter anderem Henri Poincaré stilisierte diese neuen Funktionen zu »Monstern« mathematischer Logik und bezeichnete sie als schmähliche Angriffe auf den Verstand der Vorväter.[14] Diese so genannten »Monster« reklamierte Mandelbrot etwa hundert Jahre später als erste mathematische Fraktale.

Die Krise der Mathematik war auch eine des Sehens. Als der Mathematiker Georg Cantor die Grundlagen des Euklidischen Dimensionsbegriffs in Frage stellte, verband er daher den Schock über seine Entdeckungen nicht ohne Grund mit einem Zweifel an der Glaubwürdigkeit seiner Sehkraft:

---

11 Charles Hermite, Brief vom 20. Mai 1893, in: Benjamin Baillaud, Henry Bourget (Hrsg.): *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, 2 Bde., Bd. 2, Paris 1905, 318.

12 Vgl. Klaus Thomas Volkert: *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*, Göttingen 1986; Herbert Mehrtens: *Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme,* Frankfurt am Main 1990; Bettina Heintz: *Die Herrschaft der Regel. Zur Grundlagengeschichte des Computers,* Frankfurt am Main, New York 1993.

13 Paul Du Bois-Reymond: »Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen«. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 79 (1875), 21–37; hier: 29, Fn.

14 Henri Poincaré: *Science et Méthode*, Paris 1908, 132f.

»Ich sehe es, aber ich glaube es nicht«.[15] Im Zentrum stand ein wachsendes Misstrauen gegenüber der Erkenntniskraft des Auges – und damit auch gegenüber den Verbildlichungen. Je tief greifender die Mathematik mit der menschlichen Raumanschauung brach, desto weniger konnte das sehende Auge ihr folgen und desto untauglicher und irreführender mussten sogar schematische Graphiken wirken. Bernhard Siegert bezeichnete dieses »Eintauchen der Mathematik ins Unvorstellbare« durch die neuen ›monströs oszillierenden‹ Funktionen, bereits als »Bilderstürmerei«.[16]

Und doch gibt es einige überlieferte Visualisierungen der ersten mathematischen Fraktale; es sind reduzierte Linienzeichnungen, höchst schematisch und in direkter Bezugnahme auf die im Text beschriebenen Konstruktionsschritte.[17] Sie hielten die Erkenntnis fest, dass das menschliche Auge den Gedankenexperimenten der Geometrie nicht mehr folgen konnte, da die Sichtbarkeitsschwelle nach nur wenigen Etappen der Konstruktion unterschritten wurde. Die Zeichnungen waren Symptome an der Schwelle eines historischen Wandels der Mathematik, in dem die Beziehung zwischen Geometrie und Erfahrungswelt, zwischen dem Denken und der Anschauung neu verhandelt wurde. Einerseits konnten die »Monster« überhaupt nur Gegenstand des offiziellen mathematischen Diskurses werden, weil die räumliche Anschauung zu dieser Zeit schon nicht mehr normatives Prinzip war.[18] Andererseits zeigt die Tatsache, dass zumindest einige Mathematiker ihre Überlegungen graphisch festhielten, dass dem Bild und dem Sehen in der Mathematik weiterhin eine gewisse Berechtigung zugestanden wurde. Damit aber solche mit klassischen Annahmen und der Anschauung brechenden Konstruktionen ohne innere Widersprüche in die Mathematik integriert werden konnten, musste sie sich als Disziplin neu definieren.

Die Krise weitete sich zu einer Bedrohung für den Fortbestand der gesamten Disziplin aus; 1921 bezeichnete Hermann Weyl sie als »Grundlagenkrise«, die mit der Auflösung der »innere[n] Solidität und Sicherheit«[19] der Analysis drohe. Den Ausweg wies schließlich David Hilbert mit seiner

---

15 Zitiert nach Benoît Mandelbrot: »Des monstres de Cantor et de Peano à la géométrie fractale de la nature«. In: Jean Dieudonné et al. (Hrsg.): *Penser les mathématiques*, Paris 1982, 226–251; hier: 232. In ironischer Umkehrung von Cantors Äußerung formulierte Mandelbrot sein »Sehen heisst glauben«.

16 Bernhard Siegert: *Passage des Digitalen. Zeichenpraktiken der neuzeitlichen Wissenschaften 1500–1900*, Berlin 2003, 313, 318.

17 Vgl. zum Beispiel David Hilbert: »Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück«. In: *Mathematische Annalen* 38 (1891), 459–460.

18 Vgl. Volkert 1986 (wie Anm. 12), 90.

19 Hermann Weyl: »Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik« [1921]. In: Komaravolu Chandrasekharan (Hrsg.): *Hermann Weyl, Gesammelte Abhandlungen*, 5 Bde., Bd. 2, Berlin, Heidelberg, New York, 143–180; hier: 143.

Neubestimmung der »Grundlagen der Geometrie«.[20] Unter diesem Titel formulierte er bereits 1899 das methodische Kernstück seiner formalen Axiomatik und machte damit den ersten und folgenreichen Schritt, den Verunsicherungen durch eine explizite Abkehr vom Bildlichen beizukommen.[21] Er stellte fest, dass geometrische Figuren für den »überlegenden Geist« des Mathematikers nicht würdig und als »angewandter Zwang« das Gegenteil von »Freiheit« seien.[22] Mit Hilbert wurden mathematische Zeichen autark. Sie bedeuteten außerhalb der Mathematik nichts mehr und verzichteten radikal auf jegliche Repräsentation oder Bezugnahme zur Außenwelt.[23] Am Ende der zwanziger Jahre setzte sich die Ansicht durch, dass »Objekte der heutigen Mathematik […] keine greifbaren Dinge mehr [sind]; […] ihre Gebilde […] sind von höchster Abstraktion. […] [Es gibt eine] Tendenz zur Vergeistigung, die Loslösung von allem Stofflichen […].«[24]

In diesem Klima war der Boden für den Aufstieg einer Gruppe französischer Mathematiker bereitet, die ikonoklastische Tendenzen der Mathematik bündeln und verschärfen sollten. Sie radikalisierten Hilberts formalistische Ansätze und fassten Bilder nicht nur als problematisch oder unzulänglich, sondern als Gefahr für das mathematische Denken auf. Ab 1935 fanden sie sich unter der Bezeichnung »Nicolas Bourbaki« zusammen. Der griechisch anmutende Name eines Generals des Deutsch-Französischen Kriegs diente ihnen als kollektives Pseudonym, dessen Herkunft sie nie endgültig aufklärten.[25] Sie trafen sich in ihrer gemeinsamen Gesinnung als strenge Verfechter einer strukturalistischen und streng formalistischen Methode: Die Struktur als »Schatzkammer von abstrakten Formen«[26] sollte eigentlicher Gegenstand und Werkzeug der Mathematik und von kristalliner Gestalt sein, »durchschaubar bis in die Tiefe«.[27] Ab 1939 traten sie mit dem ersten Band ihrer *Éléments de Mathématique* an die Öffentlichkeit, mit denen sie zu einer der einflussreichsten Instanzen für die mathematische Forschung und Lehre wurden.

---

20 David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899.

21 Zu Hilberts radikalem axiomatischen Programm siehe Mehrtens 1990 (wie Anm. 12), 108–142.

22 Mehrtens 1990 (wie Anm. 12), 113.

23 Vgl. Heintz 1993 (wie Anm. 12), 16–34. Vgl. auch Albert Einsteins entsprechende Beschreibung der axiomatischen Methode: Albert Einstein: »Geometrie und Erfahrung«. In: *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften* 1921, 123–130.

24 Konrad Knopp: *Mathematik und Kultur* [1928], Berlin 1985, 22.

25 Vgl. Paul R. Halmos: »Nicolas Bourbaki«. In: *Scientific American* 196.5 (1957), 88–99; hier: 89; sowie Jean A. Dieudonné: »The work of Nicholas Bourbaki«. In: *The American Mathematical Monthly* 77.2 (1970), 134–145; hier: 134, Fn.

26 Nicolas Bourbaki: »Die Architektur der Mathematik« [1948]. In: Michael Otte (Hrsg.): *Mathematiker über Mathematik*, Berlin 1974, 140–159; hier: 158.

