Konrad Polthier

Als die Dreiecke laufen lernten

Eine persönliche Geschichte zur Visualisierung in der Mathematik

Visualisierung in der Mathematik – und was Mathematik für die Visualisierung leistet

Von Spezialeffekten in Hollywood zum hochauflösenden Fernsehen, von Digitalkameras und MP3-Spielen zu YouTube und Second Life, vom digitalen Auto zum virtuellen Patienten – Mathematik steckt mitten in der Visualisierung unserer Welt und der digitalen Zukunft. Sie dient aktiv als Problemlöser und Technologielieferant für schwierigste Aufgaben. Viele der komplizierten Probleme – dies gilt in besonderem Maße für die mathematischen Verfahren – werden im Hintergrund gelöst, unsichtbar im Inneren der Maschinen, versteckt von der sichtbaren, öffentlichen Benutzeroberfläche. Schließlich soll der Anwender nur einen Knopf drücken oder den Zündschlüssel drehen, und er soll sich nicht um die internen Algorithmen der hochtechnologisierten Geräte kümmern müssen.

Wenn die Arbeit der Mathematik also im Verborgenen geleistet wird, was genau ist dann das Verhältnis der Mathematik zur Visualisierung? Ist Mathematik vielleicht doch öffentlich sichtbar? Ich werde aus persönlicher Sicht die Entstehung und Perspektiven der mathematischen Visualisierung kommentieren.

Trocken Brot – die Suche nach Bildern

Mathematik ist vom Wesen her eine theoretische und abstrakte Wissenschaft, Mathematik ist nicht Malen oder Naturerkunden, sondern ist das Studium von theoretischen Lehrsätzen, Zahlen, Formeln und Beweisen. Sie schafft es, physikalische Probleme von ablenkendem Beiwerk zu befreien und auf die wesentlichen Komponenten zu reduzieren. Aber hinter der Abstraktion, hinter den Formeln, Lehrsätzen und nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeiten (Abb. 2) verbleiben dennoch – für den Mathematiker sichtbar – sehr konkrete und ganz anschauliche Objekte. Ein Mathematiker ist darin geschult, sich abstrakte Formen anschaulich vorstellen zu können, das ist seine große Kunst, aus der er kreative Schaffenskraft bezieht. Studenten haben anfangs Schwierigkeiten mit der Abstraktion, werden aber im Laufe ihres Studiums in diese Kunst eingeweiht. Sie lernen, von der abstrakten Welt innere Bilder zu erstellen. Mit der Zeit werden dabei die großen Zusammenhänge im mathematischen Weltbild sichtbar, in ihren Köpfen findet sozusagen eine Visualisierung der abstrakten Mathematik statt.

Doch die Erfolge müssen teuer erkauft werden: Mühsam ist das Studium der Mathematik. Hilfreich wären kleine Grafiken in den Lehrbüchern und anschauliche Hinweise zu komplizierten Beweisen, die den Geist beim Verstehen unterstützen könnten. Viele mathematische Aussagen haben eine anschauliche Form, und oftmals gibt es sogar physikalische Referenzen: Kritische Punkte eines Vektorfeldes erscheinen als Wirbel einer Strömung, Minimalflächen sind Seifenblasen (Abb. 1), selbst von der abstrakten projektiven Ebene (Abb. 3) lässt sich ein reales Bild im dreidimensionalen Raum erstellen. Die Mathematik ist gar nicht so abstrakt, wie es oft erscheint.

Zu Beginn meines Studiums Anfang der 80er Jahre bin ich selbst auf die Suche nach Bildern in der Mathematik gegangen. Ich habe regalweise die Bände der Mathematischen Bibliothek in Bonn durchkämmt. Irgendwelche Bücher mussten doch Bilder der vielen Kurven, Flächen und Formen enthalten. Leider dominierten in den Büchern der Text und die Formeln, nur manchmal hatten sich einzelne Grafiken zur Erläuterung und Auflockerung verirrt. Selbst Lehrbücher der Geometrie enthielten oft nur eine einzige Bildsequenz: die Verwandlung der kühlturmartigen Katenoidfläche in die treppenartige Wendelfläche. Noch trostloser war, dass andere Geometriebücher auch nur Bilder von genau dieser Transformation zeigten. Mathematik ist trocken, das war ja von vorneherein klar, aber etwas kreativer hätten die Illustrationen schon sein können.

