Andreas Loos

Mathematik in Chinatown

Er hat ein Medizinstudium abgebrochen, war passionierter Schachspieler und einer der besten Freunde von James Joyce – ein Mathematiker war John F. Byrne nicht. Doch im Jahr 1918 bastelte der in die USA ausgewanderte Ire aus einer leeren Zigarrenkiste eine völlig neuartige Verschlüsselungsmaschine. Das Ding, von seinem Erfinder stolz »Chaocipher« getauft, entstand in demselben Jahr, in dem der deutsche Elektroingenieur Arthur Scherbius in Berlin ein Patent auf eine andere Verschlüsselungsmaschine einreichte. Aus der wurde später die »Enigma«: ein militärisches Geheimnis und Kassenschlager.

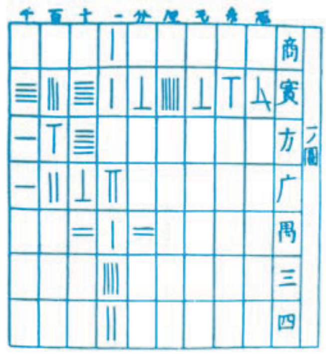
Die Enigma kam in vielen Variationen auf den Markt. Eines aber hatten alle Modelle gemein: Sie klickten sich beim Verschlüsseln eines Textes stur durch eine gewisse Anzahl voreingestellter Permutationen des Alphabets – beim Bestseller Enigma I sind es knapp 17 000. Der erste Buchstabe wird so mit der ersten Permutation verschlüsselt, der zweite mit der zweiten und so weiter.[1] Das Prinzip der Chaocipher ist viel trickreicher: Hier bestimmen die Buchstaben des Klartextes, welche Permutationen in Zukunft gewählt werden. In welcher Weise der Text verschlüsselt wird, hängt also nicht nur (wie bei der Enigma) von der Starteinstellung der Maschine ab, sondern zusätzlich vom Ausgangstext selbst.

Dennoch scheiterte Byrne kläglich. Er schaffte es nicht, seine potenziellen Kunden bei der Navy, den Fernmeldern oder AT&T davon zu überzeugen, dass in seinem Zigarrenkistchen mehr steckte als Kinderkram. Während die Enigma in Bletchley Park mit Spionage, Gruppentheorie und Computern geknackt wurde – unter Mitwirkung des Mathematikers Alan Turing –, verschwand die Chaocipher in Byrnes Büroschrank. Was hatte Byrne falsch gemacht? Seine Verkaufsstrategie treibt heute Marketingleuten Lachtränen in die Augen: Wenn überhaupt, dann brachte er zu Verkaufsgesprächen ein grobes Holzmodell der Maschine mit. Aus Angst vor Ideenklau kam er aber oft mit leeren Händen. Und wenn die Kunden das Verfahren testen wollten, dann stellte er sich tot. Doch das ist nur ein Grund. Ein anderer liegt darin, dass Byrne nicht die mathematische Sprache der Kryptologen sprach. Er erzählte stattdessen von seiner Cousine, die das Prinzip sofort verstanden und es als nobelpreiswürdig erachtet habe. Vielleicht hätte Byrne reich werden können, wenn er das Prinzip der Chaocipher mathematisch dargestellt hätte, vielleicht auch berühmt. Doch er hegte eine Abneigung gegen »mathematisch-mechanistische Argumentationen«, wie er es nannte.

Multidimensionale Urlaubsfotos

Soll Mathematik Verkäufern bei der Arbeit helfen? Jahrhundertelang hatten Mathematiker ein Problem damit, ihre geistigen Höhenflüge einer irdischen Anwendung zuzuführen. Sie hielten das für eine Erniedrigung der »Königin der Wissenschaften«, wie Gauß die Mathematik angeblich getauft hatte.[2] Mathematik müsse »zweckfrei« betrieben werden und dürfe wie Aschenputtel höchstens befristet als »ancilla« für die Naturwissenschaften, Ingenieure und andere Anwender arbeiten, so die weit verbreitete Ansicht. Ähnlich wie Künstler sich von Kunsthandwerkern abgrenzen, belächelten Mathematiker jahrhundertelang das Treiben von Physikern, Chemikern oder Astronomen. Manche lehnten sich noch weiter aus dem Fenster: »Es ist die Naturwissenschaft, gegen die wir unsere stärksten Truppen aktivieren müssen«, hetzte zum Beispiel Henri Poincaré.[3] Der Mathematiker Paul Halmos schrieb einen Aufsatz mit dem Titel »Angewandte Mathematik ist schlechte Mathematik«[4]. Und beiden leistete der Philosoph Arthur Schopenhauer Schützenhilfe:

»Daher ist Rechnen nicht Verstehn und liefert an sich kein Verständniß der Sachen. Dies erhält man nur auf dem Wege der Anschauung, durch richtige Erkenntniß der Kausalität und geometrische Konstruktion des Hergangs. Sogar kann man sagen: wo das Rechnen anfängt,



hört das Verstehn auf: denn der mit Zahlen beschäftigte Kopf ist, während er rechnet, dem kausalen Zusammenhang und der geometrischen Konstruktion des physischen Hergangs gänzlich entfremdet: er steckt in lauter abstrakten Zahlenbegriffen.«[5]

Doch es gibt unzählige Beispiele für interessante Mathematik, die erst durch Anwendungen entstanden ist.

»Die rein-formale Sprache der Geometrie beschreibt treffend die Realität des Raums. In diesem Sinne könnten wir sagen, dass Geometrie erfolgreiche Zauberei ist. Ich sollte gleich eine Umkehrung anfügen: Ist nicht alle Zauberei, sofern sie erfolgreich ist, Geometrie?«, sinniert etwa der Mathematiker René Thom.[6]

Doch was soll Mathematik außerdem leisten, wann handelt es sich dabei um »gute Mathematik« – und was ist Mathematik überhaupt? Über diese Fragen zerbrechen sich seit Jahrtausenden Mathematiker, Physiker und Philosophen die Köpfe. Es kursiert mindestens ein Dutzend verschiedener Philosophien und Bilder der Mathematik, die einander zum Teil fundamental widersprechen. Das wirkt ein bisschen überraschend: Schließlich sind ja Profis für das exakte Definieren am Werk. Doch es ist offenkundig alles andere als leicht, Mathematik exakt zu beschreiben, schon als Momentaufnahme. Zusätzlich verändert sich Mathematik mit der Zeit – und erst recht die Auffassung davon, was gute Mathematik ist und soll.

Wie Erinnerungsfotos aus dem Urlaub zeigen Texte über die Mathematik daher wenig mehr als Schnappschüsse aus der jeweiligen Zeit. Und was darauf zu sehen ist, verrät viel über die Lebensumstände und kulturelle Prägung der »Fotografen«.

Wir wollen im Folgenden eine kleine Auswahl von Sichtweisen auf die Mathematik und ihren Zweck zeigen. Man wird sehen: Das Bild der Mathematik beginnt zu verschwimmen, sobald man es genauer unter die Lupe nimmt. »Mathematik ist multidimensional«[7], schreibt der Mathematiker Terence Tao – vermutlich liegt es daran.

Landschaften in vergangener Zeit

Nur einem oberflächlichen Betrachter scheint alles klar zu sein: Mathematik zeichnet sich durch logische Strenge aus, Abstrahieren, Generalisieren, Deduktion. Sind das nicht Konstanten der Mathematik, über alle Zeiten und menschlichen Befindlichkeiten hinweg?

Die Wahrheit ist: Euklids Zeitgenossen von 300 vor Christus würden heute durch jede Bachelor-Prüfung rasseln. Das liegt nicht daran, dass sie Fehler machten, sondern an einem völlig veränderten Verständnis von Mathematik.[8] Jahrhundertelang kommunizierte man Mathematik induktiv: Beweise wurden anhand von konkreten Zahlenbeispielen geführt, Schüler mussten sich Abstraktion und Verallgemeinerung selbst erarbeiten. Dass die antiken Mathematiker das durchaus taten, belegen ihre erstaunlichen Leistungen, etwa indische Algorithmen zur Näherung der Quadratwurzel aus der Zeit um Christi Geburt: ohne Zweifel Mathematik mit Gütesiegel.