27 Bourbaki 1948 (wie Anm. 26), 144.

Alle von ihnen autorisierten Veröffentlichungen glichen sich in einem entscheidenden Punkt: in ihrer Vermeidung von Abbildungen. Dem Bourbakisten Pierre Cartier zufolge schloss ihre Ablehnung von Bildern an die Euklidische Tradition an, die ihrer Ansicht nach ursprünglich eine bildlose gewesen sei. Zudem seien die meisten Mitglieder Puritaner, unter ihnen sehr viele Protestanten und Juden, »Menschen des Alten Testaments«, und auch als solche lehne man visuelle Repräsentationen von Glaubens- und mathematischen Wahrheiten ab.[28] Ihr Bilderverbot war ein ungeschriebenes und trotzdem außerordentlich wirkungsvolles Gesetz. Implizit fand es sich beispielsweise in dem Hinweis, mathematische Intuition sei nur in »von gewöhnlichen Sinnesanschauungen ganz verschiedene[r] Art«[29] von Bedeutung. Weil Mathematik als Text und »Poesie von Ideen«[30] zu begreifen sei, müsse der »ursprünglich anschauliche Inhalt« der mathematischen Formen »absichtlich ausgeschaltet« werden.[31]

Gleichzeitig verband sich mit dieser radikalen Ablehnung von Bildern aber auch das denkbar größte Eingeständnis ihrer Macht. Dies fand seinen erstaunlichsten Ausdruck in dem offenbar einzigen nicht-mathematischen Zeichen, das die Bourbaki in ihren Veröffentlichungen benutzten: An Stellen, in denen ihre Argumentation gefährlich zu werden drohte, hielten sie dem Leser – wie eine Art Bannsymbol – eine umgedrehte S-Kurve entgegen (Abb. 2). Damit griffen sie auf das ikonische Urelement der schöpferisch-bewegten Energie von Natur und Kunst zurück, das als universelles ›Sinnbild aller Zeichnungen‹ und ›Summe des Visuellen‹ bestimmt werden kann.[32] Von dem englischen Künstler William S. Hogarth 1753 in seiner *Analysis of Beauty* als Emblem von *Variety* und damit als Symbol der Gesamtheit bildnerischer Ausdrucksformen definiert (Abb. 3),[33] diente die bourbakistische Variation etwa zwei Jahrhunderte später als Warnung vor logischen Bedrängnissen und intellektuellen Untiefen. An den Seitenrand gestellt, in gespiegelter Linienführung und auf eine kompakte Typographie

---

28 Nach Pierre Cartier, zitiert nach Marjorie Senechal: »The Continuing Silence of Bourbaki. An Interview with Pierre Cartier«. In: *The Mathematical Intelligencer* 20.1 (1998), 22–28; hier: 27.

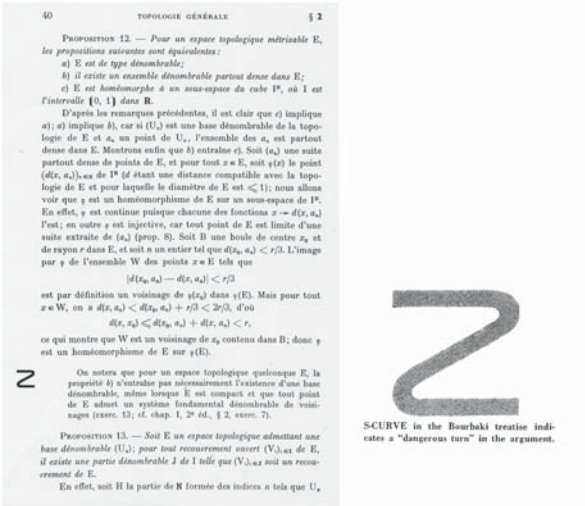
29 Bourbaki 1948 (wie Anm. 26), 151.

30 Armand Borel: *Mathematik: Kunst und Wissenschaft*, München 1982, 33.

31 Bourbaki 1948 (wie Anm. 26), 158f.

32 Horst Bredekamp: »Die Zeichnende Denkkraft. Überlegungen zur Bildkunst der Naturwissenschaften«. In: Jörg Huber (Hrsg.): *Einbildungen*, Zürich, Wien, New York 2005, (Interventionen 14), 155–171; hier vor allem: 163–165, sowie ders.: »Die Unüberschreitbarkeit der Schlangenlinie«. In: Christian Schneegass (Hrsg.): *Minimal concept. Zeichenhafte Sprachen im Raum*, Berlin 2001, 205–208.

33 Zur *figura serpentinata* des 16. Jahrhunderts und ihrer kunsttheoretischen Reinterpretation durch Hogarth vgl. Peter Gerlach: »Zur zeichnerischen Simulation von Natur und natürlicher Lebendigkeit«. In: *Zeitschrift für Ästhetik und Allgemeine Kunstwissenschaft* 34 (1989), 243–279.



40 TOPOLOGIE GÉNÉRALE § 2

PROPOSITION 12. — *Pour un espace topologique métrisable* E, *les propositions suivantes sont équivalentes :*

*a)* E *est de type dénombrable;*

*b) il existe un ensemble dénombrable partout dense dans* E*;*

*c)* E *est homéomorphe à un sous-espace du cube* $I^N$, *où* I *est l'intervalle* $[0, 1]$ *dans* $\mathbf{R}$.

D'après les remarques précédentes, il est clair que *c)* implique *a)*; *a)* implique *b)*, car si $(U_n)$ est une base dénombrable de la topologie de E et $a_n$ un point de $U_n$, l'ensemble des $a_n$ est partout dense dans E. Montrons enfin que *b)* entraîne *c)*. Soit $(a_n)$ une suite partout dense de points de E, et pour tout $x \in E$, soit $\varphi(x)$ le point $(d(x, a_n))_{n \in N}$ de $I^N$ (*d* étant une distance compatible avec la topologie de E et pour laquelle le diamètre de E est $\leqslant 1$); nous allons voir que $\varphi$ est un homéomorphisme de E sur un sous-espace de $I^N$. En effet, $\varphi$ est continue puisque chacune des fonctions $x \to d(x, a_n)$ l'est; en outre $\varphi$ est injective, car tout point de E est limite d'une suite extraite de $(a_n)$ (prop. 8). Soit B une boule de centre $x_0$ et de rayon *r* dans E, et soit *n* un entier tel que $d(x_0, a_n) < r/3$. L'image par $\varphi$ de l'ensemble W des points $x \in E$ tels que

$$|d(x_0, a_n) - d(x, a_n)| < r/3$$

est par définition un voisinage de $\varphi(x_0)$ dans $\varphi(E)$. Mais pour tout $x \in W$, on a $d(x, a_n) < d(x_0, a_n) + r/3 < 2r/3$, d'où

$$d(x, x_0) \leqslant d(x_0, a_n) + d(x, a_n) < r,$$

ce qui montre que W est un voisinage de $x_0$ contenu dans B; donc $\varphi$ est un homéomorphisme de E sur $\varphi(E)$.

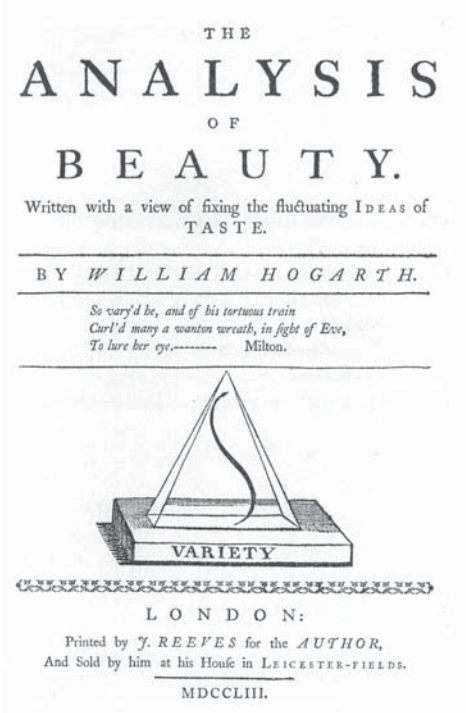
On notera que pour un espace topologique quelconque E, la propriété *b)* n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une base dénombrable, même lorsque E est compact et que tout point de E admet un système fondamental dénombrable de voisinages (exerc. 13; *cf.* chap. I, 2e éd., § 2, exerc. 7).

PROPOSITION 13. — *Soit* E *un espace topologique admettant une base dénombrable* $(U_n)$; *pour tout recouvrement ouvert* $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de* E, *il existe une partie dénombrable* J *de* L *telle que* $(V_\lambda)_{\lambda \in J}$ *soit un recouvrement de* E.

En effet, soit H la partie de $\mathbf{N}$ formée des indices *n* tels que $U_n$

S-CURVE in the Bourbaki treatise indicates a "dangerous turn" in the argument.

Abb. 2: Links: Eine Seite aus den *Éléments de Mathématique* von Nicolas Bourbaki, 1958. Rechts: Die »S-Kurve der Bourbakisten« nach Paul Halmos, aus: *Scientific American*, 1957.



