Hans Triebel

# Mathematische Modellbildung

(Vortrag in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse am 19.November 1993; erweiterte Fassung)

In: Berichte und Abhandlungen / Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften (vormals Preußische Akademie der Wissenschaften) ; 1.1995, S. 13-19

Persistent Identifier: urn:nbn:de:kobv:b4-opus-28448

Hans Triebel

# Mathematische Modellbildung

*(Vortrag in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse am 19. November 1993; erweiterte Fassung)*

## *1. Was ist Mathematik?*

Es ist unbestritten, daß Mathematik eine sehr alte Wissenschaft ist. Was ist aber ihr Wesen, und was grenzt sie gegen andere Wissenschaften ab? Wenn man nicht bei Oberflächlichkeiten stehenbleiben möchte, muß man auf den mathematischen Ehrenkodex verweisen, wonach die induktiven Findungen der Mathematik der deduktiven Präsentation bedürfen. Oder anders ausgedrückt: Mathematische Sätze beruhen auf Annahmen (Axiomen), und die behaupteten Aussagen müssen aus ihnen durch rein logische Schlüsse (ohne weitere Zutaten) hergeleitet werden. Die *Erfindung* des mathematischen Beweises in diesem Sinne kann man als die Geburtsstunde der *modernen* Mathematik ansehen. Gelegentlich wird hierfür Pythagoras (etwa 530 v.u.Z.) haftbar gemacht, in jedem Fall hat sich aber die nachfolgende griechische Mathematik in hohem Maße diesem Ideal verpflichtet gefühlt, wie z. B. die Elemente des Euklid (etwa 300 v.u.Z.) zeigen. Nachdem man so erkannt hat, daß der logische Beweis das prägende Charakteristikum moderner Mathematik ist, bleibt nur noch die Frage nach dem Gegenstand der Mathematik. Hier hat wohl jeder mehr oder weniger zutreffende Vorstellungen. Man hat auch immer wieder versucht, griffige Formeln zu finden, etwa (bezogen auf unsere Zeit): Mathematik ist die Lehre der logischen Strukturen. Nur solche Lehrformeln entpuppen sich rasch als Leerformeln: Während die Mathematiker keine Schwierigkeiten haben, das Wort „logische Struktur“ mit Substanz zu unterlegen, kann eben dieses der Außenstehende nicht, womit das Ganze wertlos wird. Da macht man wohl am besten aus der Not eine Tugend und erklärt das zum Gegenstand der modernen Mathematik, was sich im Laufe der reichlich zweitausendjährigen Geschichte hinter ihrer Fahne versammelt hat. Wenig ist es wahrlich nicht.

Akzeptiert man, daß mathematische Theorien (zumindest im Prinzip) auf Axiomensystemen beruhen, steht man scheinbar vor einem neuen Dilemma. Ganz losgelöst von der Frage der Widerspruchsfreiheit der Axiome oder der Frage, ob man nicht etwa überflüssige Axiome aufgeführt hat (die aus den verbleibenden herleitbar sind), steht man anscheinend vor dem Problem grenzenloser Willkür der freien Erfindung „logischer Systeme". Die hohe Effizienz der Mathematik wird zum nicht nachvollziehbaren Mirakel. Der Verdacht steigt auf, daß es vielleicht zwei Mathematiken gibt (das englische „mathematics" ist der Plural), eine für die „Spinner" im Elfenbeinturm, die andere zum Hausgebrauch im realen (auch naturwissenschaftlichen) Leben. Dem ist aber nicht so. Die Mathematiker sind sich einig, daß sie nicht irgendwelche „logischen Systeme" suchen, sondern tragfähige Theorien, die reichhaltige Strukturen abwerfen und ästhetischen Glanz versprechen. Und es sind oftmals gerade diese scheinbar doch so willkürlichen Gebilde, die dann auf gar wundersame Weise (physikalische) Realität zu modellieren gestatten. Das macht es dann begreiflich, daß die Mathematiker das Gefühl haben, derartige Strukturen (Axiomensysteme) nicht *erfunden*, sondern *gefunden* zu haben. Sie sind *Entdecker* und nicht *Erfinder* und können sich des Eindrucks nicht erwehren, daß sie (oftmals nach vielen Irrungen und Wirrungen) unabhängig von ihnen existierende (Platonische) Ideenlandschaften entdecken (gelegentlich stellen sie fest, daß andere schon vor ihnen da waren). Gute mathematische Theorien haben eine eigene Existenz, und die dort lebenden Formeln sind klüger als Menschen. Sie bergen ein reichhaltigeres Innenleben in sich, als ihre (Er-)Finder einstens gewagt hatten zu hoffen, oder, mangels ausreichender Phantasie, nicht hatten ahnen können.