Die Mathematik einfach als die »Wissenschaft der Deduktion« zu definieren scheidet aus einem weiteren Grund aus. Eine Gruppe französischer Mathematiker, die sich ab den 1930er Jahren unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki um eine axiomatische Darstellung der Mathematik bemühte, machte sich Gedanken über die »Architektur der Mathematik« – und nörgelte:

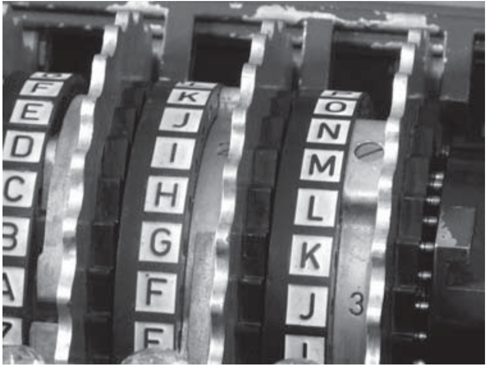
»Es ist eine Binsenweisheit ohne tiefere Bedeutung, zu sagen, dass das deduktive Argumentieren ein vereinigendes Prinzip der Mathematik ist. Eine so oberflächliche Bemerkung zieht sicher nicht die offensichtliche Komplexität der verschiedenen mathematischen Theorien in Betracht, so wie man auch nicht zum Beispiel Biologie und Physik in einer einzigen Wissenschaft vereinigen kann, nur weil beide die experimentelle Methode verwenden.«[9]

Nur – was ist Mathematik dann? Für Bourbaki ist sie ein Gebäude, errichtet auf einem Fundament aus Axiomen. Das ist die Sichtweise, die im Frankreich der 1930er Jahre zum Standard wurde.

Doch das Fotoalbum der Mathematik enthält auch andere Eindrücke. 20 Jahre vor den Bourbakisten haben sich Henri Poincaré und Jacques Hadamard mit der Frage beschäftigt, was mathematisches Arbeiten ist. Beeinflusst von der noch jungen Psychoanalyse gibt der Mathematiker Poincaré 1908 die Antwort:

»Es besteht nicht darin, mathematische Einheiten, die bereits bekannt sind, einfach neu zu kombinieren. Das könnte jeder, aber die Anzahl der so entstehenden Kombinationen wäre unendlich groß und die meisten von ihnen wären nicht von Interesse. Mathematisches Entdecken besteht genau nicht im Herstellen nutzloser Kombinationen, sondern im Herstellen solcher Kombinationen, die nützlich sind und nur eine kleine Minderheit darstellen. Erfindung ist Unterscheidung, Auswahl.«[10]

Verfolgen Mathematiker also ähnlich wie Bildhauer das Ziel, durch Wegschlagen und Abschneiden etwas Sinnvolles herauszuarbeiten? Dass für mathematische



Arbeit viel Kreativität nötig ist, ist unbestritten. Doch sie ist nicht alles. Richard Courant und Herbert Robbins veröffentlichten 1941 ein Buch für interessierte Laien mit dem Titel: *Was ist Mathematik?*. Darin heißt es:

»Der Lebensnerv der mathematischen Wissenschaft ist bedroht durch die Behauptung, Mathematik sei nichts anderes als ein System von Schlüssen aus Definitionen und Annahmen, die zwar in sich widerspruchsfrei sein müssen, sonst aber von der Willkür des Mathematikers geschaffen werden. Wäre das wahr, dann würde die Mathematik keinen intelligenten Menschen anziehen. Sie wäre eine Spielerei mit Definitionen, Regeln und Syllogismen ohne Ziel und Sinn. […] Nur aus der Verantwortung gegen das organische Ganze, nur aus innerer Notwendigkeit heraus kann der freie Geist Ergebnisse von wissenschaftlichem Wert hervorbringen.«[11]

Fast 70 Jahre später führt der Fields-Medaillenpreisträger Sir Michael Atiyah die Metapher des »Organischen« fort:

»Ich stimme ganz und gar nicht mit der Ansicht überein […], man könne einen neuen Zweig der Mathematik erfinden, indem man Axiome 1, 2, 3 aufschreibt und dann weggeht und alleine damit weiterarbeitet. Mathematik hat viel mehr von einer organischen Entwicklung. Sie hat eine lange Geschichte von Verbindungen mit der Vergangenheit und Verbindungen mit anderen Themen.«[12]

Jenseits der Willkür

Bei Courant und Robbins klingt noch mehr durch: Eine Grundhaltung, die in der Philosophie »realistisch« genannt wird. Mathematischen Entitäten kommt in dieser Sicht eine eigene Realität unabhängig von der menschlichen zu, gute Mathematik verfolgt Ziele, die jenseits der Willkür liegen. Die Ideenlehre Platons hat auch heute noch viele Anhänger in der Mathematik.