THE
ANALYSIS
OF
BEAUTY.

Written with a view of fixing the fluctuating IDEAS of TASTE.

BY *WILLIAM HOGARTH.*

*So vary'd he, and of his tortuous train*
*Curl'd many a wanton wreath, in sight of Eve,*
*To lure her eye.*-------- Milton.

VARIETY

LONDON:
Printed by *J. REEVES* for the *AUTHOR*,
And Sold by him at his House in LEICESTER-FIELDS.
MDCCLIII.

Abb. 3: William Hogarth: *The Analysis of Beauty*, London 1753.

reduziert, fungierte die Schlangenlinie als Markierung genau *der* Stellen, die aus der Sicht der Verfasser das »Reich des reinen Denkens«[34] in Gefahr bringen konnten. Auch wenn ihnen die tradierte ikonische Bedeutung des Zeichens möglicherweise nicht bewusst war, so war es doch eine Art Pfahl im Fleisch der reinen, formalisierten Lehre.

Im offiziellen Diskurs der Mathematik wurde in den folgenden Jahrzehnten die formalistische gegen die geometrisch-bildhafte Darstellungsweise ausgespielt.[35] Man kann es daher durchaus mit den Worten von Bettina Heintz als »Ironie der Geschichte« bezeichnen, dass die auf Hilbert fußende und von Bourbaki zum Dogma erhobene bildverneinende Methode der modernen Mathematik gleichzeitig zum theoretischen Entstehungsort des Computers wurde.[36] Aus der zum Text geronnenen Mathematik entstand die Sprache der Computerprogramme und erst damit die Möglichkeit, die der dreidimensionalen Anschaulichkeit nicht mehr zugänglichen Strukturen in eine neue Form der Sichtbarkeit zu überführen.

## »Bourbaki is over«[37]

Das Ziel seines wissenschaftlichen Lebenswerkes charakterisierte Benoît Mandelbrot als Wiederherstellung der »konkreten Bedeutung des Sehens«, in der das sehende Auge den Status eines wissenschaftlichen Instruments einnehme.[38] Seine Arbeit mit diesem Instrument sei seit jeher durch das Vertrauen auf seine geometrische Intuition geleitet und durch seine grundlegende Veranlagung, in Bildern zu denken. Dieser Ansatz sowie seine häufig wechselnden Arbeits- und Interessengebiete machten ihn immer wieder zu einem Grenzgänger und Außenseiter.[39] Mit den Worten »The eye is not

---

34 David Hilbert: »Mathematische Probleme« [1900]. In: Pawel S. Alexandrov (Red.): *Die Hilbertschen Probleme*, Leipzig 1983, 22–80; hier 27.

35 Wie der französische Bourbakist Adrien Douady berichtete, entstand eine deutliche Kluft zwischen der Sprache der Veröffentlichungen (*expression*) und dem Entwurfsstadium eines Theorems (*conception*), aus dem Zeichnungen nie verdrängt werden konnten, Interview mit Adrien Douady vom 7.1.2005; vgl. ebenso Bettina Heintz: »Zeichen, die Bilder schaffen.« In: Johanna Hofbauer, Gerald Prabitz, Josef Wallmannsberger (Hrsg.): *Bilder – Symbole – Metaphern, Visualisierung und Informierung in der Moderne*, Wien 1995, 47–77; hier: 67f.

36 Heintz 1995 (wie Anm. 35), 49.

37 »›The eye is not specialized!‹ Benoît Mandelbrot talks with Nina Samuel«. In: *Bildwelten des Wissens* 3.2 (2005), 32–39; hier: 33.

38 Mandelbrot 2004 (wie Anm. 1), 3.

39 Zum Beispiel theoretische und angewandte Mathematik, mathematische Linguistik, Raum- und Luftfahrttechnik, Wirtschaft, Ingenieurswissenschaften und Physiologie, vgl. Anthony Barcellos: »Interview with Benoît Mandelbrot«. In: Donald J. Albers und Gerald L. Alexanderson: *Mathematical People: Profiles and Interviews*, Boston 1985, 207–225; hier: 207.

specialized«[40] erklärte er seine Disziplinwechsel jedoch zur Leistung seines »unspezialisierten Auges«. Die Universalität sinnlicher Erkenntnis lieferte ihm somit die Rechtfertigung für seine unkonventionellen Arbeitsmethoden. Explizit wandte er sich gegen die französischen Formalisten, die er rückblickend als einen wichtigen Grund anführte, sowohl seinem Heimatkontinent als auch dem akademischen Betrieb ab 1958 weitgehend den Rücken zu kehren und zu IBM zu wechseln. Formel und Bild konstituierten für ihn ein untrennbares Ganzes: »[…] every formula evoked in my mind a completely spontaneous shape«.[41] Sein Anspruch einer erkenntnistheoretischen Gleichzeitig- und Gleichwertigkeit von Form und mathematischer Formel ist programmatisch zu verstehen und wegweisend für die Anfänge seiner Theoriebildung: Die von der Anschauung dissoziierte Mathematik sollte mittels Formvergleichen zwischen einer Visualisierung empirischer Daten und graphisch dargestellter Logarithmen wieder in einen Zusammenhang gebracht werden.

In diesem Sinne verfuhr er bei seinen ersten bildhaften Vergleichen zum Phänomen der Skaleninvarianz in der Ökonomie, indem er die Charts der Finanzmärkte als geometrische Objekte deutete und sie dazu bewusst auf das Format von Landschaftsfotografien skalierte.[42] In suggestiver Zusammenstellung präsentierte er die Baumwollpreisentwicklung an verschiedenen Börsen und während unterschiedlicher Zeiträume zusammen mit einer logarithmischen Kurve in einem Koordinatensystem als »Originalbeweis«[43] der gelungenen Imitatio volkswirtschaftlicher Prozesse. Seinen Lesern schlug er vor, die bildbasierte Beweisführung auf eigenwillige Art und Weise selbst zu überprüfen: Die Bilder seien lediglich auf Transparentpapiere zu kopieren und die Ähnlichkeit der Kurvenverläufe durch ein Aufeinanderlegen beider Blätter zu vergleichen.[44] Dass der Leser, statt algebraische Operationen nachzuvollziehen, die Formen lieber direkt in die Hand nehmen und mit ihnen experimentieren soll, deckt sich mit Mandelbrots allgemeiner Auffassung von Mathematik im Sinne eines Umgangs mit real manipulierbaren Objekten.[45] Eine entsprechende, bildzentrierte Argumentation forcierte er auch im Zusammenhang mit hydrologischen

---

40 Mandelbrot 2005 (wie Anm. 37), 32.
41 Ebd.
42 Mandelbrot 1997 (wie Anm. 5), 5f. vgl. die Abb. in ebd., 391 (Nachdruck von: Benoît Mandelbrot: »The variation of certain speculative prices«. In: *Journal of Business* (Chicago) 36 (1963), 394–419).
43 Mandelbrot 1991 (wie Anm. 5), 356.
44 Mandelbrot 1997 (wie Anm. 5), 390.
45 Benoît Mandelbrot: »Fraktale und die Wiedergeburt der Experimentellen Mathematik«. In: Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe: *Bausteine des Chaos: Fraktale*. Reinbek bei Hamburg 1998, 1–19; hier: 10.

Untersuchungen der Zeit um 1968, mit deren Erfolg er seinen Respekt vor der ›Macht des Auges‹ verknüpfte.[46] Angesichts seiner logarithmischen Nachbildungen von Schwankungen des Nilwasserstands war der Herausgeber einer hydrologischen Fachzeitschrift nicht mehr in der Lage, »zwischen Natur und Fälschung zu unterscheiden«[47] und bewilligte ihm daher eine erste Publikation auf diesem Gebiet. Die Bilder waren mit einem Plotter gedruckte Vektorgraphiken, doch war ihr Erfolg nicht dem Computer allein zuzuschreiben, sondern vielmehr einer Medienkombination aus Zeichnung, Fotographie und Computergraphik: Die im Ausdruck erkennbaren Formen mussten durch zeichnerische und photographische Methoden nachbearbeitet werden.[48] Mit trockener Ironie formulierte Mandelbrot seine anfängliche Motivation: »Before, people would run a mile from my papers, but they could not run from my pictures.«[49] Zu Beginn aus strategischen und didaktischen Mitteln eingesetzt, rückten Bilder und ihre Interpretation jedoch bald ins Zentrum seines Schaffens.