Akzeptiert man dieses Selbstverständnis der Mathematik (und der Mathematiker), dann kommt man vielleicht doch der so unverständlichen Effizienz der Mathematik (in bezug auf Naturwissenschaften und Technik) einen Schritt näher, obwohl ihre Theorien die freien (um nicht zu sagen willkürlichen) Erfindungen des menschlichen Geistes zu sein scheinen. Es gehört wohl zu den eindrucksvollsten Erlebnissen eines Mathematikers (Physikers usw.), daß man mit einer mathematischen Formel (Entschuldigung) dem Lieben Gott in die Karten gucken kann. Oder, wie es Galilei formulierte, wonach nur der im großen Buch der Natur lesen kann, der ihre Sprache versteht, und das ist die Mathematik. Nun wäre es aber geradezu irrwitzig anzunehmen, daß jeder einzelne Mathematiker gleichsam die Inkarnation des Spannungsverhältnisses zwischen Geistes- und Naturwissenschaften ist, dem die Mathematik dankenswerter- und privilegierterweise ausgesetzt ist. [Zu DDR-Zeiten hat es übrigens solche Tendenzen gegeben, galt es doch, den Westen zu überholen, was zugleich in seltsamer Weise der Mitteilung widersprach, daß selbiger am Abgrund steht, und das auch noch gesetzmäßig.] Nach Hilbert (1862–1943) haben es die Mathematiker aller Zeiten abgelehnt, die Anwendungen als *Gradmesser* der Mathematik gelten zu lassen. Tatsächlich ist die Haltung der einzelnen Mathematiker sehr unterschiedlich, und diesbezügliche Bewertungen hängen auch noch vom eigenen Standpunkt ab. Hier ein (wie mir scheint) treffliches Beispiel:

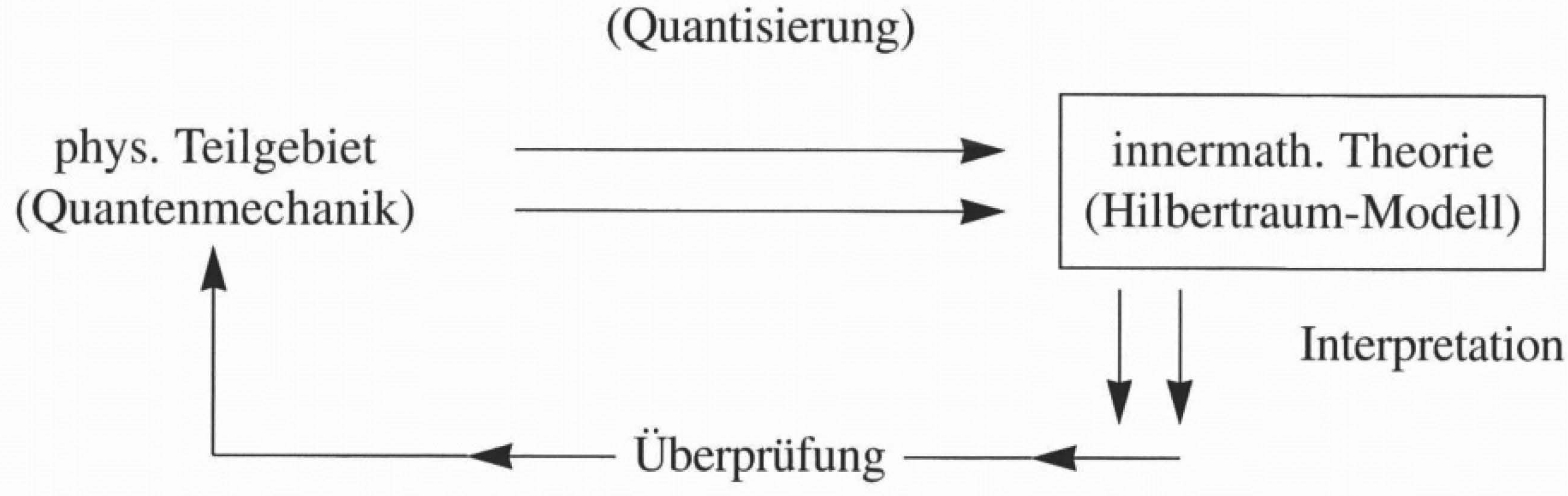
Littlewood (1885–1977) war in beiden Weltkriegen Berater der Britischen Regierung und hat in dieser Eigenschaft (anscheinend sehr erfolgreich) ballistische Geschoßbahnen berechnet. Dieser Sachverhalt findet sowohl in den Lebenserinnerungen von Hardy (1877–1947), (Hardy, 1969), als auch bei Wiener (1894–1964), (Wiener, 1964), Erwähnung. Während Hardy (jeglicher Anwendung abhold) darauf hinweist, daß selbst ein so überragender Mathematiker wie Littlewood an den Anwendungen gescheitert ist, stellt Wiener (ein angewandter Mathematiker der Extraklasse) die Erfolge Littlewoods als leuchtendes Beispiel heraus. [Nach Hebbel hat in einem guten Drama jeder recht.]

