Gegenworte, 16. Heft Herbst 2005

Günter M. Ziegler

Wo Mathematik entsteht: Zehn Orte

Wo entsteht Mathematik? Im Kopf! Mathematik wird aus Ideen gemacht.

Wer Mathematiker und Mathematikerinnen nach dem Moment, dem Ort und dem Zeitpunkt fragt, ›wo die entscheidende Idee entstand‹, wird meist keine befriedigende Antwort bekommen. Mathematische Ideen entstehen nicht im Labor, nur selten planmäßig aufgrund intensiven Nachdenkens, sondern als Schritte und Sprünge entlang eines Weges, der sich ›durchs Leben zieht‹.

Zum Mathematik-Machen braucht man sehr wenig. Papier und Stift sind wohl die Standardausstattung (für mich etwa: Karopapier und ein Druckbleistift), aber Nachdenken geht im Kopf, Nachrechnen etwa im Laptop. Die Laborausstattung des Mathematikers ist also sehr bescheiden, und seine Labore sind transportabel. Deshalb ist der ›Ort, wo Mathematik entsteht‹, nicht durch Sachzwänge festgelegt; mathematische Ideen sind nicht durch ihre Produktionsmittel und Produktionsbedingungen lokalisierbar.

Wer als Mathematiker Ideen entwickeln will, muss sich frei machen von den Zwängen der Schreibtische. Er muss Zeit finden zum Nachdenken, muss Überlegungen nachhängen können, muss Ruhe und Muße haben, muss sich konzentrieren oder ausspannen. Er muss gedanklich auf die Reise gehen können. Dafür gibt es kein Erfolgsrezept. Mathematik ist vielfältig, und die Mathematiker sind vielfältig, auch wenn man weiter versucht, sie in grauhaarige Stereotypen mit dicker Brille zu pressen. Die Orte, an denen mathematische Ideen entstehen, spiegeln das wider. Wir machen deshalb einen Ausflug in die Vielfalt und nähern uns anekdotisch der Frage, wie und wo Mathematiker arbeiten, wie und wo ›Mathematik entsteht‹.

1) Am Schreibtisch

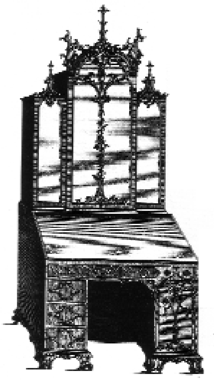
»Der Mathematiker ist ein mythologisches Wesen, halb Mensch, halb Stuhl.« So wird Simon Golin zitiert. Natürlich entsteht viel Mathematik am Schreibtisch, und oft ist ›die entscheidende Idee‹ einfach im Lauf einer langen Rechnung, einer Folge kleiner Skizzen, beim Ausarbeiten von Beispielen am Schreibtisch entstanden. ›Der Schreibtisch‹ markiert dabei einen Ort der Ruhe, der Konzentration ohne Ablenkung.

Der schwere, primitiv anmutende Labortisch, an dem Otto Hahn die Kernspaltung entdeckte, wird im Deutschen Museum in München ausgestellt. Das Arbeitszimmer von Thomas Mann kann man in Zürich im Original bestaunen. Ich weiß von keinem Mathematiker-Arbeitsplatz, der in einem Museum ausgestellt wird. Und vermutlich wird das auch in Zukunft nicht passieren – auch, weil die Schreibtische der Wissenschaftler wegen der Stapel von Forschungsantragsformularen für Exzellenzinitiativen nur noch eingeschränkt zum Forschen nutzbar sind.

Von Leonhard Euler (1707–1783) wird berichtet, dass er konzentriert und effektiv am Schreibtisch arbeiten und schreiben konnte, während seine vielen Kinder auf seinem Rücken herumturnten und zwischen seinen Beinen spielten. Euler, einer der produktivsten Mathematiker der Neuzeit, war offenbar ohnehin kaum abzulenken: Auch die Erblindung 1771 hat seine Produktivität nicht ernsthaft eingeschränkt; fast die Hälfte seiner Werke entstand danach.

2) Im Computer

Ein Computer kann keine Ideen haben und deshalb auch keine Mathematik machen. Aber es gibt Entdeckungen am Computer, im Computer, die ohne Computer nicht möglich wären. Zu diesen Entdeckungen zählt sicher das



berühmte Apfelmännchen; die bemerkenswerten fraktalen Strukturen, die unter Iterationen entstehen, sind ohne Rechner (und Bildschirm) nicht zu sehen.

