

Werner Ebeling und  
Frank Schweitzer

## Zwischen Ordnung und Chaos. Komplexität und Ästhetik aus physikalischer Sicht

### Eine Mathematik der Ästhetik?

Über die Frage, ob sich das menschliche Empfinden für das Schöne oder die Kunst in irgendeiner Weise quantitativ fassen lässt, wird schon seit dem Altertum nachgedacht. Vor allem in der Renaissance erlebten die Versuche, quantitative Kriterien für das Schöne zu entwickeln, eine Blütezeit – wir erinnern zum Beispiel an Albrecht Dürer oder Leonardo da Vinci. Trotzdem ist auch heute die Meinung weit verbreitet, dass Ästhetik auf der einen und Mathematik/Naturwissenschaften auf der anderen Seite durchschnittsfremd sind. Andererseits sind aber Kunstwerke wie eine Bachfuge, ein Gemälde, ein Bauwerk oder eine Skulptur vor aller ästhetischer Bedeutung auch physikalische Objekte in ein, zwei oder drei Dimensionen. Es wäre natürlich naiv, anzunehmen, dass physikalische Charakteristika dieser Objekte wie Länge oder Masse eine direkte ästhetische Relevanz besäßen. Die Schönheit eines Gemäldes kann nicht anhand seiner Fläche ermittelt werden, auch wenn auf dem Flohmarkt häufig sein Preis danach bemessen wird. Stattdessen bestehen subtile Beziehungen zwischen der Komplexität eines Objektes und seiner ästhetischen Wirkung, die wir im Folgenden unter Aspekten der Informations- und der Komplexitätstheorie diskutieren wollen.

Am Anfang der Entwicklungen, die zu einer Verbindung von Informationstheorie und Ästhetik führten, standen die Arbeiten des Mathematikers G. D. Birkhoff *A Mathematical Approach to Aesthetics* (1931) und *A Mathematical Theory of Aesthetics* (1932), wobei in der zweiten Arbeit vor allem die Ästhetik musikalischer Kompositionen im Mittelpunkt steht. »Für Birkhoff ist das Fundamentalproblem der ästhetischen Wahrnehmung sehr eng gefaßt: Man untersuche alle ›auffindbaren ästhetischen Faktoren‹ einer Klasse (ästhetischer) Objekte und lege die (relative) Bedeutung dieser Invarianten dadurch fest, daß man ihnen gewisse Zahlenwerte zuordnet. [...] Das Problem liegt im Auffinden und Definieren geeigneter

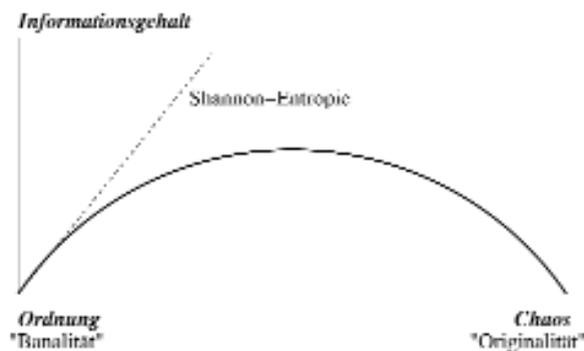
ästhetischer Faktoren. In der Birkhoffschen Theorie können nur solche Invarianzen berücksichtigt werden, die sich auf die Form der (ästhetischen) Objekte in einem allgemeinen Sinne beziehen.« (Rul Gunzenhäuser)

Für Birkhoff ist das ästhetische Empfinden bei der Wahrnehmung von Objekten bestimmt durch drei Größen, die er als Ordnung  $O$ , Komplexität  $C$  und ästhetisches Maß  $M$  bezeichnet. Die Komplexität  $C$  stellt ein Maß dar für die »Gesamtheit der Merkmale des wahrgenommenen Objektes«. In der sinnlichen Wahrnehmung wird diese Komplexität erfahrbar als Anstrengung der Sinnestätigkeit des Betrachters. Numerisch wird  $C$  bestimmt durch die Zeichenmenge, aus der das Objekt besteht, also bei gesprochenen Gedichten aus der Zahl der Silben bzw. Phoneme, beim Hören von Musik durch die Zahl der Töne usw.  $O$  repräsentiert die (mehr oder weniger verborgene) Ordnung eines Objektes, die für Birkhoff als notwendige Bedingung für das Auftreten eines »Gefühls des Gefallens am ästhetischen Objekt« angesehen wird. Diese Ordnung wird durch verschiedene Ordnungen – etwa in grafischen Objekten oder Reimen bei Gedichten – ausgedrückt.