## Bildhafte Umdeutungen

Vergesse man die Herkunft des Bildes, räsonierte Mandelbrot im Jahr 1963 hinsichtlich der Abbildung 4, so sei vorstellbar, man habe einen »geographischen Querschnitt eines neuen Teils der Welt« vor Augen, in dem die »Regionen unterhalb der Horizontlinien im Wasser« lägen.[50] Die derart »aus einer einzigen Schablone erschaffene«[51] Welt, die Mandelbrot imaginierte, veranschaulichte ursprünglich Ergebnisse eines Glücksspiels, bei dem ein Münzwurf entscheidet, welcher der beiden Spieler gewinnt. Im Rahmen der Verwendung von Bildern zur Konstruktion einer fraktalen »Naturgeometrie« ist die Technik einer solchen perzeptiven Adaption die bevorzugte Methode des »unspezialisierten Auges«: Es sucht nach gegenständlichen Umdeutungen des Bildhaften und konkreten Annäherungen

---

46 Vgl. Mandelbrot, zitiert nach Monte Davis: »Profile of Benoît B. Mandelbrot«. In: *Omni Magazine*, 5. Februar 1984, 2, abrufbar unter: <http://www.math.yale.edu/mandelbrot/interviews.html> (Letzter Zugriff: 21.2.2007).

47 Benoît Mandelbrot: *Gaussian Self-Affinity and Fractals,* New York 2002, 222f.

48 Ebd.

49 Mandelbrot, zitiert nach Davis 1984 (wie Anm. 46), 4.

50 Mandelbrot 1997 (wie Anm. 5), 96 (Nachdruck von: Benoît Mandelbrot: »New methods in statistical economics«. In: *Journal of Political Economy* 71 (1963), 421–440).

51 Mandelbrot nimmt Bezug auf Ausführungen zum »coin tossing game« in: William Feller: *An introduction to probability theory and its applications*, 2 Bde., Bd. 1, New York 1950, vor allem 238–263. Feller liefert jedoch nicht die von Mandelbrot reproduzierte Abbildung.

an bestimmte Wahrnehmungsweisen der Wirklichkeit. Abstrakte Wissensrepräsentationen, die nicht mehr über die Erfahrungsebene erschlossen werden können, werden an Sehgewohnheiten angenähert und fungieren als Experimentierfeld für neue Konstruktionen. Eine solche Lesart kann auf die inhaltliche Deutung zurückwirken und sich in der Rezeption verselbständigen.[52] So werden mathematische Strukturen, die sich der visuellen Wahrnehmung entziehen und deshalb das Auge als Erkenntnisinstrument auszuschließen scheinen, analog zu geomorphologischen Merkmalen als visuell erkennbare Räume instrumentalisiert. Ausgehend von seiner assoziativen Interpretation des Zufallsdiagramms, beginnt Mandelbrot mit ersten Experimenten der Darstellung stochastischer Fraktale, die er als Mittel der mathematischen Modellierung natürlicher Strukturen begreift. Sie basieren auf computergeneriertem Zufall und sind frühe Vorläufer des eingangs gezeigten Planetenaufgangs (Abb. 1).

Die schwarzen, unregelmäßigen Flecken der Abbildung 5 veröffentlicht er in seinem ersten Buch »Les Objets Fractals« im Jahr 1975. Er unterschied sie anhand ihrer gebrochenen Dimensionswerte 1,1, 1,3 und 1,9. Von den mit D=1,3 gekennzeichneten Formen bemerkte er, sie entfalteten die größte simulatorische Kraft. Die kartographischen Ähnlichkeiten seien schwer zu übersehen: Die oberste Insel erinnere an Grönland, die linke nach einer Vierteldrehung an Afrika, und nach einer halben Drehung könne man in der Gesamtheit der Flecken Neuseeland mit der Insel Bounty erkennen.[53] Im selben Jahr publizierte er ähnliche Zufallsformen in einem anderen Zusammenhang und bemerkte, nun Griechenland, das gespiegelte Meer von Okhotsk, den Golf von Siam oder West-Schottland zu entdecken.[54] Mandelbrot setzte auf die Vieldeutigkeit und Offenheit einer gedankenverbindenden Interpretationslogik, die sich überdies erst vollends durch die Drehung des Bildes entfalten sollte. Angesichts solcher Bildtechniken bröckeln Distinktionen zwischen Kunst- und Wissenschaftsbildern, die davon ausgehen, dass letztere Eindeutigkeit beabsichtigen oder nach diesem Kriterium von den Forschern ausgewählt werden.[55] Bilder in den Wissenschaften müssen als grundsätzlich eigensinnige und widerspenstige

---

52 Vgl. entsprechend die an Sehgewohnheiten angepaßte Rezeption der Feynman-Diagramme in David Kaiser: »Stick-Figure Realism: Conventions, Reifications, and the Persistence of Feynman Diagrams, 1948–1964«. In: *Representations* 70 (Spring 2000), 49–86.

53 Benoît Mandelbrot: *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, Paris 1975, 116.

54 Benoît Mandelbrot: »On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars«. In: *Journal of Fluid Mechanics* 72 (1975), 401–416; hier: 405.

55 Gottfried Boehm: »Zwischen Auge und Hand. Bilder als Instrumente der Erkenntnis«. In: Bettina Heintz, Jörg Huber (Hrsg.): *Mit dem Auge denken. Strategien der Sichtbarmachung in wissenschaftlichen und virtuellen Welten*, Zürich 2001, 43–54; hier: 54.

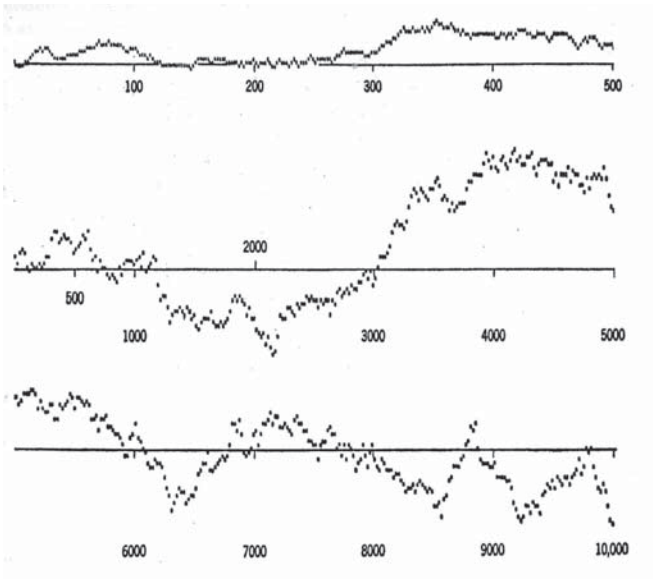



Abb. 4: Benoît Mandelbrot, Record of Henry's winnings in a coin-tossing game, played with a fair coin [...], 1963.

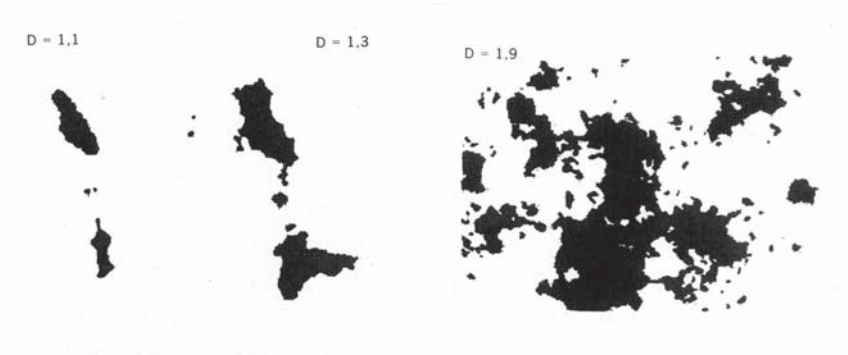



Abb. 5: Benoît Mandelbrot, Quelques côtes imaginaires, aus: *Les Objets Fractals*, 1975.

Akteure verstanden werden, deren mehrdeutige Vagheit in der Forschung produktiv gemacht werden kann. Mandelbrot mag als Extrembeispiel der Nutzung des assoziativen Potentials von Bildern gelten, nicht jedoch als sonderbarer Einzelfall. Obwohl die nahegelegten kartographischen Ähnlichkeiten äußerst zweifelhaft sind und keinerlei Übereinstimmung von Mathematik und Natur beweisen, bezeugen sie dafür aber umso mehr die Suggestivkraft der Formen sowie das Bemühen, für Visualisierungen mathematischer Gedankenexperimente eine Entsprechung in der Welt der Naturphänomene zu finden. Dass sie die Umrisse der erwähnten Länder nur andeuten, war auch Teil der Botschaft: Sie sollten eben keinen geographischen Spezialfall nachbilden, sondern vielmehr an die Idee von Natur, an ihr Prinzip, an das »Naturhafte« erinnern.