Als einer ihrer prominentesten Vertreter gilt Godfrey Harold Hardy. Fast zeitgleich mit Courant und Robbins veröffentlichte er seine *Mathematician's Apology*. Angesichts des Zweiten Weltkriegs, der in Europa tobte, trat der 63-Jährige darin den Rückzug an: Er outete sich als Platonist, der alles Mathematische in der Welt als Abklatsch der reinen, idealen Mathematik ansieht. In seinem Aufsatz vergleicht Hardy sich in seiner mathematischen Arbeit mit einem Beobachter, als ob er ferne Berge und Landschaften beschreibe, und versteigt sich zu dem Satz: »Reine Mathematik hat keinen Einfluss auf den Krieg.«[13]

Platoniker haben gute Argumente, etwa die Konsistenz, mit der sich die Mathematik unterschiedlichen Betrachtern präsentiert, ihre Reichhaltigkeit, und das Erstaunen über unerwartete Zusammenhänge, von dem viele Forscherinnen und Forscher berichten können.[14]

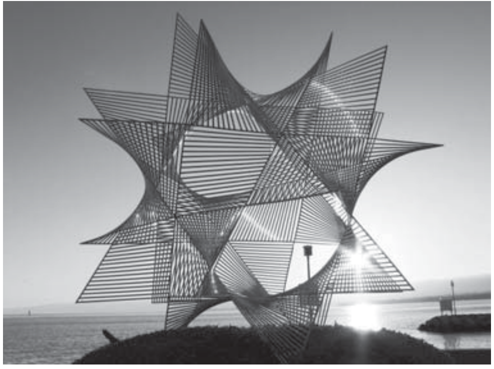
Doch ihre Sichtweise impliziert, dass Mathematik auf einer Expedition im Kopf entdeckt wird, auf Entdeckungsfahrten durch eine abstrakte Landschaft von Zahlen und Mustern. Allerdings vergleicht bereits Hardy die Mathematik (vorsichtig) auch mit der Kunst. »Ein Mathematiker ist wie ein Maler oder ein Poet ein Schöpfer von Mustern. Wenn seine Muster länger überdauern als deren, dann deshalb, weil sie mit Ideen hergestellt werden.«[15]

Tatsächlich ist Mathematik alles andere als weltfern. Wie ließe sich sonst erklären, dass sich in verschiedenen Ländern unterschiedliche mathematische Kulturen herausbilden? Und wie ließe sich begründen, dass einige grundlegende mathematische »Objekte« auf unterschiedliche Weise definiert werden können?

Ein Beispiel sind die reellen Zahlen. Klar ist: Sie dürfen im Zahlensystem nicht fehlen. Doch wie soll man reelle Zahlen definieren? Man kann sie über gewisse Teilmengen der rationalen Zahlen einführen, sogenannte Schnitte, wie es Richard Dedekind 1872 gezeigt hat. Man kann sie aber auch als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen definieren, oder, wie Karl Weierstraß, über beschränkte Reihen mit positiven Gliedern. Drei unterschiedliche Wege, und jeder hat seine Berechtigung.

»Mathematiker haben ein diebisches Vergnügen daran, so zu tun, als seien ihre Definitionen willkürlich. In Wahrheit ist keine Definition willkürlich«, schreibt Gian-Carlo Rota, Philosoph und Mathematiker.[16] »Die Theoreme der Mathematik motivieren die Definitionen genau so, wie die Definitionen die Theoreme motivieren. Eine gute Definition wird ›gerechtfertigt‹ durch die Theoreme, die man mit ihr beweisen kann, so, wie der Beweis eines Theorems ›gerechtfertigt‹ wird, indem er sich auf eine zuvor gemachte Definition bezieht.«[17]