1) *Kompakte Seifenblase mit höherem Geschlecht*

Der Anfang – Bilder aus der Differenzialgeometrie

Wenn die Bücher keine Bilder zeigen, dann muss man neue Wege beschreiten. Und diese führten mich zum Großrechner im Rheinischen Hochschulrechenzentrum der Universität Bonn. Meine ersten Grafikprogramme bestanden noch aus wenigen Hundert Zeilen FORTRAN-Code. Jede einzelne Zeile war auf einer Lochkarte abgespeichert, und das Programm wurde als Stapel dem Rechner zugeführt. So schnell er auch war (damals, Anfang der 80er, nahezu Weltspitze), brauchte er doch zwischen zehn und 30 Minuten reine Rechenzeit, um verdeckte Linien zu eliminieren und ein sauberes Bild einer differenzialgeometrischen Fläche zu zeichnen. Heute geht das auf jedem Laptop 1000-mal schneller, aber zu damaligen Pionierzeiten musste sich das Gebiet der Computergrafik ja erst entwickeln. Man bemerke, auch der PC wurde erst ab 1981 von IBM gebaut.

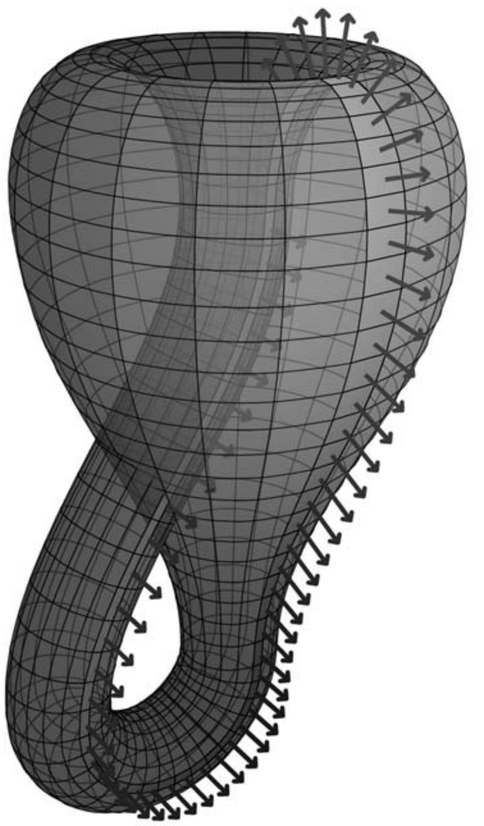
Der Differenzialgeometrie-Professor zeigte ein unerwartetes Interesse an den nun bildlich gewordenen Vorlesungsthemen. Fortan erschienen differenzialgeometrische Bilder aus der Computer-Produktion auf dem wöchentlichen Übungszettel in gedruckter Form. Zum Jahresende war so viel Material zusammengekommen, dass – zur Unterstützung der Bibliothek – die »Bilder aus der Differentialgeometrie« als Kalender verkauft werden konnten, zunächst am Mathematischen Institut und in den folgenden Jahren über den Vieweg Verlag. Rückblickend ist es bemerkenswert, dass schon die ersten Bilder weniger der Illustration klassischer Resultate als vielmehr der Veranschaulichung damals neuester Forschungsresultate dienten – dies hat sich im Bereich der mathematischen Visualisierung bis heute so gehalten. Die raschen Innovationszyklen bei der Grafik-Hardware brachten schnell den Übergang vom Großrechner zur persönlichen Grafik-Workstation. Damit kam die Interaktivität in die Visualisierung, und die Bilder kannten von nun an nicht nur Farbe, sondern lernten auch schnell das Laufen.