Eine vergleichbare Bildtechnik, die Mandelbrot für die assoziative Interpretation seiner visualisierten Mathematik benutzte, ist bereits aus der Landschaftszeichnung des 18. Jahrhunderts bekannt. Der englische Künstler Alexander Cozens (1717–1786) stellte 1759 erstmals seine Methode des »blot drawing« vor,[56] mittels derer Landschaften aus zufällig gesetzten und vermeintlich gegenstandslosen Farbflecken oder Tintenklecksen entwickelt werden sollten (Abb. 6). Der »blot« selber sei dabei »keine Zeichnung, sondern eine Ansammlung zufälliger Formen, von denen eine Zeichnung gemacht werden kann«.[57] Vergleicht man nun Cozens und Mandelbrot, so fallen zuerst die Differenzen auf: Den dynamischen Pinselstrichen Cozens, die das Spiel von Licht und Schatten reflektieren und Perspektive evozieren, stehen Mandelbrots scherenschnittartig-großflächige Farbflecken wie monolithische, schwerfällige Blöcke gegenüber. Während Mandelbrot seine Flecken aus der Vogelperspektive betrachtet, blickt Cozens letztlich in einen dreidimensionalen Landschaftsraum, selbst wenn die räumliche Illusion in der »in sich geschlossenen oder begrenzten Szene, mit wenig oder keinem Himmel« weitgehend gemieden wurde. Und doch gibt es erstaunliche Ähnlichkeiten in der Verfahrensweise. Die »blots« waren als »multifunktionale« Elemente gedacht: »Ein und derselbe ›blot‹ kann zu verschiedenen Skizzen führen«,[58] mithin als Ausgangspunkt verschiedener imaginärer Landschaften fungieren. Die auf diese Weise entwickelten Landschaften sollten »aus dem Geist der Natur und nach den Prinzipien der Natur [gebildet sein], anstatt eine bereits ausgebildete Natur lediglich

---

56 Alexander Cozens: »An Essay to Facilitate the Invention of Landskips« [1759]. Vgl. Werner Busch: *Das sentimentalische Bild. Die Krise der Kunst im 18. Jahrhundert und die Geburt der Moderne*, München 1993, 337.

57 Alexander Cozens: »New Method of Assisting the Invention in Drawing Original Compositions of Landscape« [1785/86], zitiert nach Busch 1993 (wie Anm. 56), 348.

58 Busch 1993 (wie Anm. 56), 346.

Abb. 6: Alexander Cozens, Eine in sich geschlossene oder begrenzte Szene, mit wenig oder keinem Himmel [›blot‹ Nr. 14], aus: *A New Method of Assisting the Invention in Drawing Original Compositions of Landscape*, London 1785/86, British Museum, London.

nachzubilden«.[59] Auch Cozens »naturhafte« Landschaften durften nicht eindeutig zu verorten sein, darin ist seine auf Interpretation zufälliger Kleckse beruhende assoziative Bildlogik der Methode Mandelbrots vergleichbar. Zielte Cozens auf eine »Neubestimmung des Verhältnisses von Kunst und Natur«,[60] so suggerierte Mandelbrot neue Relationen zwischen Natur und Mathematik.

Die Nähe zur künstlerischen Bildproduktion – und speziell zur Zeichnung – wird umso deutlicher, betrachtet man den Herstellungsprozess früher fraktaler Bilder. Da Mandelbrot nicht selber programmieren konnte, hing die Visualisierung in entscheidendem Maße von seinen Mitarbeitern ab. Transdisziplinäre Netzwerke bildeten die Voraussetzung für den Verbildlichungsprozess und beeinflussten die mathematische Arbeitsweise grundlegend. Eine Vielzahl technischer und sozialer Faktoren und Zwischenstufen bedingten die Erzeugung der anschaulichen Ergebnisse. Der Programmierer an der Schnittstelle zwischen Formel und Form gab die

---

59 Bernhard Holeczek: »Zufall als Glücksfall. Die Anfänge eines künstlerischen Prinzips der Avantgarde«. In: Bernhard Holeczek, Lida von Mengden (Hrsg.): *Zufall als Prinzip: Spielwelt, Methode und System in der Kunst des 20. Jahrhunderts*, Ludwigshafen 1992, 15–24; hier: 17.

60 Busch 1993 (wie Anm. 56), 348.

Algorithmen für die Graphiksoftware vor und beeinflusste maßgeblich die Gestaltung. In den Jahren der ersten Experimente mit fraktalen Küstenlinien zu Beginn der siebziger Jahre dauerte die Bilderzeugung noch nächtelang, so dass Mandelbrots »fleckige Geographien« am nächsten Morgen oft von den Operatoren der Computerräume entsorgt waren, da sie für Fehldrucke gehalten wurden. Zudem war es noch nicht möglich, einheitliche Oberflächen zu generieren, sondern lediglich Linien, deren Ränder aus den Buchstaben O, X, M und W zusammengesetzt waren. Dass die Flecken überhaupt geomorphologische Assoziationen wecken konnten, war hingegen Leistung des Zeichenstifts und nicht Resultat der Visualisierung einer Formel: Mandelbrot musste das Innere der Formen per Hand ausmalen.[61] Die zeichnende Hand kann als wichtiger Interaktionsagent mit den digitalen Wissenschaftsbildern bestimmt werden. Dies bestätigen nicht nur die frühen Bildgestaltungen fraktaler Natursimulationen, sondern auch und vor allem die Bildpraxis in der Forschung zur komplexen Dynamik. Hier vollzieht sich das mathematische Denken in sigifikanter Weise durch die handgezeichnete Interpretation von Computergraphiken.[62] Zeichnerische und digitale Bildtechniken schließen sich in der fraktalen Mathematik nicht aus, sondern bedingen und benötigen sich vielmehr gegenseitig. Sie eröffnen neue assoziative Spielräume, die in die Theoriebildung einfließen können.

## Sehen vs. Entdecken

Dass der experimentell-spielerische Umgang mit Bildern in der Forschung – und sei es auch an ihren Grenzbereichen – jedoch nicht zwangsläufig den Vorwurf einer unkritischen Akzeptanz des Bildlichen oder einer naiven Bildgläubigkeit rechtfertigt, zeigt auch die Geschichte der Entdeckung des wohl bekanntesten Symbols der Fraktalen Geometrie. Die so genannte Mandelbrotmenge avancierte in der Mitte der achtziger Jahre zu einer der ersten wissenschaftlichen Ikonen in Zeiten der Digitalisierung. Grundlage für ihre Entdeckung bildeten die Werke der französischen Mathematiker Gaston Maurice Julia und Pierre Fatou zur Dynamik von Polynomen im Raum der komplexen Zahlen vom Anfang des 20. Jahrhunderts. Ihre Arbeiten galten als Meisterwerke, waren jedoch aufgrund ihres hohen Schwierigkeitsgrades selbst für Mathematiker jahrzehntelang kaum nach-

---

61 Mandelbrot 2004 (wie Anm. 1), 21; ebenso Mandelbrot 2002 (wie Anm. 47), 226.

62 Vgl. Nina Samuel: »Form und Farbe digitaler Mathematik: Vom Zusammenspiel von zeichnender Hand und Computer in fraktalen Bildwelten«. In: *Bildwelten des Wissens* 3.2 (2005), 18–31.

vollziehbar. Benoît Mandelbrot hatte an der École Polytechnique bei Julia studiert und kannte seine Werke, hatte sich jedoch bis zum Ende der siebziger Jahre nicht näher mit ihnen beschäftigt.[63] Erst als er realisierte, dass sich mit Hilfe des Computers aus Julias Untersuchungen Bilder ergaben, erwachte sein Interesse wieder. Im Rahmen eines Kolloquiums in Princeton im Jahr 1977 wurde er auf Computergraphiken des Mathematikers John Hubbard aufmerksam, mit dem er sich ein Jahr später in Kontakt setzte.[64] Hubbard war einer der ersten, der graphische Darstellungen von kubischen Polynomen angefertigt hatte. Die Bilder, die er mit seinen eigens entwickelten Programmen erzeugt hatte, sind bisher nicht publiziert und waren von teilweise enormen Ausmaßen. Aus etwa zwanzig Einzelteilen zusammengesetzt, erreichte eins von ihnen die Größe von anderthalb mal einen Meter. Auch wenn Mandelbrot Hubbards Bilder als »von eher armseliger Qualität«[65] bezeichnete, müssen sie einen starken Eindruck auf ihn gemacht haben. Ausgestattet mit den Kapazitäten der damals modernsten Rechenmaschinen, begann er kurze Zeit später selber mit der Bildproduktion von sogenannten Juliamengen, die schließlich zur Definition der Mandelbrotmenge führen sollte. Zwei Forschungsphasen lassen sich unterscheiden: In der ersten Phase, 1979, widmete er sich ausschließlich der graphischen Darstellung der komplizierteren nichtquadratischen Gleichungen. Seine zweite Forschungsphase fällt in die Zeit seiner Gastprofessur im Wintersemester 1979/80 in Harvard. Unter deutlich schlechteren technischen Bedingungen widmete er sich dort den quadratischen Gleichungen und ihren Verbildlichungen.