## *2. Modellbildung*

Gute mathematische Theorien führen *also* eine Art geistiges Eigenleben, und es ist das Bestreben der Mathematiker, ihnen die mehr oder weniger gut gehüteten Geheimnisse zu entreißen. So gesehen, ist die Analogie zu naturwissenschaftlichen Theorien und naturwissenschaftlichen Forschungen offensichtlich. Die Frage ist, können die beiden sich finden? Notwendig hierfür scheint zu sein, daß die in Rede stehende naturwissenschaftliche Theorie ein hohes Maß an Mathematisierung zuläßt. Schließlich handelt es sich nicht darum, Mathematik hin und wieder (oder zwischendurch) als Argumentationshilfe einzusetzen, sondern das Ganze zu axiomatisieren oder zu modellieren. Das wirft eine Reihe von Fragen auf. Da ist zunächst das Problem, ob sich die Mathematiker überhaupt hiermit beschäftigen sollten, da es sich doch um eine brotlose Kunst handelt, wie gelegentlich aus Physikerkreisen (mißverständlicherweise, wie sich zeigen wird) zu hören ist. Wenn ja, wie formalisiert man diese Aufgabe? Ferner ist zu klären, was Axiomatik, oder besser Modellbildung, leisten kann und was nicht. Und schließlich sind natürlich überzeugende Beispiele gefragt.

Zur ersten Problematik läßt man am besten Hilbert zu Wort kommen. In seinem berühmten Vortrag *„Mathematische Probleme“* auf dem Internationalen Mathematikerkongreß im August 1900 in Paris hat er in einzigartiger Weise 23 Probleme formuliert, die die Mathematik dieses Jahrhunderts nachhaltig beeinflußt haben: [Tatsächlich hat er aus Zeitgründen nur 10 dieser Probleme vorgetragen. Die schriftliche Fassung in dem Kongreßbericht enthält die volle Liste dieser Probleme], (Albers, Alexanderson, Reid, 1987) und (Alexandrov (Hg.), 1971). Das 6. Problem *„Mathematische Behandlung der Axiome der Physik“* (es gehört zu den vorgetragenen) beginnt mit den Worten: *„Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahr-*

