

Graphen können alles

Visuelle Modellierung und Netzwerktheorie vor 1900

Die Wissensgeschichte der Graphentheorie und des Netzwerkdiagramms zeichnet sich durch mannigfaltige Paradoxien und Brüche aus. Dazu gehört die späte Formierung der mathematisch-formalen Graphentheorie als eigenständiges mathematisches Teilgebiet im 20. Jahrhundert, aber auch deren widersprüchliche zweihundertjährige Vorgeschichte als Wissen in Latenz. Visuelle Modellierung spielt hierbei eine entscheidende Rolle. Dies gilt sowohl für Beispiele aus der Mathematik- und Spielgeschichte (Alexandre Théophile Vandermonde, 1771 und William Rowan Hamilton, 1856), als auch für die Etablierung graphischer chemischer Notationsformen ab den 1860er Jahren, die exemplarisch anhand eines Texts des Mathematikers James Joseph Sylvester vorgestellt werden. Neben dem beständigen Widerstreit von Ikonizität und Graphematik in Diagrammen rücken dabei oft zur Seite gedrängte Aspekte in den Vordergrund: Spielende Mathematiker und träumende Chemiker erinnern daran, dass sich Modellieren als Kulturtechnik nicht auf rationale Entwurfsprozesse reduzieren lässt.

Graphentheorie und Netzwerke

Sind Diagramme einfach? Reduzieren sie durch ihre ikonischen Qualitäten Komplexität? Charles Sanders Peirce schreibt dazu 1895 in einem Text mit dem Titel *Kleine Logik*: »Ein Diagramm ist eine besonders brauchbare Art von Ikon, weil es gewöhnlich eine Menge von Details ausläßt und es dadurch dem Geist gestattet, leichter an die wichtigen Eigenschaften zu denken. Die Figuren der Geometrie sind, wenn die Zeichnung genau ist, derart getreue Ähnlichkeiten ihrer Objekte, daß sie fast zu Fällen von ihnen werden.«¹ Diagramme, so Peirce, können ihren Vorbildern aber auch entschieden unähnlich sein: »Viele Diagramme ähneln im Aussehen ihren Objekten überhaupt nicht. Ihre Ähnlichkeit besteht nur in den Beziehungen ihrer Teile.«¹ Diese Form von operativer Relationalität in und durch die Zeichnung charakterisiert auch die formalen und formalisierten Netze und Netzwerke. Eine denkbar einfache und variationsfähige geometrische Figur aus Knoten, Linien/Kanten und Zwischenräumen verhilft der Moderne – und allem, was man epochal danach ansiedeln mag – zu einer ebenso materiellen wie symbolischen Kulturtechnik. Der Aufstieg der Netzwerke als Praxis und Denkstil begann zwar schon in Früher Neuzeit und Aufklärung, war dort aber vor allem mit der Epistemologie des Lebendigen verbunden. Zur Anatomie von Kapillaren im Blutkreislauf, Modellierungen

¹ Charles Sanders Peirce: »Kleine Logik«. In: ders.: *Semiotische Schriften*, hg. von Helmut Pape, Bd. 1, Frankfurt am Main 1986, S. 202–268; hier S. 205.

von Gehirn und Nervensystem und dem Netz als Ordnungsschema der belebten Natur kommt schon im 18. Jahrhundert die Geometrie hinzu. Umso verwunderlicher muss es erscheinen, dass vor dem zweiten Drittel des 20. Jahrhunderts Netze und Netzwerke keineswegs zum privilegierten Gegenstand der Mathematik geworden sind. Erst spät, und dann wiederum sehr verhalten, formiert sich ein Wissensfeld, das, wie der französische Mathematiker André Saint-Laguë 1926 einen Aufsatz überschreibt, »Les réseaux (ou graphes)« als eigenständigen Teilbereich der theoretischen wie angewandten Mathematik begreift.²

Angesichts von einer solchen paradoxen historischen Lage kann man sagen, dass man es über einen Zeitraum von etwa 200 Jahren mit einem Wissen in Latenz zu tun hat. Formell wäre Graphentheorie als Netzwerktheorie schon wesentlich früher breit auf Phänomene in Natur, Technik und Gesellschaft anwendbar gewesen. Dass dies erst im 20. Jahrhundert geschieht und dann, sozusagen in aller Kontingenz verspätet, Zeichenpraktiken und Lebenswelt massiv kurzgeschlossen werden, provoziert weitere Fragen. Meine zweite Annahme ist darum, dass man diesen etwa ab 1930 einsetzenden Umschwung nicht ohne die Visualität und Visualisierung graphentheoretischer Zusammenhänge erklären kann. Die Notation in Kalkülen allein bedingt noch nicht die breite kulturelle Wirksamkeit und Popularisierung. Erst dann, wenn Graphematik vermehrt in Ikonizität umschlägt und Berechenbarkeit mit älteren Bildtraditionen kurzgeschlossen wird, wird Netzwerk-Wissen zu einem weithin formalisierten Teil der modernen *episteme*.

Die retrograd geschriebene Wissenschaftsgeschichte der Graphentheorie wird mittlerweile von einer erklecklichen Ahnengalerie großer Männer bewohnt. Dies gilt schon für die Tradierung im ersten synthetisierenden Lehrbuch, der »Theorie der endlichen und unendlichen Graphen« des ungarischen Mathematikers Dénes König von 1936.³ Auch Albert-László Barabási Netzwerk-Manifest *Linked. The New Science of Networks* aus dem Jahr 2002 verbleibt gerne im Heldischen: »Graph Theory boomed after Euler with contributions made by mathematical giants such as Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchhoff and Pólya.«⁴ Eine solche Sichtweise lässt vollkommen außer Acht, dass sich zum einen Gegenstände und Probleme ihre Theorien suchen, andererseits Theorien eben auch ihre Gegenstände und Probleme generieren. Anstelle einer Erfolgsgeschichte möchte ich drei disparate Szenen skizzieren, die allesamt vor 1900 spielen. Sie widmen sich zwei Teilgebieten dessen, was später einmal Graphentheorie heißen wird. Dies sind zum einen die von Saint-Laguë noch in den 1920er Jahren als Unterhaltungsmathematik verschmähten

2 André Saint-Laguë: »Les Réseaux (ou graphes)«. In: *Mémorial des Sciences Mathématiques* 18 (1926), S. 1–64.

3 Dénes König: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* [1936], Leipzig 1986. Saint-Laguës Publikationen gehen Königs Buch voraus und werden deshalb gern als das »nullte« Buch zur Graphentheorie betrachtet. Siehe Harald Gropp: »Hamiltonian graphs from Kirkman to König«. In: *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 24 (2006), S. 81–88; hier S. 85.

4 Albert-László Barabási: *Linked. The New Science of Networks*, Cambridge, Mass. 2002, S. 12f.

Wegeprobleme: der Weg des Springers über das Schachbrett und die optimale Reiseroute zwischen 20 Punkten. Zum anderen werde ich in stark verknappter Form die Notation chemischer Formeln behandeln, innerhalb derer das Wort »graph« und die damit verbundene visuelle Form eine neue Semantik annehmen. Während die in Koordinatensystemen aufgezeichneten Kurven – die ebenfalls und nach wie vor Graphen genannt werden⁵ – gemessene und berechnete Strukturen festschreiben, fungieren die ›Chemicographen‹ in weit höherem Maße relational und topologisch. Bevor wir aber das Vergnügen mit Vandermondes Netz-Rösselsprüngen, Hamiltons unverständlichen Reisespielregeln und Sylvesters Kombination von Algebra und chemischer *graphé* haben werden, sind noch einige Worte zu visuellen Modellen im allgemeinen angebracht.