Von der Mandelbrot-Fläche zur Visualisierung

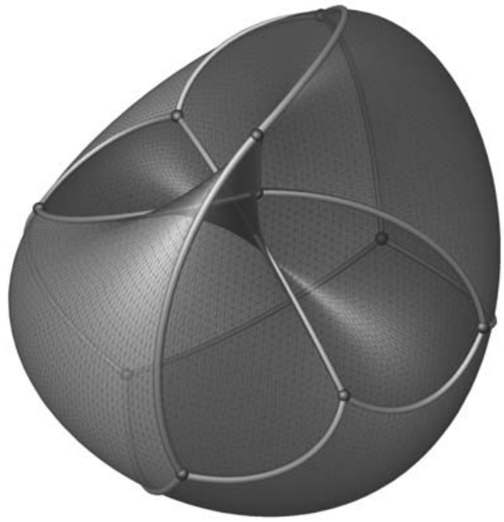
Mitte der 80er Jahre wurden erstmals computergenerierte mathematische Bilder einem breiten Publikum bekannt. Es waren faszinierende Bilder von Fraktalen, jenen selbstähnlichen Formen, die sich in jedem kleinsten Ausschnitt unendlich wiederholen. Eine Ikone dieser Fraktale ist das *Apfel-Männchen* oder die *Mandelbrot-Fläche*, entdeckt von Benoît Mandelbrot von IBM Research (Abb. 6). Viele Fraktale werden mit einer recht einfachen Iterationsformel beschrieben und können dadurch von Jedermann-mit-Programmierkenntnissen an seinem Heimcomputer in Selbstbauweise berechnet werden. Neben der Ästhetik der Visualisierungen der Fraktale ist diese einfache Reproduzierbarkeit sicher ein weiterer Grund für den fraktalen Hype. Ich erinnere mich noch genau an einen Kolloquiumsvortrag von Heinz-Otto Peitgen in Bonn, als er erstmals – im Zentrum der damaligen Mathematik – mit bunten, computeranimierten Videos in die unbekannte Ästhetik der fraktalen Welten einführte. Ein faszinierendes, bildliches Schlüsselerlebnis für mich – Mathematik und Visualisierung begannen eine kreative Symbiose. Empfanden einige die Visualisierung zunächst etwas unmathematisch, unpräzise oder zu bildlich für eine reine, formale Wissenschaft, so wich die anfängliche Distanz doch im Laufe der kommenden Jahre recht schnell, als sich das ungeheure Potenzial von visuellen Darstellungen vormals unendlicher Zahlenkolonnen der numerischen Simulation, der computerunterstützten Konstruktion (CAD) und vieler anderer Bereiche zeigte.

Exportschlager – die Göttinger Modellsammlung

Oberflächlich betrachtet erscheint Visualisierung als ein Phänomen des Computerzeitalters – und natürlich ist dem nicht so! Wie oftmals bei Erfindungen gibt es Vorgänger in anderen Kleidern. In diesem Fall gehören hierzu die Visionäre der Mathematik wie Felix Klein und Hermann Amandus Schwarz und natürlich auch Giganten wie Leonardo da Vinci. Leonardos Skizzen ziehen sich durch seine gesamte Schaffensphase: Zeichnen und Visualisieren war für ihn integraler Bestandteil des Verstehens unserer Natur und des Kommunizierens von Wissen. Hermann Amandus Schwarz löste im Jahre 1865 das Gergonne-Problem von 1816: »Konstruiere eine Minimalfläche in einem Würfel, die von zwei entgegengesetzten Diagonalen zweier gegenüberliegender, horizontaler Würfelseiten berandet wird, und die zwei gegenüberliegende, vertikale Würfelseiten senkrecht schneidet« (Abb. 7). Physikalisch sind Minimalflächen vergleichbar mit Seifenblasenhäuten; sie besitzen geringste Oberfläche im Vergleich zu anderen Flächen mit demselben Rand. Das Gergonne-Problem war zur damaligen Zeit eines der schwierigsten Probleme der Analysis. Viele Mathematiker hatten sich an diesem Modellproblem versucht, viele Teillösungen waren gefunden. Eine spätere allgemeinere Formulierung des Randwertproblems für