Die beiden Forschungsphasen lassen sich als Phasen unterschiedlicher sinnlicher Erkenntnis fassen, wobei der ersten *Phase des Sehens* eine zweite, die des *Entdeckens* folgt: »I did see those elements in 1979 but could not organize and describe them. Therefore, they remained undiscovered.«[66] Dass das *Sehen* nicht zeitgleich mit dem *Entdecken* stattfand, widerspricht der allzu einfachen Vorstellung, die Mandelbrotmenge sei ein sich automatisch aufdrängendes Ergebnis gewesen, sobald ausreichende Rechenkapazitäten vorhanden waren. Dies wäre eine ebenso reduzierte Sichtweise, als wollte man behaupten, ihre Entdeckung wäre theoretisch auch schon vor Erfindung des Computers möglich gewesen. Die Geschichte der Mandelbrotmenge darf weder von ihren technischen Voraussetzungen getrennt noch allein auf sie zurückgeführt werden.

---

63 Vgl. Mandelbrot, in: Barcellos 1985 (wie Anm. 39), 211.

64 Vgl. John Hubbard: Preface. In: Tan Lei (Hrsg.): *The Mandelbrot Set, Theme and Variations*, Cambridge 2000, xiii-xx; hier: xiiif.

65 Ebd., xv.

66 Mandelbrot 2004 (wie Anm. 1), 157.

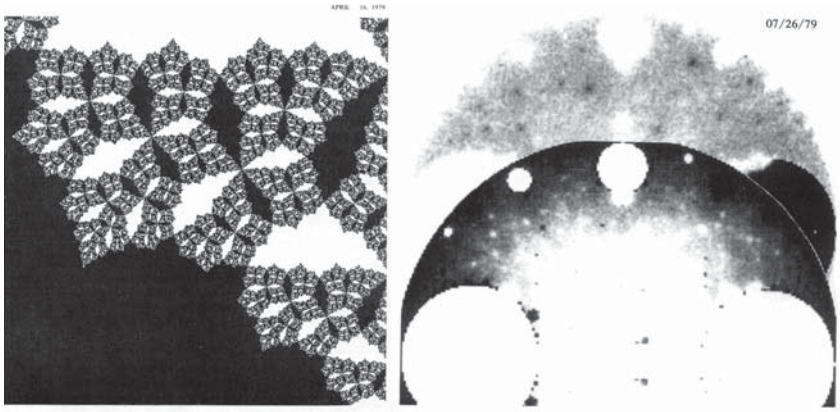



Abb. 7: Links: Benoît Mandelbrot, The colors white and black mark the domains of attraction of two cycles, each made of two points, for a map of the form $z \to \lambda_1 W_1(z)$, IBM 1979. Rechts: Benoît Mandelbrot, Composite of domains of the $M^0$ set of $z \to \lambda_1 W_1(z)$ yielding cycles of different sizes, IBM 1979.

Aus der Phase des bloßen *Sehens* und des spielerischen Experimentierens mit den neuen Formen resultierte eine umfangreiche Serie schwarz-weißer Graphiken, die Mandelbrot 1979 zusammen mit seinem damaligen Programmierer Mark R. Laff herstellte (exemplarisch Abb. 7). Die von Mandelbrot erstmalig 2004 publizierten Bilder aus dieser Zeit sind nur ein Ausschnitt aus der immensen Produktion. Vereinfacht gesagt ging es bei diesen visualisierten Rechnungen um die Frage, welche Lösung ein Computer für eine bestimmte Gleichung finden wird, wenn mehrere Lösungen möglich sind. Jeder Pixel entsprach einer komplexen Zahl und damit auf dem Monitor einem genau definierten Flächenpunkt in der komplexen Zahlenebene. Die Einfärbung der Pixel in schwarz oder weiß markierte das unterschiedliche Verhalten der Zahlenwerte nach einer vorher festgelegten Anzahl von Rechenschritten. Mandelbrot sah sich mit Mustern von einer »buchstäblich überwältigenden Vielfalt«[67] konfrontiert. Eine Interpretation fiel schwer, und dies hatte Auswirkungen auf den Fortgang der Experimente. Oft war es die »zunehmende Verwirrung, die die nächsten Schritte motivierte«.[68] Da der menschliche Verstand beim Betrachten der das Bild erzeugenden Zahlenkolonnen nicht in der Lage wäre, die strukturellen Regelmäßigkeiten zu erkennen, sah sich Mandelbrot trotz der unklaren Ergebnisse veranlasst, eine möglichst große Anzahl von Bildern zu produzieren: »Incidentally, a picture is like reading a scientific instrument. One

[67] Ebd., 138.
[68] Ebd., 161.

reading is never enough. Neither is one picture.«[69] Seinem Programmierer Laff zufolge war Mandelbrots Hauptaugenmerk auf die Möglichkeit einer flexiblen Interaktion zwischen Text und Bild gelegt. Die bis zu zehn Parameter mussten nach Beobachtung der graphischen Ergebnisse immer aufs Neue modifiziert werden können. Die sich zeigenden Muster bestimmten dabei die Auswahl des zu analysierenden Felds der Zahlenebene, in dem verschiedene ästhetische Optionen durchgespielt wurden, bis ein Bild forschungsrelevant erschien und aufbewahrt wurde. Die Festlegung des Bildausschnitts auf sechs Nachkommastellen, die Anzahl der Iterationen, die freie Wahl der Färbung und die Möglichkeit der interaktiven Ausschnittvergrößerung gewährleisteten eine sorgsame Gestaltung des Bildes. Mandelbrot suchte nach Korrespondenzverhältnissen zwischen den Parametern und den Bildern. Dies gelang ihm durch die Entwicklung von Beobachtungskriterien, die sich nicht allein über die Sichtbarmachung einzelner Strukturen gewinnen ließen, sondern nur durch Vergleichsmöglichkeiten *ähnlicher* Bilder, also durch die Herstellung von Bilderserien. Die jeweils neuen Bilder mussten dabei immer wieder kritisch und relativierend mit den vorangegangenen in Beziehung gesetzt werden.

Die Erzeugung eines klar erkennbaren Musters war nicht der Regelfall der Experimente, wie die rechte der beiden Abbildungen zeigt. Eine steigende Komplexität der Gleichungen machte sich in der schemenhaften Unschärfe der Konturen bemerkbar. Ins Innere der Kreissegmente diffundiert die Schwärze nebelartig; die spontane Assoziation an einen verfremdeten Blick auf ferne Galaxien drängt sich auf. Erscheinen und Verschwinden der Muster scheint hier in einem einzigen Bildraum synthetisiert: Wenige Umrisse sind klar erkennbar, die meisten zerfließen in unregelmäßigen Wolkenflecken. An einigen Stellen der Bilder hätte man bereits die bekannte Knollenform der Mandelbrotmenge erkennen können, so Mandelbrot rückblickend. Er verklärte dies nachträglich als »advance-shadows of the Mandelbrot-set-to-be«,[70] die er aber damals noch nicht als eigene Form identifiziert hatte.