Diagramm, Modell, Simulation

Nelson Goodman hat den Modellbegriff nahezu komplett durch das nicht minder ambigue Wort ›Diagramm‹ ersetzen wollen. Und das mit gutem Grund: »Nur wenige Ausdrücke werden im populären und wissenschaftlichen Diskurs undifferenzierter gebraucht als ›Modell‹. Ein Modell ist etwas, das man bewundert oder dem man nacheifert, ein Muster, ein passender Fall, ein Prototyp, ein Exemplar, ein Modell in Originalgröße, eine mathematische Beschreibung – nahezu alles von einer nackten Blondine bis zu einer quadratischen Gleichung –, und das zu dem, wofür es ›Modell ist‹, in fast jeder Symbolisierungsrelation stehen kann.«⁶ Sein korrigierender Vorschlag in den 1968 erstmals erscheinenden *Sprachen der Kunst* reserviert den Modellbegriff idealerweise für die Fälle, in denen das Symbol weder ein Einzelfall noch eine sprachliche oder mathematische Beschreibung ist, zum Beispiel bei Schiffsmodellen, Miniaturbulldozern, Architekturmodellen eines Universitäts-Campus oder dem Holz- oder Tonmodell eines Autos.

Modell kann in diesem Sinne nur das sein, was auch im veränderten Maßstab – *modellus* (lat.) und *modello* (16. Jh., Italien) – gebastelt und gebaut werden kann. Goodman ordnet noch Diagramme als (überwiegend) flache, zweidimensionale, statische Modelle ein und verschiebt alle weiteren Antworten zum Verhältnis von Modell und Diagramm. Nicht nur dies ist frustrierend, auch der Überdruß am Modellbegriff selber stellt sich umso mehr ein, wenn man einmal zu Stachowiaks ziegelsteingroßer *Allgemeiner Modelltheorie* von 1975 gegriffen hat.⁷ Eleganter, instruktiver und auch aus heutiger Sicht erstaunlich frisch erscheinen dagegen Max Blacks 1962 verfasste grundlegende Bemerkungen zu Metaphern und Modellen. Bei Black finden sich vier unterschiedliche Modelltypen:

5 Siehe zu deren Wissenschaftsgeschichte Thomas L. Hankins: »Blood, Dirt, and Nomograms. A Particular History of Graphs«. In: *Isis* 90 (1999), S. 50–80.

6 Nelson Goodman: *Sprachen der Kunst. Entwurf einer Symboltheorie*, [Indianapolis 1968], übers. von Bernd Philippi, Frankfurt am Main 1995, S. 164.

7 Herbert Stachowiak: *Allgemeine Modelltheorie*, Wien, New York 1973.

1. *Maßstabsgetreue Modelle (scale models)*, zum Beispiel Verkleinerungen oder Vergrößerungen eines Gegenstandes, Simulationen, Zeitraffer/Zeitlupe. Black versteht diese im Anschluss an Peirce als Ikonen. Egal ob größer, oder kleiner – sie sagen: Dies ist, wie das Original ist. Sie reproduzieren dazu ausgewählte Eigenschaften des Originals.

2. *Analoge Modelle (analogue models)*. Sie beinhalten einen Wechsel des Mediums (*change of medium*), Beispiele sind hydraulische Modelle der Ökonomie und elektrische Schaltkreise in Computern. Blacks Definition lautet: Ein Prozess, ein materielles Objekt, ein System, das so getreu wie möglich in einem neuen Medium die Struktur oder das Netz von Relationen zum Original nachbildet.⁸ Dominantes Prinzip ist die Isomorphie. Analoge Modelle sind nur auf einer höheren Abstraktionsebene ikonisch. Sie kreieren zwar plausible Hypothesen, können aber keine eindeutigen Beweise liefern.

3. *Mathematische Modelle*, deren Benennung für Black oft nur eine Chiffre für »Theorie« oder die »mathematische Behandlung« eines Problems darstellt. Sie analysieren – oft unter drastischen Vereinfachungen – die globalen Eigenschaften eines durch sie konstruierten mathematischen Systems. Im Gegensatz zu theoretischen Modellen zeichnen sie sich nach Ansicht Blacks durch ihre »Unfähigkeit« zu Erklärungen aus.⁹

4. *Rein theoretische Modelle*, die entweder auf der Grundannahme eines *als wenn (as if)* oder eines *als wäre (as being)* beruhen. *Als wenn (as if)* durchzieht die Logik von Modellen, die bewusste heuristische Fiktion sind. Ein Beispiel wäre Maxwells Darstellung eines elektrischen Kraftfelds aufgrund der vermuteten Eigenschaften eines imaginären inkompressiblen Fluids. »Das imaginäre Medium ist hier nur noch eine Gedächtnishilfe zur Erfassung mathematischer Beziehungen.«¹⁰ Physikalische Modelle nach der Vorgabe eines *as being* besitzen hingegen eine stark existentielle Komponente. Kelvins mechanische Modelle, Rutherford's und Bohrs Atommodelle beschreiben ihren Gegenstand, wie er ist (*as it is*).¹¹

8 Im Original: »Some material object, system or process designed to reproduce as faithfully as possible in some new medium the structure or web of relationships in an original.«

9 Wenn es eine Schwachstelle in Blacks Theorie gibt, dann ist es diese Form der Abwertung von mathematischen Modellen und damit mittelbar auch von Simulationsprozessen. Mit Jürgen Mittelstraß kann man hingegen davon ausgehen, dass logisch-mathematische Modelle notwendiger Bestandteil metamathematischer Untersuchungen sind. Siehe Jürgen Mittelstraß: »Anmerkungen zum Modellbegriff«. In: Modelle des Denkens. Streitgespräch in der wissenschaftlichen Sitzung der Versammlung der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften am 12. Dezember 2003. Berlin 2005, S. 65–67; hier S. 66.

10 Paul Ricœur: Die lebendige Metapher, [Paris 1975], übers. von Rainer Rochlitz, München 1991, S. 229.

11 Max Black: Models and Metaphors. Studies in Language and Philosophy, Ithaca, New York 1962, S. 221f. Blacks Kategorien finden sich mit Ergänzungen und Modifikationen in vielen weiteren Beiträgen zur Modelltheorie wieder. Siehe hierzu exemplarisch die Unterteilung bei Mittelstraß 2005 (wie Anm. 9). Ein historischer Überblick der englischsprachigen Modelltheorie findet sich bei Margaret Morrison, Mary S. Morgan: »Introduction«. In: dies. (Hg.): Models as Mediators. Perspectives on Natural and Social Science, Cambridge 1999, S. 1–9.