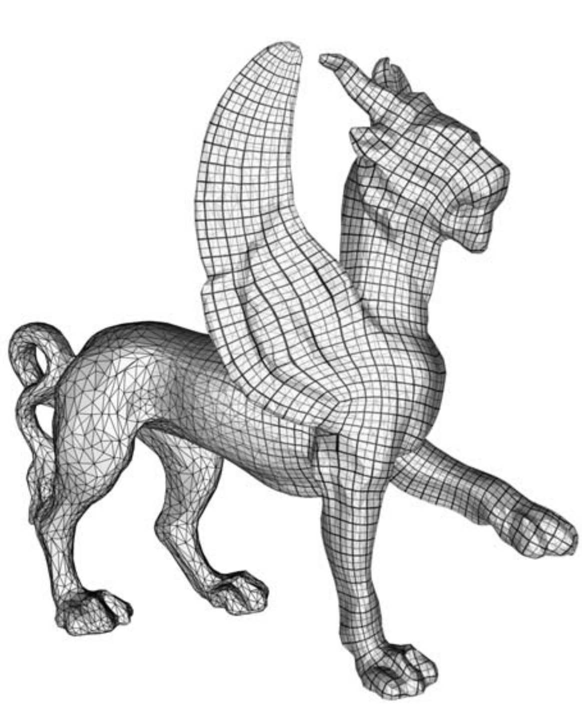


2) *Nicht-orientierbare Klein'sche Flasche*

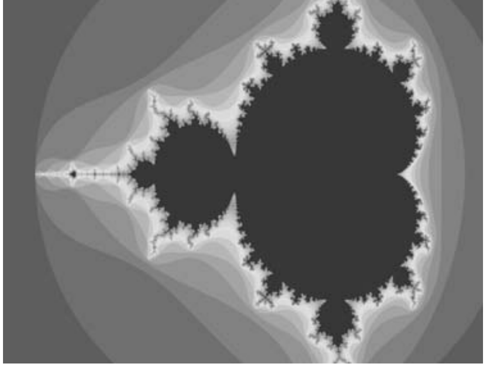


3) *Petersen-Graph eingebettet in das Kreuzhauben-Modell der projektiven Ebene*

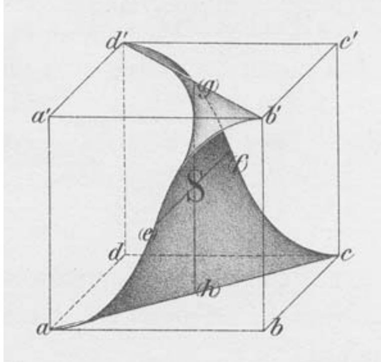
4) *Gipsmodelle der Kuen-Fläche*



5) *Dreiecks- und Vierecksnetz auf virtuellem Modell*



6) Mandelbrot-Fraktal



7) Kupferstich von H. A. Schwarz zum Gergonne-Problem

Minimalflächen wurde als Plateau-Problem bekannt und seine Lösung mit der Fields-Medaille belohnt, dem mathematischen Nobelpreis. Schwarz konnte nun Probleme vom Gergonne-Typ durch ganz neue mathematische Techniken lösen, insbesondere durch eine neuartige Verbindung der Variationsrechnung mit der gerade im Entstehen befindlichen *komplexen Analysis*. Anstatt seinen Beweis mathematisch-trocken in einer Zeitschrift zu veröffentlichen, beauftragte Schwarz Künstler, aus seinen Berechnungen Kupferstiche der Flächen anzufertigen (Abb. 7). Die in seiner Publikation abgebildeten Stiche gehören noch heute zu den schönsten mathematischen Visualisierungen. Einen ähnlichen Aufwand betrieb Schwarz zusammen mit Felix Klein beim Aufbau einer *Sammlung aus mathematischen Gipsmodellen* an der Universität Göttingen. Zum Ende des 19. Jahrhunderts umfasste die Göttinger Sammlung mehr als 500 mathematische Modelle, jedes im Gegenwert von mehreren Hundert Euro. Die anschaulichen Modelle zeigen viele geometrische Details und wurden intensiv in der Ausbildung eingesetzt (Abb. 4). Selbst heutige 3D-Visualisierungen müssen sich anstrengen, um mit der Perfektion der damaligen Modelle mithalten zu können. Felix Klein arrangierte es, dass eine Auswahl von mathematischen Modellen auf der Weltausstellung 1893 in Chicago gezeigt wurde. Produziert von den Firmen Ludwig Brill und Martin Schilling, wurden die Gipsmodelle nun in alle Welt verkauft und zu einem Exportschlager der Mathematik.