*scheinlichkeitsrechung und die Mechanik.*" (Dank ihrer nachfolgenden Axiomatisierung ist heute die Wahrscheinlichkeitsrechnung, oder besser Stochastik, ein wesentliches Teilgebiet der Mathematik.) Axiomatisierung weit fortgeschrittener physikalischer Teildisziplinen wird somit primär als innermathematische Aufgabe gesehen.
Das führt sofort (oder trotzdem) zur Frage, was Axiomatik eigentlich zu leisten in der Lage ist. Eine physikalische Teildisziplin (begrenzt nicht nur durch den Gegenstand, sondern auch durch die angestrebte Genauigkeit der Beschreibung) ist wohl erst dann axiomatisierbar, wenn sie eine erste Entwicklungsphase abgeschlossen hat und wenn zumindest erahnbar ist, was das adäquate mathematische Instrumentarium ist. Die gelegentlichen Versuche von Mathematikern, sehr frühzeitig Axiomatik zu betreiben, in der Hoffnung, daß sich die Natur danach richtet, scheinen mir nicht sehr erfolgversprechend zu sein. [Zu DDR-Zeiten gab es den Slogan „Überholen ohne einzuholen". Das klingt sehr gut, hat nur einen Fehler, es funktioniert selten.] Was leistet dann Axiomatik aus der Sicht des forschenden Physikers? Der Kommentar der Physiker *„Das wissen wir längst"* ist ebenso richtig wie fehl am Platz. Zur aktuellen Forschung an den Frontlinien der (theoretischen) Physik im unwegsamen Gelände kann, so denke ich, Axiomatik wenig beitragen. Aber sie befestigt jene Teile, die nunmehr Etappe sind, legt breite Wege an, schafft Sicherheit und erlaubt der nachfolgenden Forschungsgeneration kraftsparend an die Frontlinien zu gelangen und dort weiter vorzudringen als ihre Vorgänger. Und das ist gar nicht wenig und doch wohl ein Wesenszug naturwissenschaftlicher Forschung.
Bleibt die Frage der Formalisierung. Nach dem bisher Gesagten ist die Prozedur fast vorgezeichnet. Gegeben sei ein Teilgebiet der Physik mit einem gewissen Reifegrad und einem erkennbaren mathematischen Instrumentarium. Gesucht ist eine erahnbare „gute" mathematische Theorie (mit intellektuellem Eigenleben), die die gewünschte Axiomatisierung leisten könnte. Dann muß man noch sagen, wie man in diese „black box" hineinkommt und wie man aus ihr herauskommt. Am Beispiel der Quantenmechanik ist dies durch die Worte „Quantisierung" und „Interpretation" gekennzeichnet. Der Moment der Wahrheit ist dann die Überprüfung durch Vergleich mit experimentellen Daten.



## *3. Das Hilbertraum-Modell der Quantenmechanik*

Es würde zu weit führen, das Hilbertraum-Modell der Quantenmechanik im Detail darzustellen. Vielmehr beschränken wir uns auf ein einfaches, aber doch aussagekräftiges Beispiel, das die Problematik deutlich macht und das das von Physikern und Mathematikern gleichermaßen liebevoll gepflegte Spannungsverhältnis etwas beleuchtet: Das Wasserstoffatom mit Kern im Nullpunkt des $\mathbf{R}^3$ und einem darum „kreisenden" Elektron (Masse m, Ladung e). Quantisiert man das, was Mechanik und Elektrodynamik liefern, gelangt man zu dem Differentialausdruck (Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms)

$$\mathscr{H}\mathrm{f} = -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\Delta\mathrm{f} - \frac{e^2}{|\mathrm{x}|}\mathrm{f},$$

wobei $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ das Plancksche Wirkungsquantum und $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

ist. Die Axiomatik verlangt, daß $\mathscr{H}$ ein selbstadjungierter Operator in einem geeigneten Hilbertraum ist. Das heißt, die erforderlichen mathematischen Zutaten zu $\mathscr{H}$ sind ein Hilbertraum und ein Definitionsgebiet *dom* $\mathscr{H}$ von $\mathscr{H}$. Bezüglich des Hilbertraumes bietet sich natürlicherweise $\mathrm{L}_2$ ($\mathbf{R}^3$), der Raum der komplexwertigen quadratisch integrierbaren Funktionen im $\mathbf{R}^3$, an. Als *dom* $\mathscr{H}$ könnte man etwa *dom* $\mathscr{H}$ = D ($\mathbf{R}^3$) (Gesamtheit der beliebig oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen in $\mathbf{R}^3$ mit kompaktem Träger) oder *dom* $\mathscr{H}$ = S ($\mathbf{R}^3$) (der Schwartz-Raum der rasch fallenden Funktionen) wählen. In beiden Fällen ist $\mathscr{H}$ ein symmetrischer Operator, also

$$(\mathscr{H}\mathrm{f}, \mathrm{g})_{\mathrm{L}_2} = \int(\mathscr{H}\mathrm{f})(\mathrm{x})\,\overline{\mathrm{g}(\mathrm{x})}\,\mathrm{dx} = (\mathrm{f}, \mathscr{H}\mathrm{g})_{\mathrm{L}_2}.$$