Die Wissens- und Mediengeschichte der Netze hat es mit allen vier Arten von Modellen zu tun. Sie verdanken sich weniger einer Logik der Beweisführung als spielerisch zu verstehenden Prozessen von Entwurf und Entdeckung.

Es gibt neben den Gedanken Blacks mehrere jüngere Versuche, Modelltheorie neu zu denken. Margaret Morrison und Mary S. Morgan haben hauptsächlich den autonomen Charakter von Modellen betont. Weder pure Theorie noch rein aus Daten bestehend, erlauben sie eine fortwährende, wissensgenerierende Vermittlung zwischen Theorie und Welt.¹² Visuelle Aspekte werden hier – mit einem Hauch von Neoplatonismus – vor allem als Repräsentation von Welt und Theorie verstanden. Die Beiträge in Nick Hopwoods und Soraya de Chadarevians vorzüglichem Sammelband *Models. The Third Dimension of Science* analysieren hingegen allesamt die Überkreuzungen und Wahlverwandtschaften zwischen materiellen dreidimensionalen Modellen, Zeichnungen, Drucken und Simulationen.¹³ Ein vergleichbares Interesse an der materiellen wie epistemischen Transformation von Modellen im Medienwechsel findet sich auch im deutschsprachigen Diskurs über Theorie und Geschichte der Kulturtechniken. Bernd Mahr hat ausgehend von architektonischen Messtechniken bei Vitruv (bei dem *modulus* das Grundmaß als Referenzgröße zur Symmetriebildung bezeichnet) und den Entwürfen der ersten gitterförmig gerasterten Stadtpläne einen janusköpfigen, dynamischen Begriff des Modells entwickelt. Es ist »als Mittel zugleich Träger von etwas, das es mit der Anwendung auf etwas überträgt.«¹⁴ – Modelle erzeugen also, was sie erkennen. Dieser performative Prozess ist freilich nicht ohne eine doppelte Referenz. Sie sind im Sinne Mahrs immer gleichzeitig Modelle *von* und Modelle *für* etwas. Man wird allerdings gerade im Fall visueller Modelle nach den Anteilen und Gehalten beider Aspekte fragen müssen. Meiner Meinung nach bleibt damit auch die Frage nach dem Verhältnis der jeweiligen Statik und Dynamik von Modellen offen, das als Widerstreit zwischen Graphematik und Ikonizität zumindest für Diagramme immer im Raum steht. Man könnte also, mit Goodmans Kritik im Hinterkopf, an Black und Mahr anknüpfen. Dabei bliebe aber ein Phänomen unbeachtet, das wie kaum ein zweites die aktuelle Computerkultur, aber auch historische Beispiele bestimmt: die Simulation als neue, dominante Form der Modellierung. Virtuelle visuelle Prozesse kannibalisieren in diesem Rahmen vielleicht das klassische Modellieren, wie es noch bei Max Black kategorisiert wird. Peter Galison hat die aktuellen Praktiken der Simulation allerdings nüchtern als etwas neues, »Drittes« gegenüber den wissenschaftlichen Basisoperationen Theorie und Experiment gefasst.¹⁵ Für eine

12 Margaret Morrison, Mary S. Morgan: »Models as Mediating Instruments«. In: ders.: »Introduction«, S. 10–37; hier S. 10f.

13 Soraya de Chadarevian, Nick Hopwood (Hg.): *Models. The Third Dimension of Science*, Stanford 2004.

14 Bernd Mahr: »Modellieren. Beobachtungen und Gedanken zur Geschichte des Modellbegriffs«. In: Sybille Krämer, Horst Bredekamp (Hg.): *Bild – Schrift – Zahl*, München 2003, S. 59–86; hier S. 65. Siehe auch Bernd Mahrs Beitrag in diesem Band.

15 Peter Galison: »Images of Objectivity«. Helmholtz-Vorlesung, Humboldt-Universität zu Berlin, 20. Januar 2005.

derartige Gelassenheit möchte ich auch plädieren, wenn auch mit einem wachen Blick für die rapide Virtualisierung von Entwurfsprozessen im Computerzeitalter.

Vandermonde, Hamilton und das Spiel mit dem Graph

Schon Leonhard Eulers Behandlung des Wegeproblems der sieben Brücken von Königsberg aus dem Jahr 1736 verdankt sich einer mathematischen Modellierung, die räumliche Verbindungen simuliert. Ohne selbst zu Fuß der Frage nachzugehen, ob man einen Spaziergang über die Pregel-Querungen absolvieren kann, der jede Brücke nur einmal benutzt, formalisiert Euler die städtischen Wege als Buchstabenkombinationen. Seine klare Antwort – es kann keinen solchen Spaziergang geben – gilt mitsamt den weiteren durchgespielten Wegeszenarien bis heute als Begründung der Graphentheorie.¹⁶ Ich lasse sie hier mit Bedacht außer acht. Dies liegt nicht nur an der Tatsache, dass mit dem Bau einer achten Brücke im Jahr 1905 die städtische Topologie Königsbergs bis zu den Verheerungen des Zweiten Weltkriegs ununterbrochene Flaneurie erlaubte. Aufgrund der Popularität von Eulers Lösung – sowohl für Geschichten der Mathematik und Informatik wie auch als wortwörtliche im Internet tradierte *urban legend* – wird gerne übersehen, dass Eulers Modellierung im Original keinen topologischen Graphen zu Papier bringt (siehe Abb. 3 im Beitrag von Bernd Mahr, S. 25 in diesem Band).

Nichtsdestotrotz ist Leonhard Euler einer der großen Anreger des formellen Umgangs mit Wege- und Streckenproblemen. Mathemathikhistorisch bedeutender als der Zeitvertreib mit der ›Geometrie der Lage‹ des nie besuchten Königsbergs ist sein Polyedersatz, bei dessen nächtlichen Ausschwitzen sich Euler selbst dieses Problems seiner wissenschaftlichen Jugend erinnert. Wichtig wurde in diesem Zusammenhang ein 1759 entstandener kleiner Text zu einem alten Problem: dem Weg des Springers über ein Schachbrett.¹⁷ Während Euler das Problem unter anderem mittels eines elegant abstrahierten Spielfelds löst (Abb. 1), geht der französische Mathematiker Alexandre-Théophile Vandermonde zwölf Jahre später anders vor. Unter Bezug auf Euler nimmt dieser für sich in Anspruch, das Problem rein arithmetisch zu lösen, kreierte aber im Ende eine ganz eigene Bildlichkeit. Vandermondes *Remarques sur les problèmes de situation* (1771) sind aber noch aus einem anderen Grund interessant, der mit den beigegebenen Kupferstichen

16 Leonhard Euler: »Das Königsberger Brückenproblem«. In: ders.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe, Leipzig 1986, S. 290–301. Siehe zu den Hintergründen Wladimir Velminski: »Zwischen Gedankenbrücken und Erfindungsufeln. Leonhard Eulers Poetologie des Raums«. In: Stephan Günzel (Hg.): Topologie. Zur Raumbeschreibung in den Kultur- und Medienwissenschaften, Bielefeld 2007, S. 171–182.

17 Leonhard Euler: »Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse«. In: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 1759, Berlin 1766, S. 310–337.