Unter der Annahme, dass  $M$ ,  $O$  und  $C$  messbare Größen seien, postuliert Birkhoff das ästhetische Maß  $M$  formal als Quotienten von  $O$  und  $C$ :  $M = O/C$ . Nach Birkhoff reduziert die Komplexität das ästhetische Maß, während es durch Ordnung erhöht wird. Weiterhin wird deutlich, dass es für ein bestimmtes ästhetisches Maß eine Fülle von Realisierungsmöglichkeiten hinsichtlich der Komplexität gibt.

### Entropie als Ordnungsmaß

Vor der Anwendung des ästhetischen Maßes  $M = O/C$  stellt sich vor allem die Frage, wie die beiden zentralen Begriffe Ordnung ( $O$ ) und Komplexität ( $C$ ) quantitativ fassbar sind. Birkhoff selbst hat sein ästhetisches Maß unter anderem auf einfache geometrische Objekte (zum



Beispiel auf Vasenformen) angewandt, wo O und C durch Symmetrien charakterisiert werden. In Bereichen, die mit klar gegliederten geometrischen Formen zu tun haben, wie etwa der Architektur, hat sich dieses Maß in der Folgezeit auch als anregend erwiesen. Es stellt sich allerdings das Problem, wie Ordnung und Komplexität bei solchen Objekten quantifiziert werden können, die keineswegs mehr durch einfache geometrische Relationen beschreibbar sind, etwa Texte oder Musikstücke. Hier kommt uns die Physik zu Hilfe, die mit der Entropie ein fundamentales Maß zur Verfügung stellt, um (Un-)Ordnung und, wie wir sehen werden, auch Komplexität zu charakterisieren.

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ist die Entropie eine Zustandsgröße, die in einem abgeschlossenen System so lange ansteigt, bis der Maximalwert erreicht ist. Dieser Gleichgewichtswert entspricht einem Systemzustand mit der größten molekularen Unordnung. Der Abstand von diesem Gleichgewichtswert kann somit (für abgeschlossene Systeme) als ein Maß der im System vorhandenen Ordnung angesehen werden. In der statistischen Interpretation der Entropie, die erstmals von Boltzmann vorgenommen wurde, ist die Entropie gleichfalls ein Maß für die Wahrscheinlichkeit bzw. Unwahrscheinlichkeit des Auftretens von Ordnungs- und Unordnungszuständen. Die größte Wahrscheinlichkeit haben danach Zustände maximaler Unordnung (maximaler Entropie), während Zustände, die mit der Herausbildung eines Ordnungszustandes, also einer Verminderung der Entropie verbunden sind, nur eine vergleichsweise geringe Wahrscheinlichkeit haben und deshalb auch nicht spontan ablaufen.

Eng verwandt mit der statistischen Entropie ist die Informationsentropie, die ein Maß für die Unbestimmtheit in einem System darstellt – oder anders ausgedrückt: ein Maß für die Information, die man benötigen würde, um den Zustand eines Systems vollständig zu beschreiben. Unter bestimmten Umständen lässt sich eine Äquivalenz von statistischer und Informationsentropie zeigen, das heißt ein Zusammenhang zwischen Ordnung und Information, der insbesondere auch für Fragen der Vorhersagbarkeit eine große Rolle spielt.

Dieses informationstheoretische Entropie-Konzept wurde von Shannon entwickelt, der es bereits in seiner fundamentalen Arbeit *Prediction and Entropy of Printed English* (1951) auf literarische Produktionen anwandte, in denen er die Abfolge von Buchstaben analysierte. Diese

Untersuchungen wurden von Wilhelm Fucks in den 1950er und 1960er Jahren zu einer mathematischen Analyse von Sprachen, Sprachelementen und Sprachstil sowie von Formalstrukturen der Musik erweitert. Dazu hat Fucks bereits 1953 die Entropie als ein quantitatives Maß für die Stilcharakteristik in die Ästhetik eingeführt (und er stützte sich hierbei ausschließlich auf die Shannon'sche Informationstheorie): »Wenn man erst einmal ein Kunstwerk als geordnete Elementenmenge begriffen hat, ist es naheliegend, den Ordnungsgrad der Menge der Elemente formal genauso zu berechnen, wie man in der Physik Entropien berechnet.«

Auch der Philosoph Max Bense hat bei seiner Begründung einer »exakten Ästhetik« bereits 1956 auf die Beziehung zwischen der thermodynamischen Entropie und dem ästhetischen Prozess hingewiesen. Beim ästhetischen Prozess »entsteht aus dem Chaos der stochastischen Verteilung der Zeichenelemente eine Zeichenordnung«. Der damit verbundene Ordnungsgewinn lässt sich durch eine Abnahme der Entropie ausdrücken und wird bei Bense mit dem Begriff der Redundanz  $R$  beschrieben, während die Komplexität durch die Shannon'sche Informationsentropie ausgedrückt wird. Damit lassen sich für das ästhetische Maß  $M = O/C$  zwei Grenzfälle diskutieren (vgl. Abbildung): (1) Ordnung: In diesem Fall wird die als Ordnungsmaß verwendete Redundanz maximal, während die als Komplexitätsmaß verwendete Informationsentropie minimal wird, und  $M$  erreicht ein Maximum. (2) Chaos: In diesem Fall wird das Ordnungsmaß, die Redundanz, minimal, während die Komplexität, die Informationsentropie, maximal wird; entsprechend hat  $M$  ein Minimum.