## Bild(ver)störungen

Im Wintersemester zog er von IBM nach Harvard um, wo er eine Gastprofessorenstelle angenommen hatte. Da er dort weder ein eigenes Büro noch eigene technische Geräte besaß, konnte er nur die allgemein zugänglichen Rechner im Keller des Science Centers nutzen, D.E.C. Vax

---

69 Ebd., 3.
70 Ebd., 169.

50 Computer, ältere Versionen von Tektronix-Monitoren mit Kathodenstrahlröhren und Drucker der Marke Versatec. Die knappe Arbeitszeit und vergleichsweise schlechte technische Ausrüstung zwangen ihn zur Komplexitätsreduktion des Untersuchungsgegenstands: Sich von kubischen Polynomen abwendend, entschloss er sich für Experimente mit quadratischen mit einem einzigen, veränderlichen Parameter. Zu erwarten war ein einfaches, eindeutiges Ergebnis. Das Resultat widersprach jedoch allen Erwartungen und Erfahrungen: »Wir erhielten sofort diese unglaublichen Bilder! Sie waren so unglaublich, einfach weil sie so schmutzig aussahen – lauter schwarze Kleckse!«[71] Die Abbildung 8 (linke Seite, oben) zeigt das früheste erhaltene Bild der »auffälligsten schmutzigen Ecke«.[72] Ein angeschnittener schwarzer Kreis sitzt in einer Ecke, seine Ränder wirken zerfranst, von Ausbuchtungen und weiteren Halbkreisen geformt. Dieses Bild gab nur einen Teil der Menge wieder, das erste vollständige ging Mandelbrot zufolge verloren. Am verwirrendsten waren die im oberen Bereich des Bildes auf einer schrägen Y-Form angeordneten Flecken, deren Herkunft ungeklärt schien. Sie warfen die Frage nach der Zugehörigkeit zum Bild auf: Waren sie aus Berechnungen hervorgegangen und gehörten demnach zur Visualisierung dieser »einfachen« Formel oder gab es eine andere Erklärung? Da der Monitor ständig Ausfälle hatte und der schon altersschwache Versatec-Drucker Schlieren und Kleckse in Hülle und Fülle produzierte,[73] verschwamm die Grenze zwischen Bild und Bildstörung. Die Flecken konnten sowohl Resultat mangelhafter Druckqualität als auch

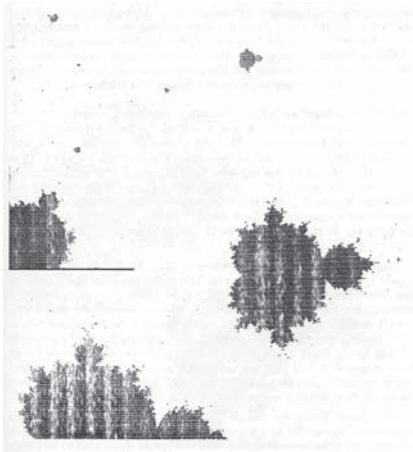


Abb. 8: Benoît Mandelbrot, My first picture of the whole M set is – unfortunately – either misfiled or lost. […] The top panel here is a blow-up of the most conspicuously »messy« corner of M, near the bifurcation of order 3. The middle and bottom panels show the oldest preserved blow-ups of the two largest islands, one already seen in the top panel and the other intersected by the real axis (for reasons of economy, only half was computed), Harvard, Frühjahr 1980.

---

71 Mandelbrot 1990, zitiert nach »Fraktale in Filmen und Gesprächen«, ein Film von Heinz-Otto Peitgen et al., Spektrum der Wissenschaft 1990, Min. 41:50 – 42:00.

72 Mandelbrot 2004 (wie Anm. 1), 13.

73 Ebd., 14.

Ergebnis mathematischer Berechnungen sein. Die Entdeckung von Symmetrien bei einigen der vermeintlichen Flecken ließ die Vermutung immer wahrscheinlicher werden, dass die gesuchte Darstellung der mathematischen Punktmenge möglicherweise genauso aussah wie die technische Störung, die man vermeiden wollte.

Um die Grenze zwischen Bild und Bildstörung auszuloten, entschloss sich Mandelbrot, die Flecken genauer zu untersuchen, und setzte dazu den Computer als Mikroskop ein. Er wiederholte die Konstruktion auf einem kleineren Grundgebiet. Dadurch wurde etwas aus der Formel nicht Ersichtliches erkennbar: Einige Flecken verschwanden in der höheren Auflösung, aber andere erinnerten an kleinere, der Ausgangsform ähnliche Kopien (Abb. 8, rechts), die Ränder unscharf und zerfranst, wie mit feinen Haaren besetzt, am zentralen Mittelteil oben und unten kleinere Knollen, seitlich eine größere. Mandelbrot fertigte weitere Vergrößerungen an (Abb. 8, unten) und fand durch Vergleiche mit der Ausgangsform seine erste Beobachtung bestätigt: Die Menge schien selbstähnlich und unerwartet komplex zu sein. Die vermeintliche Störung wandelte sich damit zur entscheidenden Entdeckung.[74]

Wie notwendig dieses überraschende Moment einer fleckenhaften Bild(ver)störung war, zeigt die wenig bekannte Geschichte ihrer versäumten Entdeckung. Bereits 1978 stellten Robert Brooks und John Peter Matelski auf einem Mathematikerkongress ein Bild der Menge vor, das jedoch erst drei Jahre später zusammen mit den Kongressakten veröffentlicht wurde (Abb. 9).[75] Die Knollenform ist aus einzelnen Sternchen zusammengesetzt und weist an der linken Seite eine stabartige Verlängerung auf. Brooks und Matelski

Abb. 9: Robert Brooks und John Peter Matelski, The set of C's that $f(z)=z^2 + C$ has a stable periodic Orbit, in: »The dynamics of 2-generator subgrounds of PSL(2,C)«, aus: *Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brooks Conference*, 1981.

---

74 Vgl. zu Bildstörungen in einem größeren Kontext: Peter Geimer: »Was ist kein Bild? Zur ›Störung der Verweisung‹«. In: ders. (Hrsg.): *Ordnungen der Sichtbarkeit. Fotografie in Wissenschaft, Kunst und Technologie*, Frankfurt am Main 2002, 313–341.

75 Robert Brooks, J. Peter Matelski: »The dynamics of 2–generator subgrounds of PSL(2,C).« In: Irwin Kra, Bernard Maski (Hrsg.): *Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brooks Conference*, Princeton 1981, (Annals of Mathematics Studies 97), 65–71.

waren in diesem Sinne »Entdecker ohne Entdeckung«,[76] denn von ihnen stammte das erste, öffentlich vorgestellte Bild einer Mandelbrotmenge, ohne dass sie deren Selbstähnlichkeit und Komplexität erkannten. Das Bild von Brooks und Matelski war Teil der 1989 im *Mathematical Intelligencer* veröffentlichten Kontroverse zwischen Steven Krantz und Mandelbrot, in deren Verlauf Krantz die Position Mandelbrots zu schwächen suchte, als er behauptete, Mandelbrot sei gar nicht der Entdecker seiner Mandelbrotmenge gewesen.[77]

Da das Bild nicht den Status einer Illustration hatte, sondern das eigentliche Ergebnis darstellte, wurde die Frage nach Zuschreibung und Datierung von Bildern zum Teil des mathematischen Diskurses. Übersehen wurde in dieser Diskussion indes, dass Brooks und Matelski anhand ihres Bildes dessen Besonderheit gar nicht entdecken *konnten*: Sie benutzten kein Graphikprogramm, sondern den bereits vorgestellten ASCII-Code, der nur die Punkte berechnete, an denen im Bild die Sternchen zu sehen sind. Das Bild war damit viel grobkörniger als die Graphiken Mandelbrots. Bei gleicher Auflösung hätte ein mit dem ASCII-Code erzeugtes Bild von enormer und unüberschaubarer Größe sein müssen, um auch die kleinen, umliegenden Flecken sichtbar zu machen. Dies war erst unter Verwendung eines Graphikprogramms möglich, dessen Feinheit auf engem Raum die entscheidende Frage nach einer Unterscheidung zwischen Bild und Bildstörung aufwerfen konnte. Obwohl Mandelbrot keine seiner Annahmen in einen strengen mathematischen Beweis überführte, benannte der französische Mathematiker Adrien Douady die Menge einige Zeit später nach Mandelbrot: »because [he] was the first one to produce pictures of it«.[78] Dabei müsste man diese Begründung eigentlich umformulieren und ihn als den ersten bezeichnen, der dem Bild im entscheidenden Moment misstraute und durch vermeintliche technische Fehler seiner Besonderheit auf die Spur kam.

Mandelbrots unkonventionelle und kreative Arbeitsweise des »unspezialisierten Auges« wäre ohne Bilder nicht möglich gewesen. Allerdings machte sich hier auch die Kehrseite seines Urvertrauens in ihre Möglichkeiten bemerkbar: Da sich Mandelbrots zentrale Beobachtung der selbstähnlichen Fleckenstruktur nicht aus Berechnungen, sondern allein aus der experimentellen Sichtbarmachung und den anschließenden Vergrößerungen ergeben hatte, stand die graphische Darstellung im Zentrum des Manuskripts

---

76 Vgl. Geimer 2002 (wie Anm. 74), 331f.

77 Krantz 1989 (wie Anm. 8), 16, sowie Benoît Mandelbrot: »Some ›Facts‹ That Evaporate Upon Examination«. In: *The Mathematical Intelligencer* 11.4 (1989), 17–19; hier: 17.