Zudem passiert Mathematik in Gehirnen – und die Gedanken sind weitaus weniger frei, als man lange dachte. Physiologische Studien scheinen zu belegen: Man sieht nur, was man zu sehen gewohnt ist. Und Psychologen bezeichnen als kognitive Dissonanz das schlechte Gefühl, das sich einstellt, wenn man seinen Einstellungen zuwiderhandelt. Mathematiker kümmern sich um die Themen, die ihnen auffallen, die bekannte Muster ent-



halten, die ihnen ein mehr oder minder gutes Gefühl geben, die sie schön oder interessant finden. Dabei ist Mathematik konservativ: Die Einführung neuer Konzepte ist im Allgemeinen harte Arbeit, die übrigens deutlich leichter wird, sobald ein Meinungsführer dabei Geburtshilfe leistet.[18] So gesehen sind Mathematikerinnen und Mathematiker tatsächlich nicht frei in ihren Schöpfungen – aber ganz anders, als es Plato sich gedacht hat. Mathematik ist ziemlich menschlich.

Probleme lösen, Theorien finden

Freeman Dyson, Mathematiker und Physiker, wählt dagegen einen ganz anderen Blickwinkel auf die Mathematik – die Froschperspektive, in einem Vortrag mit dem Titel »Birds and Frogs«:

»Die Vögel erfreuen sich an Konzepten, die unsere Ideen vereinigen, und bringen verschiedene Probleme aus unterschiedlichen Teilen der Landschaft zusammen. Die Frösche leben im Schlamm darunter und sehen nur die Blumen, die nebenan wachsen. Sie erfreuen sich an den Details bestimmter Objekte und lösen Probleme, eines nach dem anderen.«[19]

Ob in der mathematischen Landschaft wirklich Vögel und Frösche in Reinkultur leben, darüber kann man streiten. (Dyson selbst sieht sich jedenfalls als echten Frosch.) Eigentlich ist es aber zweitrangig – entscheidend ist, dass sich offenkundig mindestens zwei weitere Ziele der Mathematik ableiten lassen: das Lösen von Problemen und das Errichten eines Theoriegebäudes. Allerdings sind beide eng miteinander verwoben, wie der Mathematiker Michael Atiyah – wohl eher dem Typ »Vogel« zuzuordnen – erklärt:

»Ich denke bei Mathematik nicht einfach an abstrakte Theorie, ohne Gehalt. Eine Theorie wird interessant, wenn sie viele spezielle Probleme löst und sie in den richtigen Kontext stellt; sie ermöglicht uns, sie alle zu verstehen. Ziemlich oft entsteht eine Theorie, weil jemand zuerst ein sehr schweres Problem gelöst hat und dann versucht hat, zu verstehen, was da passiert – man bastelt seine eigene Superstruktur darum herum. Weiche Theorie, die keine harten Probleme enthält, ist nutzlos.«

Um die Sache noch komplizierter zu machen: Probleme lassen sich auf unterschiedliche Arten lösen, mit mehr oder weniger Nutzen für die Nachwelt. Der von Euklid überlieferte Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen etwa ist nur eine Existenzaussage – zur Berechnung neuer Primzahlen taugt er nicht. Cramers Regel dagegen macht nicht nur Aussagen über die Existenz von Lösungen eines linearen Gleichungssystems, man kann damit auch deren Lösungen finden.

Viele Lösungen fördern das Verständnis

Kein Wunder, dass Atiayh noch ein weiteres Ziel für die Mathematik parat hat:

»Für jedes gute Theorem sollte man eine Reihe von Beweisen haben, je mehr, desto besser. […] Typischerweise hat jeder Beweis seine Stärken und Schwächen und verallgemeinert in eine andere Richtung. […] Es gibt unterschiedliche Gründe für Beweise, sie haben unterschiedliche Vorgeschichten und Hintergründe. […] Wenn man nicht aus verschiedenen Richtungen auf ein Problem blicken kann, dann ist es vermutlich nicht sehr interessant; je mehr Perspektiven, desto besser!«

Vielleicht kann man sogar das *Entdecken* guter Probleme als Ziel mathematischer Arbeit ansehen. André Weil, einer der Väter von Bourbaki, schrieb 1950 einen Aufsatz mit dem Titel »Zukunft der Mathematik«, der von den Kriegserfahrungen des Autoren geprägt ist – Weil hatte mehrere Jahre in (Militär-)Haft gelebt und gearbeitet. Weil mahnt, dass das Grübeln über die Grundlagen der Mathematik nicht weiterführt: »Obschon die Logik die Hygiene des Mathematikers ist, ist sie keine Nahrungsquelle; die großen Probleme liefern das tägliche Brot, mit dem sie gedeiht.«[20]