Aber symmetrisch ist nicht unbedingt selbstadjungiert, und letzteres wird zwingend von der Axiomatik verlangt. Das ist nun eine typische Stelle, wo Physiker und Mathematiker so herrlich aneinander vorbeireden können. Der Mathematiker muß auf Selbstadjungiertheit bestehen, der Physiker weist darauf hin, daß der obige symmetrische Operator (in beiden Fassungen) schon alles liefert, was er zu wissen wünscht. Wie gesagt, nach Hebbel hat in einem guten Drama jeder recht, so auch hier. Der obige Operator ist nämlich wesentlich selbstadjungiert, sein Abschluß $\overline{\mathscr{H}}$ ist somit selbstadjungiert. Die Prozedur des Abschlusses eines Operators enthält aber keine Freiheiten mehr: Alle denkbaren Informationen, die $\overline{\mathscr{H}}$ enthält, kann man auch schon $\mathscr{H}$ entlocken. Physikalisch ist das zufriedenstellend, mathematisch nicht.

Was ist also *dom* $\overline{\mathcal{H}}$? Die Antwort lautet:

$$dom\ \overline{\mathcal{H}} = W_2^2\ (\mathbf{R}^3),$$

der Sobolev-Raum der Funktionen $f \in L_2(\boldsymbol{R}^3)$, deren (Distributions-)Ableitungen

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}$ ebenfalls zu $L_2(\mathbf{R}^3)$ gehören.

[Ganz nebenbei gesagt: $W_2^2\ (\mathbf{R}^3)$ ist ein Funktionenraum, und die Theorie der Funktionenräume ist mein eigentliches Forschungsgebiet, aber natürlich nicht nur $W_2^2\ (\mathbf{R}^3)$.] Die Spektraltheorie des (nunmehr) selbstadjungierten Operators $\overline{\mathcal{H}}$ führt u. a. zu den Eigenwerten von $\overline{\mathcal{H}}$, also jenen rellen (in unserem Fall negativen) Zahlen E, für die es ein Element $f \in dom\ \overline{\mathcal{H}}$, $f \neq 0$, gibt mit

$$\overline{\mathcal{H}} f = E f \qquad \text{(Eigenelement).}$$

Diese Zahlen E sind nun von fundamentaler Bedeutung, sind sie doch die „Energieniveaus" der stationären Zustände des Wasserstoffatoms. Springt das Wasserstoffatom von einem stationären Zustand (mit Energieniveau $E_1$) in einen anderen stationären Zustand (mit Energieniveau $E_2$), so kann gemäß „Interpretation" (Bohrsches Postulat) elektromagnetische Strahlung der Frequenz

$$\nu = \frac{1}{h}\, |E_1 - E_2|$$

absorbiert oder emittiert werden. Die Überprüfung ist dann der Vergleich mit den bekannten Spektrallinien des Wasserstoffatoms. Die Übereinstimmung ist phantastisch und tief beeindruckend. Also doch ein *„Mirakel"*.

Die innermathematische Theorie, die hier zum Zuge kommt, ist die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum (wohl eine der glanzvollsten Theorien der Mathematik unseres Jahrhunderts). Üblicherweise werden mathematische Thorien um ihrer selbst willen entwickelt, und erst später erkennt man gegebenenfalls ihre Nützlichkeit zur Axiomatisierung physikalischer Theorien. Ein Paradebeispiel hierfür ist die Riemannsche Geometrie (in ihrer indefiniten Ausgabe) als mathematisches Fundament der *A*llgemeinen *R*elativitäts*T*heorie (kurz: ART). Im Falle der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren im abstrakten Hilbertraum ist die Sachlage etwas anders. Sie ist Ende der zwanziger und Anfang der dreißiger Jahre dieses Jahrhunderts aus der direkten Notwendigkeit der soliden mathematischen Fundierung der Quantenmechanik entstanden. Das gibt es also auch.

## *Literatur*

D. J. Albers, G. L. Alexanderson, C. Reid, 1987: ICM, International mathematical congresses, Springer-Verlag

P. S. Alexandrov (Hg.), 1971: Die Hilbertschen Probleme, Leipzig (Akad. Verlagsgesellschaft)

G. H. Hardy, 1969: A mathematician's apology, Cambridge (Univ. Press)

N. Wiener, 1964: I am a mathematician, Cambridge (MIT Press)