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	45	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

Abb. 1: Leonhard Eulers Rösselsprung-Schachbrett (1766).

korrespondiert. Es ist meines Wissens nach das erste neuzeitliche mathematische Traktat, das aktiv eine explizite Netz(werk)-Metaphorik einführt. Vandermonde formuliert: Egal wie sich mehrere gewundene Fäden im Raum zueinander verhalten, ihre absolute messbare Lage ist für den Arbeiter, der flicht und ein Netzwerk mit Knoten herstellt, irrelevant. Er stellt es nicht nach Größenmaßstäben her, sondern nach der Lage: Was er *sieht*, sei die Ordnung der miteinander verwobenen Fäden («ce qu'il y voit, c'est l'ordre dans lequel sont entrelacés les fils»). Ein Kalkül, eine Notationsform hätte sich an diesem – wie man heute sagen würde – *tacit knowledge* des Arbeiters zu orientieren.¹⁸

Diese Vorgabe setzt Vandermonde dann tatsächlich um, in dem er sowohl zwei- wie dreidimensional Koordinaten zuweist (Abb. 2, Figur 1 und 2). So bildet er nicht nur arithmetische Reihen als Wege, sondern modelliert auch textile Geflechte zu einer visuellen Mathematik der Knoten. In der Überschneidung selbst ist allerdings kein materieller Knoten gegeben. Die unscharfe zählende Notation schafft in diesem Fall den Knoten erst (Abb. 3). Unter diesen notationalen Bedingungen wird auch das Rösselsprung-Problem erneut gelöst. Wenn der Springer alle 64 Felder hintereinander symmetrisch durchlaufen soll, müssen die Zahlen 8 und 1; 7 und 2; 6 und 3; 5 und 4 (und umgekehrt) austauschbar sein. Die arithmetische Lösung beruht darauf, dass anhand der Koordinaten immer entweder 2/1 oder 1/2 addiert oder subtrahiert wird. Als ikonische Materialisation

18 Alexandre Théophile Vandermonde: »Remarques sur les problèmes de situation«. In: Mémoires de l'Académie Royale 1771, Paris 1774, S. 566–574; hier S. 566. Zum Begriff des impliziten Wissens siehe grundlegend Michael Polanyi: Implizites Wissen, [Garden City, N. Y. 1966], übers. von Horst Brühmann, Frankfurt am Main 1985.

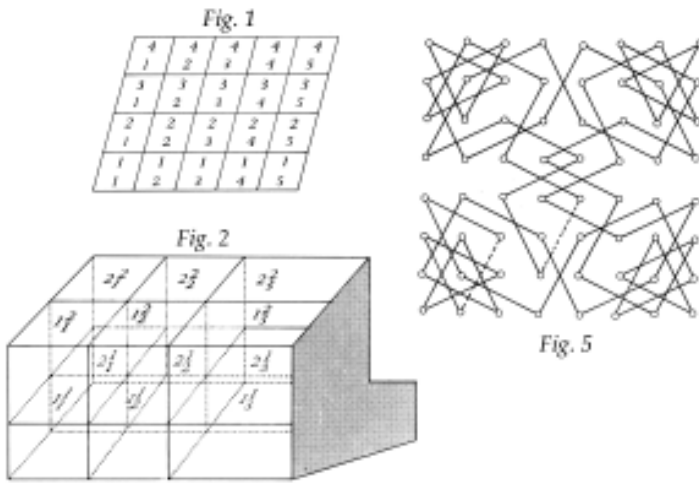


Abb. 2: Vandermondes Topologie, Netzwerkgraph von Schachzügen (1771).

repräsentiert dieser symmetrische Weg am Ende das, was später im Jargon der Graphentheorie zum einen ›endlicher Graph‹, zum anderen ›Hamilton-Kreis‹ genannt werden wird (Abb. 2, Figur 5). Innerhalb der langen Reihe von Lösungen dieses mathematischen Problems seit dem Mittelalter zeigt Vandermondes Illustration erstmals eine abstrakte Darstellung, die den Raum des materiellen Schachbretts durch einen Graphen ersetzt. Diese Form von epistemischem Kreisverkehr ist eher ein Modell *von* etwas, dessen bildlicher Gehalt sich erst durch das Aufschreibesystem selbst zu realisieren scheint – und dann eine Figur produziert, der das Schachbrett als Grund abhandeln gekommen ist. Einerseits ist die visuelle räumliche Analyse grundlegend, andererseits unterschätzt man die graphische Repräsentation, wenn man sie eher als Nebeneffekt der arithmetischen Notation betrachtet.

Graphentheoretische Praktiken zeichnen sich bis in die Gegenwart hinein durch ein solches Spannungsverhältnis von Bild, Weg und Kalkül aus. Ein spiel- wie wissenschaftshistorisches Beispiel für die dabei unternommene drei- und zweidimensionale visuelle Modellierung ist ein durch den englischen Mathematiker William Rowan Hamilton in den Jahren 1856 bis 1859 entwickeltes Spiel. Dessen Name – *Icosian Game* – spielt auf die 20 Punkte des hölzernen Dodekaeders an, der die Grundlage für einen der größten finanziellen Misserfolge der viktorianischen Spieleindustrie lieferte. Während die Ansicht eines der vier erhaltenen Exemplare (Abb. 4) ein vergleichsweise harmloses Barrikade-Spiel vermuten lässt, ist die von Hamilton selbst geschriebene Anleitung eine wenig verkaufsfördernde Einladung zum Kopfzerbrechen. Entweder müssen alle zwanzig Spielsteine des *Icosian Game* auf dem Brett platziert werden oder aber nur eine Auswahl. Es gilt stets, entlang der Linie eine kreisförmige oder nicht-kreisförmige Verbindung zu finden. So kann Spieler 1 zum Beispiel fünf Positionen vorgeben und

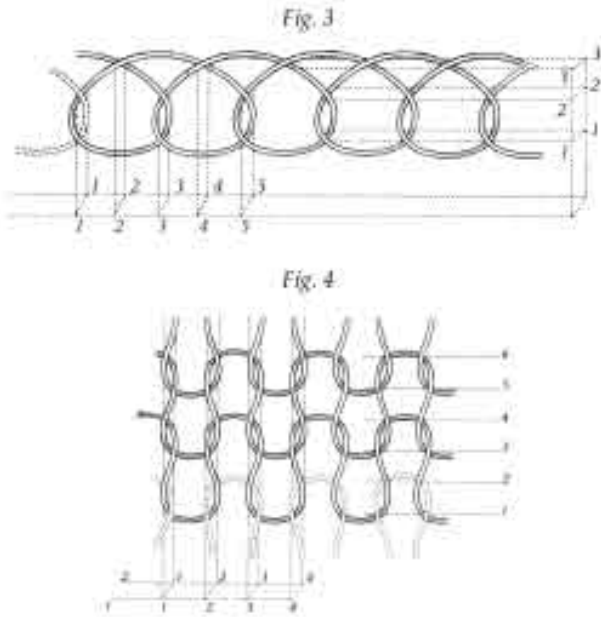


Abb. 3: Visuelle Mathematik der Knoten bei Vandermonde.