Die Modelle wurden im Wesentlichen nur bis zu Beginn des Ersten Weltkrieges hergestellt. Nach dem Krieg wurde die Produktion wieder hochgefahren, aber die Nachfrage hielt nur noch für wenige Jahre an. Warum versiegte das Interesse an mathematischen Visualisierungen so rapide zu Beginn des 20. Jahrhunderts? Die Antwort ist mathematik-spezifisch und insbesondere mit der von David Hilbert vorangetriebenen Formalisierung und Axiomatisierung der Mathematik verbunden. Danach sollen sich alle Argumente und Theoreme fortan aus wenigen, allgemeingültigen Grundannahmen, den Axiomen, herleiten. Es war kein Platz mehr für eine gefühlsmäßige Logik, schon gar nicht für physikalisch oder bildlich begründete Argumentationsketten. In Deutschland manifestierte sich 1931 diese rigide Lehransicht zum Beispiel im Buch *Moderne Algebra* von B. L. van der Waerden, während in Frankreich das einflussreiche Autorenteam Bourbaki die Mathematik auf neue Grundlagen stellte.

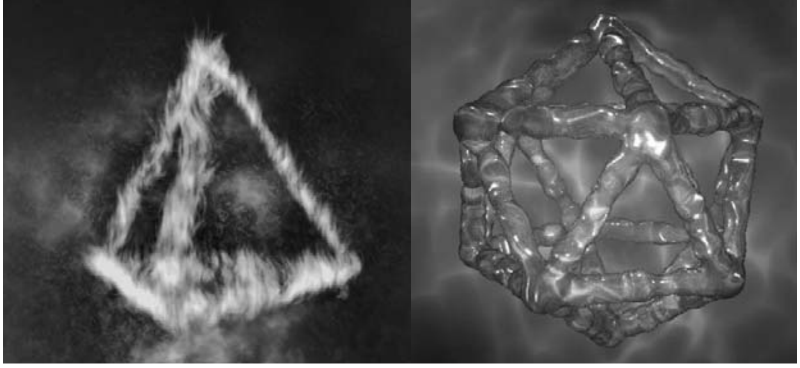
Diese Abstraktionsbemühungen waren sehr hilfreich für das abstrakte und mächtige Gedankengebäude der Mathematik, behinderten allerdings den intuitiven und visuellen Zugang. Die moderne Visualisierung kann nun die Anschaulichkeit der Klein'schen Modelle reproduzieren – und kreativ mit der seitdem entwickelten Abstraktion verbinden.

MathFilm Festival – Filme machen Schule

Auch Hollywood hat die Mathematik im Blick, und es produziert in loser Folge Blockbuster zu mathematischen Themen. Häufig ist es die Genialität – gepaart mit einem kräftigen Schuss an Schrägheit, die Hollywood an den Mathematikern interessiert. Russell Crowe spielt in *Beautiful Mind* den Nobelpreisträger John Nash, dem seine Schizophrenie zu schaffen macht, oder Anthony Hopkins und Gwynneth Paltrow durchleben in *Der Beweis* eine ungewöhnliche Vater-Tochter-Beziehung, bei der beide am selben mathematischen Problem forschen – bis zum Schluss bleibt ungewiss, wessem Geist nun der Beweis gelang.

Mathematik produziert aber auch eigene Filme, mittlerweile recht viele und sogar mit großem Erfolg auf internationalen Filmfestspielen. Zum Jahr der Mathematik schrieb das MathFilm Festival 2008 einen weltweiten Wettbewerb für mathematische Filme aus und organisierte aus dem begutachteten Filmmaterial Aufführungen in Schulen, Universitäten und Museen in mittlerweile mehr als 80 Städten in Deutschland. Die Grundidee liegt darin, ein zentrales Filmangebot zu erstellen und die Rechtefrage für öffentliche Vorführungen mit Autoren und Verleihfirmen vorab zu klären. Über ein Online-Portal können dann lokale Organisatoren in Deutschland die Filme kostenlos buchen und eigene Programme für ihre Veranstaltungen zusammenstellen.