Die Bewertung ästhetischer Wahrnehmungsprozesse bewegt sich also stets zwischen Ordnung und Chaos.

### Entropie als Komplexitätsmaß

Wie die Abbildung verdeutlicht, werden durch Birkhoffs ästhetisches Maß Ordnungszustände eindeutig ästhetisch höher bewertet, sofern man als Ordnungsmaß die Entropiedifferenz und als Komplexitätsmaß die Informationsentropie ansetzt. Dies wird aber durch empirische Untersuchungen so nicht bestätigt. Abraham Moles (1966) hat darauf hingewiesen, dass jede Botschaft, auch die ästhetische, eingeschlossen ist zwischen den Fällen perfekter Originalität, die nur mit einer gänzlich unvorhersehbaren und praktisch unverständlichen Zeichenfolge erreicht wird – dies entspricht dem Chaos-Grenzfall in der obi-



gen Unterscheidung –, und perfekter Banalität, die aus der vollständigen Redundanz der Botschaft entsteht und nichts Neues für den Empfänger bringt – dies entspricht dem Grenzfall der Ordnung. Allerdings wird bei Moles der Grenzfall der Banalität oder Ordnung aufgrund des zu geringen Neuigkeitswertes ebenso niedrig bewertet wie der Grenzfall der perfekten Originalität bzw. des Chaos. Nur zwischen diesen beiden Polen, das heißt, wenn es dem Betrachter ermöglicht wird, durch ein Mindestmaß an Strukturierung die dargebotene Information auch auszuschöpfen, nimmt der ästhetische Wert ein Maximum an.

Die Konsequenz dieser Betrachtung lautet also: Das Ästhetische, das Schöne findet sich auf der Grenze zwischen Ordnung und Chaos. Um auch ein Maximum des ästhetischen Maßes  $M$  in diesem Bereich zu finden, muss man allerdings ein anderes Komplexitätsmaß als die Shannon'sche Informationsentropie verwenden, denn diese hat ja wie die Boltzmann'sche Entropie ihr Maximum bei der totalen Unordnung. Damit stellt sich die Frage nach geeigneten Komplexitätsmaßen bzw. nach dem Begriff der Komplexität überhaupt.

Das Wort ›komplex‹ entstammt dem Lateinischen und bedeutet so viel wie ›Zusammengefasstes‹ oder ›Gesamtheit‹. Komplexe Systeme sind also Systeme aus vielen Einzelementen, die gemeinsam die reichhaltigen Eigenschaften des jeweiligen Gesamtsystems hervorbringen. Im Rahmen einer qualitativen Bestimmung kann man Systeme als komplex bezeichnen, wenn sie Ordnungsrelationen (oder langreichweitige Korrelationen) auf vielen (räumlichen und zeitlichen) Skalen aufweisen. Die Einsichten der modernen Naturwissenschaften haben in den vergangenen zwei Jahrzehnten zu einem fast inflationär gesteigerten Interesse an komplexen Systemen und am Begriff der Komplexität geführt. Nach intensiven Bemühungen bildet sich allerdings die Einsicht heraus, dass es ein eindeutiges und auf alle Systeme anwendbares Maß für Komplexität nicht gibt.

In unseren eigenen Untersuchungen haben wir uns daher vor allem konzentriert auf mögliche Erweiterungen des Konzeptes der Informationsentropie, um komplexe Strukturen charakterisieren zu können. Diese Größen werden als Entropien höherer Ordnung, bedingte Entropien oder dynamische Entropien bezeichnet; sie messen, ähnlich wie die Informationsentropie, die Unsicherheit bei der Vorhersage des ›nächsten Schrittes‹, also des nächsten Buchstaben in einem Text oder der nächsten

Note in einem Musikstück, allerdings unter Berücksichtigung der ›Vorgeschichte‹. Würde sich ein Text oder eine Melodie irgendwann wiederholen, dann könnte aus der Vorgeschichte der weitere Verlauf des Geschehens erschlossen werden, die Unsicherheit wäre also null – genau wie im Zustand der perfekten Ordnung. Der andere Grenzfall wären ein Text oder eine Melodie, die keinerlei Strukturen aufweisen, wo der nächste Buchstabe oder die nächste Note völlig zufällig auftauchen. In diesem chaotischen Regime wäre die Unsicherheit der Vorhersage immer konstant hoch.