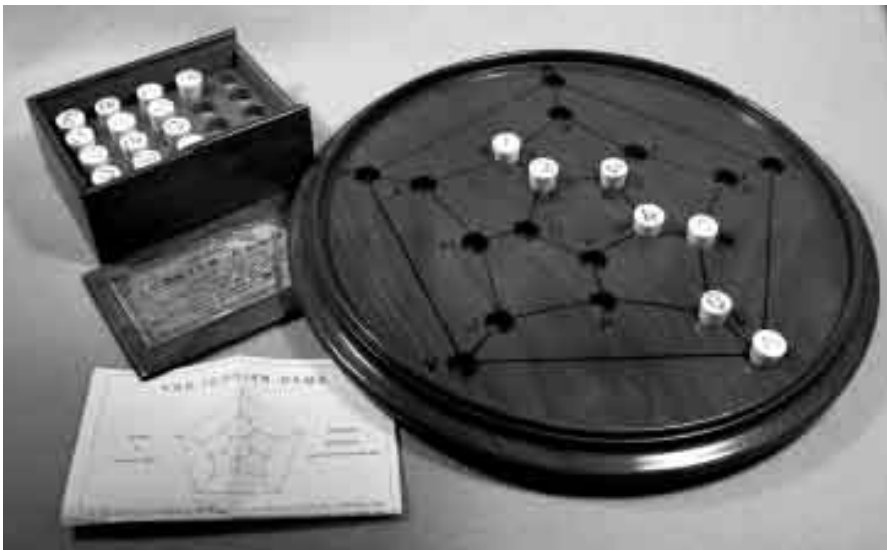


Abb. 4: Ausstattung und Spielanleitung des Icosian Game (1856–1859). Siehe auch Farbtafel V.



Abb. 5: William Rowan Hamiltons
The Traveller's Dodecahedron.
Siehe auch Farbtafel V.

Spieler 2 hat dann, informiert durch den Sadismus eines der größten viktorianischen Mathematiker, die restlichen fünfzehn Steine so zu setzen, dass sie einen sich selbst schließenden Kreis ergeben. Die Buchstaben können dabei alphabetisch oder nicht alphabetisch durchlaufen werden oder aber alternativ vom Gegenspieler als Endpunkt vorgegeben werden.

Gesetzt den Fall, dass es sich hier um ein visuelles Modell handelt: Womit hat man es zu tun? Ist es ein rein theoretisch-heuristisches Modell *as if*, als ob? Aber *wofür* wäre es dann? Man könnte mit Recht sagen, dass man es mit einem Modell zum etwas frivolen mathematischen Zeitvertreib zu tun hat. Hamilton war außerordentlich stolz auf sein Spiel, weil er in ihm seine Gedanken zur nicht-kommutativen Algebra repräsentiert sah. Nicht-kommutativ heißt: $X \text{ mal } Y$ ist nicht $Y \text{ mal } X$, insofern man mittels gewitztem Einsatz von Exponenten einige Tricks anstellt. Dies wird auch ausdrücklich in den *Hints on the Icosian Calculus* der lithographierten Spielanleitung erläutert. Aber es geht uns wie den wenigen Käufern des Spiels: Was sollen wir mit einem solchen ›fremden Ding‹¹⁹ anfangen, außer eben mit ihm Spaß zu haben? Die algorithmischen Anweisungen zur Manipulation einer Linie geben schon eher einen Hinweis auf die Programmierbarkeit des *Icosian Game*. Hamilton definiert hierzu Operationen, die den Zustand einer Linie verändern helfen. Dazu gehören ihre Umkehrung (BC zu CB), ihre Wende um einen finalen Punkt (BC zu DC) und noch wesentlich komplexere Spielhandlungs-Anweisungen.

Johann Huizinga hat das Rätsel und den Rätselkampf als eine der fundamentalen, kulturstiftenden Formen im Verhältnis von Spiel und Wissen gefasst.²⁰ Befragt man Hamiltons für 25 Pfund an Jaques & Son verkaufte Spielidee unter diesem agonalen Aspekt, verrät sie genau zwei Sachverhalte nicht. Zum einen

19 Siehe zur Kulturtheorie und Kulturgeschichte ›fremder Dinge‹ Heft 1 der Zeitschrift für Kulturwissenschaften, Bielefeld 2007.

20 Johann Huizinga: *Homo ludens. Vom Ursprung der Kultur im Spiel*, [Haarlem 1938], übers. von H. Nachod, Frankfurt am Main 2004, S. 119f.

hatte der englische Mathematiker Thomas Penyngton Kirkman bereits 1856 eine umfassendere Lösung des Problems der Hamilton-Kreise veröffentlicht. Zum anderen entbirgt der – aus welchen Gründen auch immer – produzierte Nachfolger des Spiels, durch welche Form von Wissen in Latenz sich die Geschichte der Graphentheorie vor den 1930er Jahren auszeichnet (Abb. 5).

The Traveller's Dodecahedron kommt nicht mehr mit einem variablen Set von Spielsteinen und der Aufforderung zum Rätselkampf, sondern benennt im Untertitel *A Voyage Round the World* das Ziel des Wettkampfs mit sich selbst. Von Brüssel bis nach Zanzibar geht der koloniale Trip in allen Varianten, mehr als ein Jahrzehnt bevor Jules Verne 1873 Phileas Fogg in achtzig Tagen um die Welt reisen lässt. In diesem, im Sinne Max Blacks analogen visuellen Modell sind es maximal zwanzig Knoten, zwischen denen die ganz textil mittels eines Bandes zu legende Reiseroute zu verbinden ist. Zusammen gesehen, sind beide Spiele vor allem Modelle für etwas. Sie sind, kurz gesagt, frühe – offenbar noch nicht geschäftsreife – operative Routenplaner ohne GPS-Funktion. Wer heute Autonavigationssysteme benutzt oder im Internet Bahnverbindungen sucht, spielt ein ernstes Hamiltonsches Spiel um durchzuziehende Linien, bei dem der Gegner bestimmt, an welcher Stelle die Blockadesteine stehen.

Graphen können alles. Sylvesters Traum und Peirces Wahn

Die medialen Eigenschaften des Spiels erlauben – um mit Natascha Adamowsky zu sprechen – die Organisation von Abstraktion. Spielerfindung ist geradezu ein Prototyp der Modellgebung, so dass umgekehrt auch jedes Modell in gewisser Weise als ein ludischer Entwurf verstanden werden kann.²¹ Für aufstrebende ›ernste‹ Wissenschaften stellt eine solche Verbindung aber – vermeintlich – ein nicht zu unterschätzendes Risiko dar. So bringt die vorsichtige Einführung dreidimensionaler Atommodelle in der Chemie der 1860er Jahre Kollegenspott und Ausbildungsprobleme mit sich. Nicht ganz zu unrecht fürchteten die in England praktizierenden Chemiker die Assoziation von Kinderbaukasten und Steckmodell. Im Falle der ersten öffentlichen Vorlesungen – gehalten durch den deutschen Chemiker August Wilhelm Hofmann 1865 in London – waren Tischkrocket-Sets das bevorzugte Bastelmaterial für die dreidimensionalen Atom-Skulpturen.²²

Als didaktische Hilfsmittel in der Lehre sollten diese von vorneherein nicht mimetisch den Bau der realen atomaren Verbindungen darstellen, sondern vor allem deren Relationen anschaulich modellieren. Derart plastische Modelle bleiben aber umstritten, während man in der zweidimensionalen chemischen Notation

21 Natascha Adamowsky: »Spiel und Wissenschaftskultur. Eine Anleitung«. In: dies. (Hg.): »Die Vernunft ist mir noch nicht begegnet«. Zum konstitutiven Verhältnis von Spiel und Erkenntnis, Bielefeld 2005, S. 11–30; hier S. 14f.