Das MathFilm Festival 2008 wird vom Bundesministerium für Bildung und Forschung als Teil des Jahres der Mathematik gefördert. Eine Sammlung aus Kurzfilmen, die DVD *MathFilm Festival 2008*, wurde in deutscher Sprache synchronisiert und im September 2008 an alle allgemeinbildenden Schulen in Deutschland verschickt. Zusammen mit dem weiterhin bestehenden Online-Angebot sind damit mathematische Visualisierungen für eine breite Öffentlichkeit verfügbar geworden.



8) Platonische Körper mit Feuer- und Wassertexturen entsprechend ihrer Bedeutung als Elemente der Natur

Neue Mathematik für die digitalen Welten

Das bildliche Veranschaulichen zeigt nur eine Seite der Beziehung von Visualisierung und Mathematik. Die Visualisierungstechnologie entwickelt sich rasant weiter und erfordert immer mehr mathematische Kompetenz. Es besteht eine steigende Nachfrage nach mathematischen Datenstrukturen und Algorithmen zur Lösung immer komplexer werdender Visualisierungsverfahren. Einige Techniken hat die Mathematik vorab schon *auf Halde produziert*, andere Probleme erfordern mathematische Neuentwicklungen. Ein Beispiel sind die digitalen Monster und virtuellen dreidimensionalen Welten bei Spezialeffekten: Die Oberflächen dieser Modelle werden im Computer aus Netzen von Dreiecken erstellt (Abb. 5). Vorteil: Der Computer muss sich nur die Eckpunkte der Dreiecke merken und nicht die unendlich vielen Punkte einer glatten Oberfläche. Nachteil: Man muss mathematisch mit den kantigen Dreiecksflächen genauso gut rechnen können wie mit glatten Flächen. Mit der *diskreten Differenzialgeometrie* hat sich in den letzten Jahren ein neuer Zweig in der Mathematik entwickelt, der insbesondere die geometrischen Probleme der Computergrafik angeht – eine Hochburg dafür ist übrigens Berlin. Natürlich müssen auch Feuer, Wasser und Luft realistisch simuliert werden (Abb. 8). Damit werden verschiedene Gebiete der Mathematik angesprochen, und wir können schon am Beispiel der filmischen Spezialeffekte beobachten, auf welch breiter Basis die Hochtechnologie Mathematik gefordert ist.

Die Herausforderungen – 3D, 4D, immersiv und interaktiv

Die Visualisierung hat sich in den vergangenen 20 Jahren als mächtiges Werkzeug in der Mathematik etabliert. Sie unterstützt und inspiriert Forschung und Lehre im Fach, und sie profitiert selbst von neuen mathematischen Algorithmen. Die heutige Visualisierung ist noch immer angewiesen auf Entwicklungen im Hardware-Bereich, Rechenleistung der Computer, Aufnahmemöglichkeiten der Digitalisierungsgeräte (Kamera, Video, 3D-Scanner) und schließlich auf die Qualität und Interaktivität von Anzeigegeräten (Monitore, E-Papier und 3D-Drucker, Multi-Touch) bis hin zu Installationen, die ein immersives Eintauchen in virtuelle Welten erlauben. All diese Techniken erfordern die Anwendung einer ganzen Bandbreite von mathematischen Verfahren sowie deren Weiter- und Neuentwicklung. Die Mathematik – gleichzeitig ein Abnehmer und Unterstützer von Visualisierungstechniken – steht vor weiteren fruchtbaren Herausforderungen.

Literatur

[1] G. Gläser und K. Polthier: *Bilder aus der Mathematik*. Spektrum Verlag: Heidelberg 2008
[2] G. Fischer: *Mathematische Modelle.* Vieweg Verlag: Braunschweig 1986
[3] H. A. Schwarz: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 2 Bände. Springer Verlag: Berlin 1890
[4] C. Johnson und C. Hanson: *Visualization Handbook*. Academic Press: London/New York/San Diego 2004
[5] K. Polthier, M. Aigner u. a.: *MathFilm Festival 2008*. DVD – deutsche Fassung. Springer Verlag: Heidelberg 2008
[6] B. Janzen und K. Polthier: *MESH – eine Reise durch die diskrete Geometrie*. DVD. Springer Verlag: Heidelberg 2008

Bildnachweis