Unsere Untersuchungen der bedingten Entropien von ›natürlichen‹ Sequenzen, zum Beispiel literarischen Texten, haben aber gezeigt, dass diese strukturell gerade so aufgebaut sind, dass sie weder vollkommen chaotisch noch vollkommen periodisch sind. Natürliche Sequenzen liegen also in der Abfolge ihrer ›Buchstaben‹ auf der Grenze zwischen Ordnung und Chaos – mit anderen Worten: zwischen Redundanz und Neuigkeit. Die strukturelle Information dieser natürlichen Sequenzen ist durch langreichweitige Korrelationen gekennzeichnet, das heißt, es sind noch Beziehungen zwischen ›Buchstaben‹ nachweisbar, die an voneinander entfernten Stellen innerhalb der Sequenz stehen. Dies spiegelt sich in einer langsamen, potenzgesetzartigen Abnahme der bedingten Entropien wider.

Aus dem Verlauf der bedingten Entropien lässt sich dann ein spezielles Komplexitätsmaß ableiten, das als effektive Komplexität bezeichnet wird und das für natürliche Sequenzen, also auf der Grenze zwischen Ordnung und Chaos, einen entsprechend hohen Wert hat. Die Entropie hat sich damit unter bestimmten Verallgemeinerungen auch als ein Maß zur Charakterisierung komplexer Strukturen bewährt.

### Fazit

Schon Birkhoff vertrat die Auffassung, dass ein Kunstwerk nur dann schön sei, wenn es weder regulär und vorhersagbar noch zu sehr mit Überraschungen versehen ist. Unser Konzept der dynamischen Entropie erweist sich, wie wir gezeigt haben, als ein geeignetes Instrument zur Quantifizierung dieser Aussage, denn es konzentriert sich auf ebendieses Verhältnis von Vorhersagbarkeit (bereits bekannter Strukturen) und Überraschungseffekt (beim Auftauchen neuer Strukturen). Durch die dynamische Entropie wird gerade die Unsicherheit bei der schrittweisen Voraussage beschrieben – oder anders ausgedrückt:



Die dynamische Entropie gibt an, was es beim nächstfolgenden (Wahrnehmungs-)Schritt an Neuem, Unerwarteten zu entdecken gibt bzw. wie viel etwa schon als bekannt vorausgesetzt werden darf. Sie quantifiziert damit gewissermaßen den bekannten Déjà-vu-Effekt und misst dem dynamischen Prozess der Perzeption große Bedeutung bei.

Über die ›Wirkung‹ eines Objektes entscheidet also das optimale Verhältnis von Bekanntem und Unbekanntem, Altem und Neuem, von Gewohnheit und Überraschung. Das Schöne ist in diesem Sinne nicht eine Eigenschaft der Objekte an sich, sondern eine binäre Relation zwischen wahrgenommenem Objekt und wahrnehmendem Subjekt. Einer Reduktion des Ästhetischen auf rein quantitative Aspekte auf der einen Seite stehen also auf der anderen Seite die subjektive Wahrnehmung und Wertung durch das Individuum entgegen, für welche im Rahmen naturwissenschaftlicher Theorien bestenfalls Randbedingungen angegeben werden können.

#### Literatur

- M. Bense: *Aesthetica*. Einführung in die neue Ästhetik. Baden-Baden 1982
- G. D. Birkhoff: A Mathematical Approach to Aesthetics, in: *Scientia*, September 1931, S. 133-146
- G. D. Birkhoff: A Mathematical Theory of Aesthetics, in: *The Rice Institute Pamphlet*, Volume 19, 1932, S. 189-342
- F. Cramer und W. Kaempfer: *Die Natur der Schönheit. Zur Dynamik der schönen Formen*. Frankfurt am Main 1992
- W. Ebeling und R. Feistel: *Chaos und Kosmos – Prinzipien der Evolution*. Heidelberg 1994
- W. Ebeling, J. Freund und F. Schweitzer: *Komplexe Strukturen, Entropie und Information*. Stuttgart 1998
- W. Fucks: Mathematische Analyse von Sprachelementen, Sprachstil und Sprachen, in: *Arbeitsgemeinschaft für Forschung NRW*, Band 34a, 1953, S. 1-110
- R. Gunzenhäuser: Maß und Information als ästhetische Kategorien. Einführung in die ästhetische Theorie G. D. Birkhoffs und die Informationsästhetik. Baden-Baden 1975
- A. Moles: *Information Theory and Aesthetic Perception*. Urbana, Ill. 1966
- U. Niedersen und F. Schweitzer (Hrsg.): *Ästhetik und Selbstorganisation*. Berlin 1993
- C. E. Shannon: Prediction and Entropy of Printed English, in: *The Bell System Technical Journal*, Volume 3, 1951