Mathematik mit Google-Rank

Und dann gibt es noch die viel beschworene Schönheit der Mathematik. Die meisten Mathematiker sind sich zum Beispiel einig, dass der Beweis des Vier-Farben-Satzes zwar ein Stück harte Mathematik, aber in mehrerer Hinsicht ganz schön hässlich ist. Um zu zeigen, dass man nur vier Farben benötigt, um eine ebene Landkarte so zu färben, dass Länder mit einer gemeinsamen Grenze unterschiedliche Farben besitzen, fanden Kenneth Appel und Wolfgang Haken 1976 nämlich einen Beweis, der nicht nur auf eleganten Argumenten beruht, sondern auch auf dem Prüfen von 1818 Fallunterscheidungen – und das überließen sie einem Computer. Obendrein hat der Vier-Farben-Satz wenig weitere Anwendung in der Mathematik gefunden.

Ein modernes Kriterium für ›gute‹ Mathematik aber ist deren Vernetzung in der Wissenschaft. Oder, wie es der Mathematiker und Bestsellerautor Marcus du Sautoy ausdrückt, der »Google-Rank« eines Problems oder einer

Theorie[21]: Gut ist Mathematik, die viele »Links« zu anderen Problemen oder Fachbereichen besitzt. Das Vier-Farben-Theorem hat einen niedrigen Google-Rank.

Antinomien, wohin man blickt

Wir können festhalten: Mathematik ist gut, wenn sie sich im Lebensalltag von jedermann praktisch anwenden lässt – sie muss aber nicht Anwendung finden, um gut zu sein. Gute Mathematikerinnen oder Mathematiker finden Probleme – oder sie sind gut, wenn sie Probleme lösen. Sie erschaffen Mathematik – oder sie entdecken sie. Mathematik ist etwas Organisches – oder ein Gebäude. Mathematik existiert unabhängig vom Kopf – oder sie wird von Gehirnen erdacht.

Kurz: Die Vermutung liegt nahe, dass jede Teilmenge von n Mathematikern mindestens n+1 unterschiedliche Zwecke für ihre Arbeit formulieren kann. Der Mathematiker und Fields-Medaillenträger Terence Tao allein hat in einem Aufsatz schon fast zwei Dutzend Kriterien für gute Mathematik aufgelistet – von der tiefen Einsicht oder dem Nutzen für die Erziehung[22] bis zu Schönheit, Eleganz oder Tiefgründigkeit. Und er zieht eine interessante Schlussfolgerung: Eine Definition von »guter Mathematik« ist sinnlos.

»Wir riskierten Arroganz und Hybris; insbesondere könnten wir dadurch verpassen, exotische Beispiele echten mathematischen Fortschrittes zu verpassen, weil sie aus der Mainstream-Definition von guter Mathematik herausfallen.«[23]

Nicolas Bourbaki verfasste 1950 einen Essay über die »Architektur der Mathematik«. Darin heißt es:

»Sie ist wie eine große Stadt, deren Außenbezirke und Vorstädte sich fortwährend weiter entwickeln und in etwas chaotischer Art in das umliegende Land ausdehnen, während das Zentrum von Zeit zu Zeit neu erbaut wird, jedes Mal in Einklang mit einem klareren Plan und einer höheren Ordnung. Während die alten Stadtteile mit ihren verwinkelten Gassen abgerissen werden, weisen neue Avenuen in Richtung Peripherie, direkter, breiter und mit mehr Platz.«[24]

Das erinnert an einen Satz von Woody Allen: »Können wir das Universum tatsächlich ›kennen‹? Mein Gott, es ist doch schon schwer genug, sich in Chinatown zurechtzufinden!«[25] So ungefähr denken wohl die meisten modernen Mathematikerinnen und Mathematiker. Sie kümmern sich wenig darum, was Mathematik ist – sie bauen sie einfach weiter.

Hätte Chaocipher-Erfinder John F. Byrne von dieser bunten Vielfalt gewusst, dann wäre sein Urteil über Mathematik sicher weniger einseitig ausgefallen. Vielleicht wäre er dann heute ein berühmter Kryptologe.

* Der Autor dankt Günter M. Ziegler für wertvolle Hinweise.