22 Hofmann hat selbst wiederholt für die »Anschaulichkeit« in der akademischen Ausbildung plädiert. Siehe hierzu Christoph Meinel: »Molecules and Croquet Balls«. In: de Chadarevian, Hopwood 2004 (wie Anm. 13), S. 242–275.

der sogenannten ›Chemicographen‹ *peu à peu* Standards etabliert. Innerhalb dieses *iconic turn* der Chemie findet sich eine Eulers Königsberg-Etüde vergleichbare prominente Gründungsszene: Alexander Kekulé's berühmte Visionen chemischer Strukturen. Kekulé's Erzählungen wirken nach wie vor als Ursprungslegende der atomaren Notation und sind gewissermaßen Teil einer rhetorischen Figur der chemischen Verbindungen schlechthin. Dem bekanntesten Traum, der mit der Imagination des Benzolrings und dessen abwechselnden Einzel- und Doppelbindungen zugleich das alte Symbol der Weltenschlange Ouroboros aufruft, hat Thomas Pynchon in *Gravity's Rainbow* (1973) ein literarisches Denkmal gesetzt: »Young ex-architect Kekulé went on looking among the molecules of the time for the hidden shapes he knew were there, shapes he did not think of as real physical structures, but as ›rational formulas‹ showing the relationships that went on in ›metamorphoses,‹ his quaint 19th century way of saying ›chemical reactions‹. But he could visualize. He *saw* the four bonds of carbon, lying in a tetrahedron – he *showed* how carbon atoms could link up, one to another, into long chains (...) But he was stumped when he got to benzene. He knew there were six carbon atoms with a hydrogen attached to each one – but he could not see the shape. Not until the dream (...). Kekulé dreams the Great Serpent holding its own tail in its mouth, the dreaming Serpent which surrounds the world.«²³

Auch der amerikanische Mathematiker James Joseph Sylvester (1814–1897) eröffnet seine der neuen Atomtheorie Kekulé's gewidmeten, 1878 erscheinenden Gedanken zur Konvergenz von chemischem und mathematischem Aufschreibesystem mit einer gut freudianischen Bettgeschichte. Während Sylvester Gedanken nachgeht, mit denen ein Mathematiker Chemie, Physik und Biologie zusammenbringen kann, ergibt sich die Visualisierung der Algebra quasi wie von selbst, nämlich als imaginiertes visuelles Modell: »(...) I was agreeably surprised to find, of a sudden, distinctly pictured on my mental retina a chemicographical image serving to embody and illustrate the relations of these derived algebraical forms to their primitives and to each other (...).«²⁴

Während der Chemiker Kekulé über ein Traumbild zum Modell gelangt, erschließt sich dem Mathematiker Sylvester im Liegen, wie er seine Algebraisierung der Elemente ins Visuelle übertragen kann. Die Grapheme scheinen also erneut der Ikonizität vorgängig zu sein. Man könnte sagen, dass die möglichst ›naturbelassenen‹ »Bilder der Objektivität« des 19. Jahrhunderts, deren Bedeutung Lorraine Daston und Peter Galison eindrucksvoll gezeigt haben,²⁵ hier invers hergestellt werden. Indem Sylvester mathematische Substitutionen auf freie Radikale

23 Thomas Pynchon: *Gravity's Rainbow*, [London 1973], London 2000, S. 489.

24 James Joseph Sylvester: »On an Application of the New Atomic Theory to the Graphical Representation of the Invariants and Covariants of Binary Quantics«. In: *American Journal of Mathematics* 1 (1878), S. 64–104; hier S. 64.

25 Lorraine Daston, Peter Galison: »Das Bild der Objektivität«. In: Peter Geimer (Hg.): *Ordnungen der Sichtbarkeit. Fotografie in Wissenschaft, Kunst und Technologie*, Frankfurt am Main 2002, S. 29–99.

Plate I.

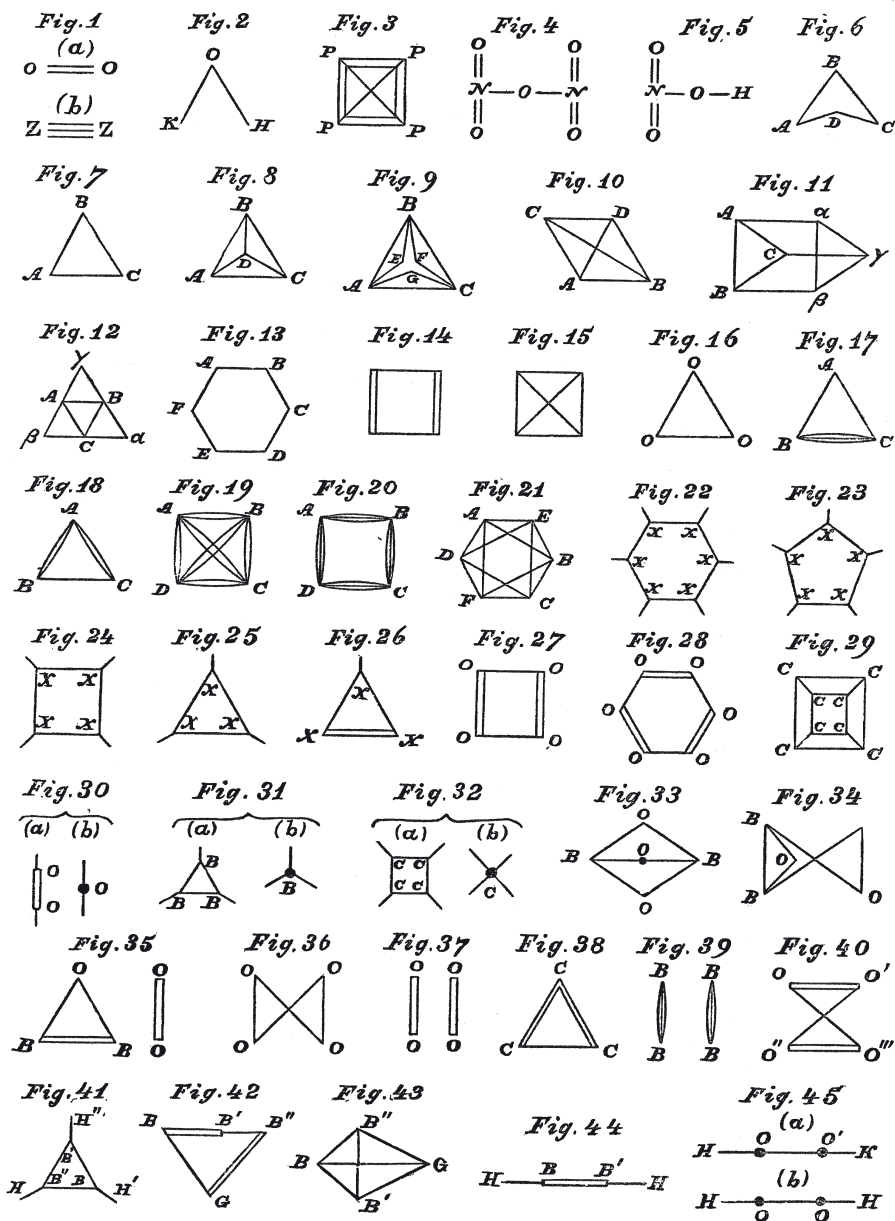


Abb. 6: Katalog der chemischen Elemente bei James Joseph Sylvester (1878).