Aber auch tief in den Zahlen stecken Geheimnisse, die man ohne Computer nicht entdecken würde. Da ist zum Beispiel die Beobachtung, die ein gewisser Roy D. North in den siebziger Jahren in Kanada gemacht hat. Sie bezieht sich auf eine der schönsten Formeln der Mathematik – von Leonhard Euler, 1734: Wenn man die Inversen aller Quadratzahlen aufaddiert, also $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$, so erhält man laut Euler ein Sechstel von π^2. Dieses wunderbare, wichtige Ergebnis hat eine Vielzahl von brillanten Beweisen, Verallgemeinerungen und Anwendungen ermöglicht.

Die Euler-Summe ist eine *unendliche Reihe*, unendlich viele Terme sind aufzusummieren, und das Ergebnis ist eine *irrationale Zahl*, 1,64493406684822643647… Wenn man die Summe auf dem Computer bildet und diesen genau genug rechnen lässt, dann die Summe nach einer Million Terme abbricht, so erhält man die Summe auf fünf Stellen genau, 1,64493306684872643630… Dass die sechste Stelle falsch ist, muss hier nicht überraschen: Die unendliche Summe konvergiert eben nicht besonders gut. Dass aber die siebte, achte, neunte, zehnte, elfte und zwölfte Stelle alle wieder richtig sind, das ist überraschend! Dass die Fehler also ungefähr an sechster, zwölfter, achtzehnter usw. Stelle auftreten und die Größe der Fehler auch ganz systematisch ist, wobei die *Bernoulli-Zahlen* $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42} \ldots$ eine wichtige Rolle spielen, das ist ›von Hand‹ nicht zu errechnen oder ›mit dem bloßen Auge‹ nicht zu erkennen, auch nicht für meisterhafte Rechner wie Euler, Gauß und Riemann, sondern eben nur mit einem modernen Computer, dem hoch entwickelte Mathematik in Form von Software zur Verfügung steht. Als mathematisches Resultat *formulieren* und das *beweisen* muss der Mathematiker dann aber doch, letztlich mit Papier und Bleistift. Das haben die Brüder Borwein und Karl Dilcher als Erste getan.

3) Im Bett

Die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks durch den jungen Carl Friedrich Gauß (1777–1855) beschreibt er selbst in einem Brief (Gauß und Gerling, S. 187f.):

»Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentlich erwähnt, ich kann es aber sehr genau angeben. Der Tag war der 29. März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran. […] Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir, bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle (sic!) machen konnte.«

G. H. Hardy berichtet über den indischen Mathematiker Ramanujan, »the most romantic figure in the recent history of mathematics«:

»Ramanujan used to say that the goddess of Namakkal inspired him with the formulae in his dreams. It is a remarkable fact that frequently, on rising from bed, he would note down results and rapidly verify them, though he was not always able to supply a rigorous proof.

4) In der Kirche

Göttliche Inspiration ist vermutlich in kaum einer mathematischen Entdeckung nachweisbar. Aber warum soll nicht die feierliche Atmosphäre eines vatikanischen Gottesdienstes (inklusive der berauschenden Wirkung des Weihrauchs) zu Ideen führen?

»Es ist überliefert, dass Dirichlet den entscheidenden Gedanken zum Beweis des [Einheiten-]Satzes fand, während er die Ostermesse in der Sixtinischen Kapelle des Vatikans hörte. […] Für seine Arbeitsweise war es charakteristisch, dass er seine Überlegungen erst dann schriftlich formulierte, wenn er sie vollständig im Kopf durchdacht hatte«, schreibt Koch (S. 148) über Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), dessen 200. Geburtstag dieses Jahr gefeiert wurde.

5) In Gefangenschaft

Jean Leray (1906–1998) entwickelte seine tiefsten und wichtigsten Erkenntnisse, fundamentale Beiträge zur modernen algebraischen Topologie wie die Spektralsequenzen und die Theorie der Garben, im Kriegsgefangenenlager Edelbach in Österreich. Der napoleonische Offizier Jean-Viktor Poncelet entwickelte die projektive Geometrie in fünf Jahren russischer Kriegsgefangen-

schaft. »Nothing is more favourable than prison for the abstract sciences«, schrieb André Weil – in deutscher Kriegsgefangenschaft.

6) Die Kaffeemaschine

Der legendäre ungarische Mathematiker Paul Erdös (1913–1996) liefert vielfältige Aspekte und Anekdoten zur Entstehung mathematischer Ideen. Jahrzehntelang reiste Erdös ohne feste Stelle und ohne festen Wohnsitz um die Welt, zu Gast bei Freunden und Bekannten. Erdös' alter Reisekoffer, der seinen gesamten Besitz enthielt, war 2003 im Museum ausgestellt, in der Ausstellung ›10+5=GOTT‹ des Jüdischen Museums Berlin.