78 Adrien Douady: »Julia Sets and the Mandelbrot-Set«. In: Peitgen, Richter 1986 (wie Anm. 7), 161–173; hier: 161.

seiner Erstveröffentlichung, die Formeln und Berechnungen waren ihr untergeordnet. Die Existenz der Flecken und Aussagen über ihre Beschaffenheit waren allein in der Evidenz des Bildes begründet. Seine abwägende Differenzierung der Relevanz und Zugehörigkeit der verschiedenen Bildelemente wandelte sich nun zu einer unkritischen Begeisterung für das erzeugte Bild in seiner Gesamtheit. In seinem Manuskript notierte er: »A striking fact, which I think is new, becomes apparent here: FIGURE 1 is made of several disconnected portions«.[79] Die anscheinend vom Hauptkörper der Menge getrennte Punktstruktur wurde in einem verhängnisvollen Kurzschluss der Verwechslung von Bild und Beweis zur »Tatsache« deklariert, obwohl diese Feststellung als unbewiesene Behauptung gelten musste, da sie von keinem mathematischen Theorem untermauert war. Ihr genaues Gegenteil, die effektive Verbindung der Flecken mit dem Hauptkörper, wurde nur kurze Zeit später mathematisch nachgewiesen.[80]

Darüber hinaus konnte der aufmerksame Betrachter des in den *Annals of the New York Academy of Sciences* publizierten Bildes nicht einmal jene im Text besonders hervorgehobenen Flecken entdecken, da sie der Herausgeber als vermeintlich unerwünschte Druckfehler beseitigt hatte.[81] In Belegexemplaren des Artikels, die er an Kollegen verschickte, ersetzte er daher die retouchierten Bilddetails, indem er sie von Hand nachzeichnete.[82] Da er die Verbindungslinien nicht sah und dem Instrument uneingeschränktes Vertrauen schenkte, glaubte er auch nicht an ihre Existenz und bekräftigte dies erneut in der Zeichnung. Das Sehen, welches Mandelbrot zufolge zum Glauben führt, wurde hier erst durch die Zeichnung ermöglicht. Eine solche zeichnerische Authentifizierung eines digital gewonnenen Ergebnisses weist erneut auf die enge Verschränkung und Gleichwertigkeit der beiden Bildtechniken hin.

Da die Computergraphik aus Mandelbrots Sicht das Medium war, das eine »Rückkehr des Sehens«[83] in die Mathematik und damit den Niedergang der Bourbaki ermöglicht hatte, proklamierte er mit seiner Fraktalen Geometrie auch ihre Überlegenheit gegenüber anderen Bildtechniken. Damit verstellte er den Blick auf seine eigene Leistung, die eben nicht auf das bloße Vorhandensein technischer Voraussetzungen zu reduzieren ist: Erst

---

79 Benoît Mandelbrot: »Fractal aspects of the iteration of $z \to \lambda z\,(1-z)$ for complex $\lambda$ and z«. In: Robert H. G. Helleman (Hrsg.): *Non Linear Dynamics. Annals of the New York Academy of Sciences* 357 (1980), 249–25; hier: 250.

80 Vgl. Adrien Douady, John Hubbard: »Itération des polynômes quadratiques complexes«. In: *Comptes Rendus* (Paris), 294–I (1982), 123–126.

81 Vgl. eine Gegenüberstellung der beiden Abbildungen in Mandelbrot 2005 (wie Anm. 37), 37.

82 Mandelbrot 2004 (wie Anm. 1), 37.

83 Vgl. Mandelbrot 1998 (wie Anm. 45), 5.

die aus einer Verunsicherung der Wahrnehmung resultierende, sorgfältige Diskussion der Bilddetails hatte den Schritt vom Sehen zum Entdecken ermöglicht. Im Gegensatz zu den populären Versionen fraktaler Computergraphiken kündeten die Bilder im Bereich der Forschung durchaus von produktiven Verbindungen von Auge, Geist – und Hand. Gleichwohl befinden sich die Forscher im Spannungsfeld jeden visuellen Denkens: zwischen der Wahrung eines kritischen Distanzverhältnisses gegenüber der Evidenz-Suggestion der Bilder und den schöpferischen Potentialen, die möglicherweise erst durch das Ausschalten dieser Distanz und einen spielerischen Umgang mit Bildlichkeit freigesetzt werden können. Bei der Suche nach der Spezifik von Bildern in Mathematik und Naturwissenschaften besteht die Herausforderung einer bildwissenschaftlichen Analyse auch darin, den Blick für diese Kräftepunkte des Bilderdenkens jenseits der populären Bildproduktion zu schärfen.

Ingeborg Reichle, Steffen Siegel, Achim Spelten (Hg.)

# Verwandte Bilder

## Die Fragen der Bildwissenschaft

Kulturverlag Kadmos Berlin

Berlin-Brandenburgische
Akademie der Wissenschaften

Eine Publikation der
Interdisziplinären Arbeitsgruppe *Die Welt als Bild*

Gedruckt mit Unterstützung der
Gerda Henkel Stiftung, Düsseldorf, sowie der Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Berlin und des Ministeriums für Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Brandenburg.

Die Herausgeber danken den Leitern der Arbeitsgruppe
Christoph Markschies, Peter Deuflhard und Jochen Brüning.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter <http://dnb.ddb.de> abrufbar

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Copyright © 2007,
Kulturverlag Kadmos Berlin. Wolfram Burckhardt
Alle Rechte vorbehalten
Internet: www.kv-kadmos.com
Umschlaggestaltung: kaleidogramm, Berlin.
Gestaltung und Satz: kaleidogramm, Berlin
Druck: INTER ALIA
Printed in EU
ISBN (10-stellig) 3-86599-034-7
ISBN (13-stellig) 978-3-86599-034-1

# Inhalt

Ingeborg Reichle, Steffen Siegel, Achim Spelten
Die Familienähnlichkeit der Bilder . . . . . 7

I
Bild-Körper

Marius Rimmele
Selbstreflexivität des Bildes als Ansatzpunkt historischer Bildforschung. Ein Diskussionsbeitrag zur Rolle des Trägermediums 15

Steffen Siegel
Einblicke. Das Innere des menschlichen Körpers als Bildproblem in der Frühen Neuzeit . . . . . 33

Marcel Finke
Materialität und Performativität. Ein bildwissenschaftlicher Versuch über Bild/Körper . . . . . 57

II
Bild-Begriffe

Achim Spelten
Sehen in Bildern. Eine Analyse zum Verhältnis von Bildwahrnehmung und Zeichenfunktion . . . . . 81

Silvia Seja
Der Handlungsbegriff in der gegenwärtigen Bild- und Kunstphilosophie . . . . . 97

Sebastian Bucher
Das Diagramm in den Bildwissenschaften. Begriffsanalytische, gattungstheoretische und anwendungsorientierte Ansätze in der diagrammtheoretischen Forschung . . . . . 113

Jan Peter Behrendt
Das Deutschlandbild als Forschungsgegenstand. Perzeption, Imagination und Veräußerlichung . . . . . 131

## III
## Bild-Geschichten

Barbara Kopf
Skulptur im Bild. Visuelle Dokumentation und deren Beitrag zur Entwicklung der archäologischen Wissenschaft . . . . . 149

Ingeborg Reichle
Kunst-Bild-Wissenschaft. Überlegungen zu einer visuellen Epistemologie der Kunstgeschichte . . . . . 169

Roland Meyer
Detailfragen. Zur Lektüre erkennungsdienstlicher Bilder . . . . . 191

Alexandra Lembert
Gedanken sehen. Gedankenphotographie in Sax Rohmers Detektivgeschichten *The Dream-Detective* (1920) . . . . . 209

## IV
## Bild-Medien

Viktor Bedö
Landkarten als Werkzeuge unseres Denkens . . . . . 227

Sebastian Gießmann
Netze als Weltbilder. Ordnungen der Natur von Donati bis Cuvier 243

Sebastian Vincent Grevsmühl
Epistemische Topografien. Fotografische und radartechnische Wahrnehmungsräume . . . . . 263

Michael Rottmann
Das digitale Bild als Visualisierungsstrategie der Mathematik . . . . 281

Nina Samuel
»I look, look, look, and play with many pictures«. Zur Bilderfrage in Benoît Mandelbrots Werk . . . . . 297

Abbildungsverzeichnis . . . . . 321

Autorinnen und Autoren . . . . . 325