– diejenigen Molekülteile, die mit anderen Stoffen Verbindungen eingehen – projiziert, wendet er mathematische Substitutionen auf chemische Elemente an. Resultat dieses Prozesses ist ein Warenhauskatalog²⁶ chemischer Verbindungen, auf dessen Bestandteile ich gleich zurückkommen werde (Abb. 6). Die Natur schreibt sich bei Sylvester nicht selbst, sondern erträumtes mathematisches Modellieren *für* etwas bringt diagrammatische Strukturen hervor.

Sylvesters mathematische Annäherungen sind Teil einer fortwährenden Unsicherheit über das Unsichtbare der stofflichen Verbindungen. Die von Jöns Jacob Berzelius ab 1813 eingeführte algebraische Notation²⁷ braucht seit Ende der 1850er Jahre zusätzlich einen ins Ikonische erweiterten Raum der Zeichnung. Für die Darstellung von Valenzen – den offenen Bindungsmöglichkeiten – arbeiten schottische und englische Chemiker wie Alexander Crum Brown und Edward Frankland zwischen 1864 und 1866 an einer Vereinheitlichung des Systems der sogenannten *Graphic Notation*. Brown gibt dabei 1864 visuell über die Isomerie Auskunft, bei der verschiedene Stoffe die gleiche Buchstabennotation haben können, aber eine unterschiedliche Strukturformel zur Darstellung benötigen. Frankland schärft dabei in den 1865 und 1866 verfassten *Lecture Notes for Chemical Students* seinen Eleven ein, dass die Darstellungen weder die Form der Moleküle repräsentieren noch die relative Position der Moleküle. Es gehe einzig und allein um die Verbindungen.²⁸ Man hat es also wiederum mit einem theoretischen Modell zu tun, das in Korrespondenz mit der experimentellen Praxis steht.

Man sollte nun meinen, dass Sylvester problemlos auf die Erfahrungen der chemischen Praxis zurück greifen kann. Seine Verkürzung des Worts »Chemigraph« zu einem einfachen »Graph« in einem *Nature*-Artikel im Februar 1878²⁹ wird tatsächlich zu einem Standard, auch wenn sich seine Kombination von Algebra und Chemie auf lange Sicht nicht durchsetzt. Das macht die Bildtafel seiner Anwendung von Atomtheorie zu einem Monument von Wissen in der Vorform des Scheiterns.³⁰ Sie schöpft noch einmal in der für das »Bild der Objektivität« so typischen Katalogform die verschiedenen Möglichkeiten der Notation aus, angefangen mit der etablierten Schreibweise der Mehrfachbindungen (siehe Figur 1 in Abb. 6). Ab Figur 6 verlässt Sylvester in den meisten Fällen die »konkrete« Ebene der atomaren Bindungen zugunsten einer geometrischen Darstellung. Diese folgt nicht nur etablierten Bildformen platonischer Körper, sie enthält neben Traditionen hermetischer Ikonographie auch den Kern von Sylvesters mathematischer

26 Herzlichen Dank an Philipp Ekardt für diesen Gedanken.

27 Siehe hierzu Ursula Klein: »Visualität, Ikonizität, Manipulierbarkeit: Chemische Formeln als Paper Tools«. In: Gernot Grube, Werner Kogge, Sybille Krämer (Hg.): Schrift. Kulturtechnik zwischen Auge, Hand und Maschine, München 2005, S. 237–251 und Martin Quack: Modelle in der Chemie. In: Modelle des Denkens 2005 (wie Anm. 9), S. 21–33.

28 Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, Robin J. Wilson (Hg.): Graph Theory 1736–1936, Oxford ²1977, S. 59.

29 Ebd., S. 65f.

30 Siehe dazu Markus Krajewski (Hg.): Projektemacher. Zur Produktion von Wissen in der Vorform des Scheiterns, Berlin 2004.

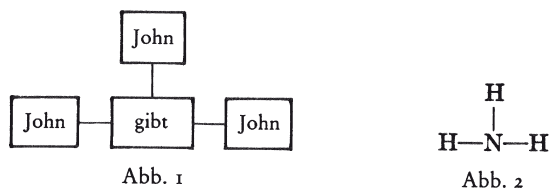


Abb. 7: Charles Saunders Peirce: Analogie zwischen logischer und chemischer Notation (1897).

Atomtheorie. Entscheidend für die Generierung der Bildebene ist dabei ein Denken von Kovarianz und Invarianz. Während Kovarianz die Veränderung durch Transformationen beschreibt, definiert Invarianz dasjenige, was auch beim Wandel der Formel beziehungsweise des Stoffes gleich bleibt. Die Frage nach der (Nicht-)Veränderbarkeit betrifft die chemische auf drei Ebenen: rein mathematisch, chemisch-algebraisch und visuell.

Graphematik und Ikonizität befinden sich so in einem Widerstreit – die Transformation einer Formel führt zu einer neuen Formel, die die ihr invarianten Teile behält. Mit der Metamorphose eines Diagramms von Stoffverbindungen wird nicht nur die Renotation des veränderlichen Teils erforderlich, sondern eine komplette Neukomposition des Graphen nötig.³¹ Der Mehraufwand kann aber auch gleichzeitig den epistemischen Mehrwert generieren, insbesondere im Fall eines graphischen Beweises der »true representation«.³² Während Figur 17 ein falscher Graph der Verbindung von drei Stickstoffatomen ist, stellt Figur 18 diese laut Sylvester angemessen dar. Wie alle zeitgenössischen Chemiker legt er Wert darauf, dass die Chemicographen keinesfalls das Reale des Stoffes zeigen. Ihre Nützlichkeit besteht vielmehr im »graphical proof« der relationalen Struktur von Molekülen. Ein gutes Beispiel hierfür ist die Gegenüberstellung von ausführlicher und geraffter geometrischer Darstellung der Bindungsmöglichkeiten in Figur 30 bis 32, welche den Sprung zu dreidimensionalen Atommodellen ahnen lässt.

Trotz aller fortwährenden Einschränkungen entwickeln sich (chemische) Graphen und dreidimensionale Atommodelle zu einem diagrammatischen Universalmodell. Charles Sanders Peirce – Geograph, Chemiker, Mathematiker, Logiker, Semiotiker und nebenbei einer der ersten Abonnenten des *American Mathematical Journal* – nimmt dabei eine Vorreiterrolle ein. Das steigende Vertrauen in eine Zeichenpraxis der topologischen Graphen erlaubt den Übertrag in andere Wissensgebiete, darunter auch die Formation der sprachlichen Logik (Abb. 7) und elektrische Schaltungen. Wolfgang Schäffner hat gezeigt, dass in Peirces *existential graphs* die diagrammatische Ikonizität der Graphen und ihre Mechanisierbarkeit

³¹ Sylvester 1878 (wie Anm. 24), S. 67, 73, 90f.