Wenn Erdös angekommen war auf dem Sofa im Wohnzimmer, eine Kaffeetasse in der Hand, fiel oft der Satz »My mind is open«: Mit dem Sofa und dem Kaffee waren die Voraussetzungen für Gespräche über Mathematik erfüllt. Dann können auch die Ideen kommen.

Erdös sagte: »A mathematician is a machine that converts coffee into theorems.« Meiner Erfahrung nach gibt es dabei keine Korrelation in der Qualität. Am Mathematik-Department des MIT wurde in den achtziger Jahren miserabler Kaffee in (teilweise) exzellente Mathematik überführt. Und in Berkeley wird auch immer noch zu viel »vanilla decaf low-fat cappuchino« konsumiert und trotzdem exzellente Mathematik gemacht. Erdös selbst brauchte Muntermacher und Schlaftabletten zusätzlich zum Koffein. Von einem Monat, den er (aufgrund einer Wette) ohne Tabletten durchhielt, sagte er: »It was a bad month for mathematics«.

7) Am Strand

Natürlich kann man als Mathematiker am Strand arbeiten, und Mathematiker tun das – gern und mit legendärem Erfolg. Stephen Smale berichtet über die Umstände seiner Arbeit 1960 in Rio de Janeiro:

»In a typical afternoon I would take a bus to IMPA and soon be discussing topology with Elon, dynamics with Mauricio or be browsing in the library. Mathematics research typically doesn't require much, the most important ingredients being a pad of paper and a ballpoint pen. In addition, some kind of library resources, and colleagues to query are helpful. I was satisfied.

Especially enjoyable were the times spent on the beach. My work was mostly scribbling down ideas and trying to see how arguments could be put together. Also I would sketch crude diagrams of geometric objects flowing through space, and try to link the pictures with formal deductions. Deeply involved in this kind of thinking and writing on a pad of paper, the distractions of the beach didn't bother me, moreover, one could take time off from the research to swim.«

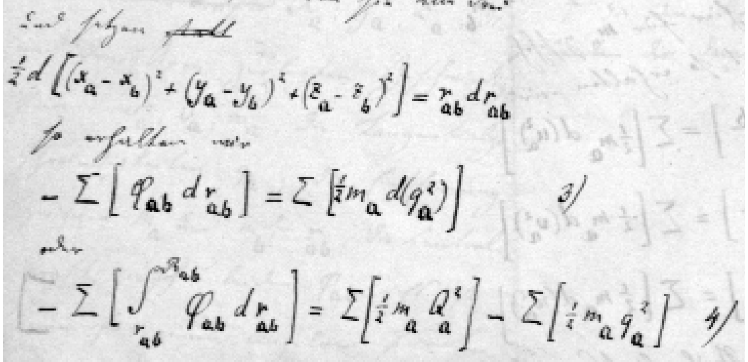
Smale wurde berühmt für seine Arbeiten aus Rio, darunter der Beweis der Poincaré-Vermutung für Dimensionen $n > 4$, und wichtige Einsichten zur Theorie der dynamischen Systeme. Die Behauptung »I did some of my best work on the beaches of Rio« hat Smale aber massiven Ärger eingebracht: Als man ihn wegen seines Engagements gegen den Vietnamkrieg angreifen wollte, wurde ihm das Arbeiten »on the beaches of Rio« vom Wissenschaftsberater des US-Präsidenten als Verschwendung von Steuergeldern vorgeworfen.

Das Arbeiten am Strand führt auch heute noch zu kuriosen Kontroversen. Die folgende Passage (Grötschel, S. 358) aus einer Festrede von Claude Berge wollte der Verlag zensieren, weil die Redakteurin die Passage für frauen-diskriminierend hielt:

»One may bump into Manfred here, there, everywhere, Berlin, Bonn, Lausanne, New York, Tampa, Hawaii, Grenoble, Paris, but do not interpret his work on the Traveling Salesman Problem in the context of his own peregrinations. If you meet him on the beach of Saint-Tropez, he will be very likeley working on a portable, without a look to the sea or to a group of attractive ladies! My personal opinion is that Manfred Padberg is a perfect specimen of a new type of man, one who prefers spending his time in front of a computer. Maybe after *Homo Erectus, Neanderthals, Cro-Magnons, Homo Sapiens*, we are confronting a new breed of *Homo Mathematicus*?«

8) Paradiese für Mathematiker

Für viele Mathematiker ist die perfekte Arbeitsumgebung ein Ort wie das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach im Schwarzwald, an dessen Eingangstür ein Amerikaner einmal die Ankommenden mit den Worten »Welcome to mathematicians' paradise« begrüßt haben soll.