1 Siehe zum Beispiel L. Kruh und C. Deavours: »The Commerical Enigma: Beginnings of Machine Cryptography«, in: *Cryptologia*, Vol. 26, Nr. 1 (2002), S. 1–16
2 Erstmals (ohne Beleg) behauptet von Gauß' erstem Biografen Wolfgang Sartorius von Waltershausen (*Gauß zum Gedächtnis*. Leipzig: S. Hirzel 1856)
3 H. Poincaré: »The Future of Mathematics«, in: *Science and Method*, etwa in: *The Foundations of Science* (1902–1908). New York: The Science Press 1913
4 P. Halmos: »Applied mathematics is bad mathematics«, in: *Mathematics tomorrow* (Hg. von L. A. Steen). New York: Springer 1981
5 A. Schopenhauer: *Senilia*. München: C. H. Beck 2010
6 R. Thom: *Structural Stability and Morphogenesis.* New York: Perseus Books 1994
7 T. Tao: »What is Good Mathematics?«, in: *Bulletin of the American Mathematical Society* 44 (2007), S. 623–634
8 Zum Wandel des Beweises siehe zum Beispiel: I. Kleiner: »Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective«, in: *Mathematics Magazine*, Vol. 64, Nr. 5 (1991), S. 291–314
9 N. Bourbaki: »The Architecture of Mathematics«, in: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 57 (1950), S. 221–232
10 H. Poincaré: »Mathematical Discovery«, in: *Science and Method*, a. a. O. Ähnlich argumentiert Marcus du Sautoy. Siehe M. du Sautoy: »Exploring the Mathematical Library of Babel«, in: J. Polkinghorne (Hg.): *Meaning in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press 2011, S. 17–25
11 R. Courant und H. Robbins: *Was ist Mathematik?* Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 2010
12 R. Minio: »An Interview with Michael Atiyah«, in: *The Mathematical Intelligencer,* Vol. 6, Nr. 1 (1984), S. 9–19
13 G. H. Hardy: *A Mathematician's Apology*. Cambridge: Cambridge University Press 1940
14 J. Polkinghorne: »Mathematical Reality«, in: ders. (Hg.): *Meaning in Mathematics*, a. a. O., S. 27–34
15 G. H. Hardy: *A Mathematician's Apology*, a. a. O.
16 G.-C. Rota: »Mathematics and Philosophy: The Story of a Misunderstanding«, in: *The Review of Metaphysics*, Vol. 44, Nr. 2 (Dez. 1990), S. 259–271
17 Ebd.
18 Vgl. M. J. Crowe: »Ten ›Laws‹ Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics«, in: *Historia Mathematica* 2 (1975), S. 161–166
19 F. Dyson: »Birds and Frogs«, in: *Notices of the AMS*, Vol. 56, Nr. 2 (2009), S. 212–223. Timothy Gowers spricht sogar in Anlehnung an C. P. Snow von »zwei Kulturen«; siehe T. Gowers: »The Two Cultures of Mathematics«, in: V. I. Arnold: *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. American Mathematical Society 2000, S. 65–78
20 A. Weil: *The Future of Mathematics,* a. a. O. Er nennt zum Beispiel die Hilbert'schen Probleme: D. Hilbert: »Mathematische Probleme«, in: *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, Vol. 3 (1900), S. 253–297
21 M. du Sautoy: »Exploring the Mathematical Library of Babel«, in: J. Polkinghorne (Hg.): *Meaning in Mathematics*, a. a. O.
22 Mathematik als Erziehungsmittel ist übrigens schon bei Plato ein wichtiger Aspekt; siehe Plato: *De Re Publica*.
23 T. Tao: *What is Good Mathematics?*, a. a. O.
24 N. Bourbaki: »The Architecture of Mathematics«, in: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 57, Nr. 2 (1950), S. 221–232
25 W. Allen: »My Philosophy«, in: ders.: *Getting Even*. New York: First Vintage Books Edition 1978. »Wenn die Leute nicht glauben, dass Mathematik einfach ist, dann nur deshalb, weil sie nicht kapieren, wie kompliziert das Leben ist«, soll John von Neumann 1947 auf dem ersten Meeting der Association for Computing Machinery gesagt haben. Vgl. F. L. Alt: »Archaeology of Computers – Reminiscences 1945–1947«, in: *Communications of the ACM*, Vol. 15, Nr. 7 (Juli 1972), S. 693–694