³² Ebd., S. 76.

ineinander übergehen. Sie sind nicht nur Zeichenkombinationen und Bildakte, sondern »operieren mit Aussagen, die im entsprechenden Diskursuniversum auch tatsächlich existieren.«³³ Peirce, der den Akt der Semiose ebenso geschickt mit Erweckungsszenarien beschreiben konnte wie seine Kollegen in der Chemie,³⁴ nimmt damit eine geradezu pathologische Bewegung vorweg, die die Wissensordnung des 20. und 21. Jahrhunderts nachhaltig prägen wird. Topologische Graphen können alles, insofern sie Verbindungen modellieren: Schaltkreise, Verkehrsnetze, politisches Handeln, soziale Zusammenhänge, biologische Nahrungsnetze, die Infrastruktur des Internet, Computer-Programme (Petri-Netze), Molekülstrukturen, feuernde Synapsen et cetera. Die Konjunktur des Netzwerkdiagramms in den Wissenschaften verdankt sich dabei der fortwährenden Überkreuzung von Berechenbarkeit und Ikonizität – Schreib- und Bildakt fallen in eins.

Spiel und Traum sind dabei wesentlich mehr als historisch gewordene Schattenseiten, die durch fortwährende Formalisierung zur Seite gedrängt werden. Graphen und Netzwerkdiagramme mögen, gerade aus epistemologischer Perspektive, als Pathosformel ohne Pathos erscheinen. Sie sind aber weitaus mehr, wenn man sie als Modelle begreift, die gleichzeitig Modell *von* und Modell *für* etwas sind. Modell *von* etwas werden Netzwerkdiagramme durch Kulturtechniken des Beobachtens und Messens, zum Beispiel von Daten- und Verkehrsströmen, dem Austausch zwischen Ökosystemen oder Migrationsbewegungen. Als Modell *für* etwas verleihen sie der Netzwerkgesellschaft nicht nur Möglichkeiten der Steuerung des »Raums der Ströme« (Manuel Castells), sondern vor allem eine diagrammatische Form der Selbstbeschreibung und Selbstreflektion.³⁵

33 Wolfgang Schäffner: »Electric Graphs. Charles Sanders Peirce und die Medien«. In: Michael Franz et al. (Hg.): *Electric Laokoon. Zeichen und Medien, von der Lochkarte zur Grammatologie*, Berlin 2007, S. 313–326; hier S. 322.

34 Charles Sanders Peirce: »What Is a Sign«. In: Peirce Edition Project (Hg.): *The Essential Peirce. Selected Philosophical Writings*, Bd. 2: 1893–1913, Bloomington 1998, S. 4–10; S. 4f.: »It is necessary to recognize three different states of mind. First, imagine a person in a dreamy state. Let us suppose he is thinking of nothing but a red color. (...) Second, imagine our dreamer suddenly to hear a loud and prolonged steam whistle. (...) Third, let us imagine that our now awakened dreamer, unable to shut out the piercing sound, jumps up (...).«

35 Siehe hierzu kritisch Niels Werber: »Netzwerkgesellschaft – Zur Kommunikationsgeschichte von ›technoiden‹ Selbstbeschreibungsforneln«. In: Lorenz Engell, Joseph Vogl, Bernhard Siegert (Hg.): *Kulturgeschichte als Mediengeschichte (oder vice versa?)*. In: *Archiv für Mediengeschichte* 6 (2006), S. 179–191 und Sebastian Gießmann: *Netze und Netzwerke. Archäologie einer Kulturtechnik 1740–1840*, Bielefeld 2006. Zu Techniken der vernetzten Steuerung siehe die Beiträge in Stefan Kaufmann (Hg.): *Vernetzte Steuerung. Soziale Prozesse im Zeitalter technischer Netzwerke*, Zürich 2007.

Ingeborg Reichle, Steffen Siegel, Achim Spelten (Hg.)

Visuelle Modelle

Wilhelm Fink

INHALT

INGEBORG REICHLER, STEFFEN SIEGEL, ACHIM SPELTEN Die Wirklichkeit visueller Modelle	9
--	---

I. BEGRIFF UND METAPHER

BERND MAHR Cargo. Zum Verhältnis von Bild und Modell	17
--	----

ACHIM SPELTEN Visuelle Aspekte von Modellen	41
--	----

SAMUEL STREHLE Evidenzkraft und Beherrschungsmacht. Bildwissenschaftliche und soziologische Zugänge zur Modellfunktion von Bildern	57
---	----

TOBIAS SCHLECHTRIEMEN Metaphern als Modelle. Zur Organismus-Metaphorik in der Soziologie	71
--	----

PHILIPP EKARDT Benjamins Bekleidungsmodelle. Strumpf und Rüsche als Topologien der Bildtheorie	85
--	----

II. EXPERIMENT UND WISSEN

REINHARD WENDLER Das Spiel mit Modellen. Eine methodische Verwandtschaft künstlerischer Werk- und molekularbiologischer Erkenntnisprozesse	101
---	-----

SEBASTIAN VINCENT GREVSMÜHL
Das modellierte Antlitz der Erde.
Zur Geschichte der Modellierungsstrategien
der Kontinentalverschiebung 117

CAROLIN ARTZ
Das Fotogramm als visuelles Modell?
Die Visualisierung nichtsichtbarer Strahlen
in wissenschaftlichen Fotografien um 1900 137

INGEBORG REICHLÉ
Lebendige Kunst oder Biologische Plastik?
Reiner Maria Matysiks Prototypenmodelle
postevolutionärer Organismen 155

FARBTAFLN

III. MAß UND RAUM

CATHARINA MANCHANDA
Modelle und Prototypen.
Ein Überblick 179

STEFFEN SIEGEL
Modell-Räume.
Architektur, Photographie, Topoklasmus 197

DER BLICK INS MODELL
Ein Gespräch mit Damaris Odenbach 215

KATRIN KÄTHE WENZEL
Brot und Bauten.
Drei künstlerische Experimente zu
verformbarer Architektur 225

STEFAN RIEKELES
Ikodynamische Kreuzfahrt.
Sichtbarkeit und Tarnung in einer Arbeit
von Knowbotic Research 241

IV. ZEIT UND STRUKTUR

ANNEMIEKE R. VERBOON

Einen alten Baum verpflanzt man nicht.

Die Metapher des Porphyrianischen

Baums im Mittelalter 251

SEBASTIAN GIEßMANN

Graphen können alles.

Visuelle Modellierung und Netzwerktheorie vor 1900 269

JENS GULDEN

Semantik in visuellen Modellen.

Räumliche Regularitäten und körperliche

Erfahrungsmuster als Bedeutungsträger visueller Modelle 285

INGE HINTERWALDNER

Simulationsmodelle.

Zur Verhältnisbestimmung von Modellierung und

Bildgebung in interaktiven Echtzeitsimulationen 301

Bildnachweise 317

Autorinnen und Autoren 319