Das Forschungs- und Tagungszentrum Oberwolfach liegt recht abgelegen im Schwarzwald. Es gibt dort Ruhe, gutes Essen, eine hervorragende Bibliothek, große Tafeln, einen Fotokopierer, Computer, mehrere Espressomaschinen, einen Billardtisch, einen Tischtennisraum, ein Musikzimmer, einen großen Weinkeller, lange Wanderwege und Kollegen aus aller Welt. Jede einzelne dieser Komponenten kann man je nach Geschmack und Stimmungslage exzessiv nutzen oder nicht, und vermutlich spielt fast jede eine bedeutende Rolle beim Entstehen von Ideen.

So existiert angeblich noch ein roter Tischtennisschläger aus Oberwolfach, auf dem Günter Frey (Essen) mit einem schwarzen Filzstift Günter Harder (Bonn) begeistert seine Idee erklärt hat, die den Ausgangspunkt zum Beweis der Fermat'schen Vermutung gebildet hat.

Im weiteren Gang der Geschichte spielt dann doch wieder ein Café eine wichtige Rolle, das Caffè Strada in Berkeley, wo ein junger Amerikaner, Ken Ribet, den nächsten wichtigen Schritt schaffte.

9) Ein Dachzimmer in Princeton

Der Beweis der Fermat'schen Vermutung durch Andrew Wiles – dass $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine Lösung in positiven ganzen Zahlen hat – gehört zu den großen dramatischen Stoffen der modernen Wissenschaft. Dass einer sich sieben Jahre in ein Dachzimmer zurückzieht, um eines der ganz großen Probleme der Mathematik zu lösen, für die Lösung wie ein Held gefeiert wird, dass sich dann in der Lösung aber doch ein fataler Fehler findet, der Held sich noch einmal in sein Dachzimmer zurückzieht, den Fehler letztlich nicht korrigieren, aber mit einer neuen Idee umschiffen kann: Warum soll man das nicht mit antiken Heldentaten vergleichen?

Warum soll man sich wundern, dass eben nicht nur Homer ein Epos, sondern ein britischer Wissenschaftsjournalist einen Bestseller schreibt? Das Drama spielt nicht in einer griechischen Arena, sondern landet als Theaterstück und als Musical auf dem Broadway. Das sind eben die modernen Zeiten.

Darüber, wie und wo die entscheidenden Ideen entstanden, berichtet Andrew Wiles selbst (Singh, S. 257f., 297f.):

»Much of the time I would sit writing at my desk, but sometimes I could reduce the problem to something very specific – there's a clue, something that strikes me as strange, something just below the paper which I can't quite put my finger on. If there was one particular thing buzzing in my mind then I didn't need anything to write with or any desk to work at, so instead I would go for a walk down by the lake. When I'm walking I find I can concentrate my mind on one very particular aspect of a problem, focusing on it completely. I'd always have a pencil and paper ready, so if I had an idea I could sit down at a bench and start scribbling away.

I was sitting at my desk one Monday morning, 19 September, examining the Kolyvagin–Flach method. It wasn't that I believed I could make it work, but I thought that at least I could explain why it didn't work. I thought I was clutching at straws, but I wanted to reassure myself. Suddenly, totally unexpectedly, I had this incredible revelation. I realised that, although the Kolyvagin–Flach method wasn't working completely, it was all I needed to make my original Iwasawa theory work. […] It was so indescribably beautiful; it was so simple and so elegant. I couldn't understand how I'd missed it and I just stared at it in disbelief for twenty minutes. Then during the day I walked around the department, and I'd keep coming back to my desk looking to see if it was still there. It was still there. I couldn't contain myself, I was so excited. It was the most important moment of my working life. Nothing I ever do again will mean as much.«

10) Die Bibliothek

Viele der besten neuen mathematischen Ideen sind Verbindungen zwischen alten. Dafür muss man natürlich die alten Ideen kennen: Die altbekannten finden sich in der Bibliothek, die neuen bekannten kennen die Kollegen. Man muss dann nur die Dinge richtig zusammensetzen.

Von Richard P. Stanley, Professor für Mathematik am MIT, stammt eine kurze Schilderung seines Wegs zu einer Meisterleistung der modernen Geometrie, die ihn 1979 berühmt machte und der er auch seine Professur am MIT verdankt. Er erzählt, wie er dazu kam, den »harten Lefschetz-Satz für torische Varietäten« in Stellung zu bringen, um ein fundamentales Problem aus der Theorie der Polyeder zu lösen: den Beweis von »McMullen's *g*-Vermutung« für simpliziale Polytope. Diese Bedingungen hatte Peter McMullen 1971 in einem mutigen Geniestreich postuliert, aufgrund sehr wenig »experimenteller

Daten« (nicht, wie ein Gerücht besagte, von viel Bier inspiriert, sondern verkatert – sagt McMullen heute).

Stanleys Schilderung sei hier im entschärften Originalton wiedergegeben. Wir zitieren Stanley (S. 221), ersetzen dabei aber die spezielleren mathematischen Details durch Pünktchen:

»The following comments on how the proof of the necessity of the *g*-conjecture was found may be of interest. I had realized from my first work on the […] that the necessity of the *g*-conjecture would follow from […] In 1976, Toni Iarrobino brought the hard Lefschetz theorem to my attention. It was now apparent that one needed a smooth projective variety X whose […] I had been aware for some time of the theory of toroidal embeddings [24] and had checked this reference to see whether the variety $X(P)$ had the right properties. Three problems arose: (i) I could not understand [24] well enough […] (ii) […] (iii) […] There matters rested until the spring or summer of 1979, when I stumbled upon the paper of Danilov [10] on the new journal shelf of the MIT library. Remark 3.8 immediately caught my attention. It asserted that […] But in reading [10] more carefully it became apparent that Remark 3.8 was stated rather carelessly. One needs to assume […] I therefore asked some algebraic geometers whether […] but none knew. Shortly thereafter I took the book [22] out of the library in order to look at a paper related to a completely different topic in which I was interested. In browsing through this book I discovered the paper of Steenbrink [41], with its proof of the hard Lefschetz theorem for projective V-varieties. It remained only to ascertain that for convex polytopes the varieties $X(P)$ were projective. This was accomplished via a conversation with David Mumford on September 13, 1979, and the proof was complete.«

Keiner wusste damals, dass der Beweis von Steenbrink nicht richtig war – und damit auch die Argumentationskette von Stanley eine Lücke enthielt. Davon erfuhr Stanley erst viel später, als die Lücke (von M. Saito) schon endgültig geschlossen worden war.

Mathematik ist vielfältig, und die Mathematiker sind vielfältig. Wir haben hier zehn Orte besucht, ›wo Mathematik entsteht‹. Es gibt viele andere Orte. Keiner davon ist eine Bühne. Die meisten der ›Helden‹ sind (weitgehend) uneitel, und das Glück des Findens ist oft umgeben von der Banalität des Alltags. Ich habe ja deshalb auch absichtlich die Akteure im Originalton zitiert. Die Hagiografie mag später kommen.

Literatur

M. Aigner und G. M. Ziegler: Das BUCH der Beweise. Heidelberg 2004 (2. Auflage)
K. Barner: Der verlorene Brief des Gerhard Frey, *Mitteilungen der DMV* 2/2002, S. 38–44
J. M. Borwein, P. B. Borwein und K. Dilcher: Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions, *Amer. Math. Monthly* 96, 1989, S. 681–687
G. P. Csicsery: N Is a Number. A portrait of Paul Erdös. Dokumentarfilm (57 Minuten), 1993
C. F. Gauß und Ch. L. Gerling: Briefwechsel, hg. von Clemens Schaefer. Berlin 1927
M. Grötschel (Hg.): The Sharpest Cut: The Impact of Manfred Padberg and His Work. Philadelphia 2004
G. H. Hardy: Ramanujan. Twelve Lectures on Subjects suggested by his life and work. Cambridge, MA. 1940
H. Koch: Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). Zum 200. Geburtstag, *Mitteilungen der DMV* 3/2005, S. 144–149
P. McMullen: The numbers of faces of simplicial polytopes, *Israel J. Math.* 9, 1971, S. 559–570
A. M. Sigmund, P. Michor und K. Sigmund: Leray in Edelbach, *Mathematical Intelligencer* 2/2005, S. 41–50
S. Singh: Fermat's Last Theorem. London 1997
S. Smale: The Story of the Higher Dimensional Poincaré Conjecture (What Actually Happened on the Beaches of Rio), *Mathematical Intelligencer* 2/1990, S. 44–51
R. P. Stanley: The number of faces of simplicial polytopes and spheres, in: J. E. Goodman u. a. (Hg.): Discrete Geometry and Convexity. New York 1985, S. 212–223