Carl Friedrich Gethmann

Wahrheit und Beweisbarkeit : Heytings formale Regeln der intuitionistischen Logik und ihre philosophische Bedeutung

(Vortrag in der gemeinsamen Sitzung der Geisteswissenschaftlichen und der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse am 26. November 1999)

In: Berichte und Abhandlungen / Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften (vormals Preußische Akademie der Wissenschaften) ; 8.2000, S. 45-70

Persistent Identifier: urn:nbn:de:kobv:b4-opus4-32089

Carl Friedrich Gethmann

Wahrheit und Beweisbarkeit.
Heytings formale Regeln der intuitionistischen Logik und ihre philosophische Bedeutung

(Vortrag in der gemeinsamen Sitzung der Geisteswissenschaftlichen und der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse am 26. November 1999)

Vor fast genau 70 Jahren, am 19. Dezember 1929, behandelte die Physikalisch-mathematische Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften in ihrer 33. Sitzung zwei Arbeiten von Arend Heyting aus Enschede, die anschließend in den *Sitzungsberichten* der Klasse im Jahre 1930 im Druck erschienen.[1] Daß dieses Ereignis runde 70 Jahre zurückliegt, ist freilich ein recht oberflächlicher Anlaß, daran zu erinnern. Das Datum wäre keiner weiteren Beachtung wert, wenn es nicht in den Kontext eines wieder erwachten Interesses an der intuitionistischen Logik, ihren sprachphilosophischen Prämissen und Präsuppositionen und ihren Konsequenzen für Mathematik und Informatik fiele. Durch Heytings hundertsten Geburtstag im Jahre 1998 und das bei solchen Anlässen übliche Aufkommen an Publikationen erfuhr die Diskussion um den Intuitionismus eine zusätzliche Neubelebung.[2]

Auf Seiten der *Philosophie* freilich ist das Interesse nie vollständig verebbt. Überblicksartig lassen sich folgende Diskussionskreise und -stränge unterscheiden:

(1) Schon im Wiener Kreis der zwanziger Jahre gab es Philosophen, die mit Brouwers Vorstellungen sympathisierten, wie F. Kaufmann[3] und K. Menger[4], deren Debatten mit den anderen Mitgliedern des Wiener Kreises wohl nicht ohne Einfluß auf Wittgenstein gewesen sind.

(2) Vor allem unter Einfluß der Husserlschen Phänomenologie wurde eine später als „Semi-Intuitionismus" bezeichnete, zwischen Brouwer und Hilbert vermittelnde Position diskutiert, an deren Entwicklung Philosophen und Mathe-

---

1 Heyting 1930a; Heyting 1930b.

2 Davon zeugt beispielsweise das Heyting-Symposium in Amsterdam 1998; s. ferner Hesseling 1999; van Dalen 1999.

3 Kaufmann 1930.

4 Menger 1930/31.

matiker wie H. Weyl[5] und O. Becker[6] teilnahmen. Die Debatte hat E. Husserl bei der Abfassung seiner Schrift *Formale und transzendentale Logik* zu erheblichen Revisionen seiner frühen Logiktheorie geführt.[7]

(3) Wittgensteins bedeutungstheoretischer Pragmatismus wurde nach einem Bericht H. Feigls wesentlich durch einen Vortrag Brouwers in Wien im Jahre 1929 angeregt.[8] Der Einfluß der Diskussion um den Intuitionismus ist zum Beispiel in Wittgensteins Schrift *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* unübersehbar.[9]

(4) Die von G. Gentzen[10] ausgehende Tradition der Beweistheorie hat auf der Basis der von Gentzen eingeführten Konzeption der Regellogik („direkte Semantik") starke bedeutungstheoretische Affinitäten zum Intuitionismus entwickelt.[11]

(5) Der methodische Konstruktivismus der Erlanger Schule (P. Lorenzen und W. Kamlah sowie ihre Schüler K. Lorenz, F. Kambartel und C. Thiel) wurde in seiner Logikkonzeption weitgehend durch Heyting und seinen Schüler E. W. Beth bestimmt. Hier wurden auch schon die sprachphilosophischen Prämissen und Konsequenzen, die mit der intuitionistischen Logikauffassung zusammenhängen, in allen wichtigen Grundzügen entwickelt.[12]

(6) In jüngerer Zeit sind es vor allem der Oxforder Sprachphilosoph und Logiker M. Dummett und seine Schüler (insbesondere C. Wright und Neil Tennant), die sich für ihren semantischen Anti-Realismus ausdrücklich auf den Intuitionismus berufen.[13] Die von diesem Kreis ausgehende Kritik an der post-analytischen Sprachphilosophie (z. B. bei H. Putnam, D. Davidson und W. V. O. Quine) bestimmt die aktuelle Diskussion in der theoretischen Philosophie.[14]

---

5 Weyl 1921.

6 Becker 1927; vgl. jetzt Gethmann 2000a.

7 Vgl. dazu Gethmann 1999.

8 Feigl 1968: S. 639.

9 Es ist bemerkenswert, daß Wittgenstein sich gerade in seiner (1929 beginnenden) „mittleren Phase" so ausgiebig mit der Philosophie der Mathematik befaßt. Vgl. Frascolla 1994, Kap. 2.

10 Gentzen 1934.

11 Prawitz/Malmnäs 1968; Prawitz 1965; Prawitz 1973; Prawitz 1974; Prawitz 1977; Prawitz 1981; Troelstra/Schwichtenberg 1996.

12 Kamlah/Lorenzen 1973; Lorenz 1970; Lorenz 1972; Lorenz 1976; Lorenzen 1955; Lorenzen 1962; Lorenzen 1965; Lorenzen 1968.

13 Dummett 1977; Dummett 1978a; Dummett 1978b; Wright 1987; Tennant 1987; Tennant 1997.

14 Vgl. z. B. Brandom 1994; Siegwart 1997; Tennant 1997; s. zu dieser Diskussion auch Habermas 1999.

Obwohl sich diese Diskussionskreise auf Brouwer und Heyting und dessen Schüler beziehen, sind die Bezugnahmen untereinander wenig bis gar nicht entwickelt. Zwar ist beispielsweise Lorenzen von Weyl und Becker beeinflußt[15], während Dummett sich neben Frege vor allem auf Wittgenstein bezieht. Ferner gibt es eine Diskussion zwischen Dummett und Prawitz.[16] Philosophen wie Becker jedoch scheinen derzeit vergessen. Zwischen der Erlanger Schule und dem Dummett-Kreis gibt es bis heute kaum Wechselwirkungen. Abgesehen von den historisch tatsächlichen Diskussionsverläufen, die hier im einzelnen nicht nachgezeichnet werden können, lassen sich jedoch bemerkenswerte Gemeinsamkeiten zwischen diesen Diskussionskreisen festhalten, auf die im folgenden eingegangen werden soll.

In der *Mathematik* dagegen schien es lange Zeit, als werde der Intuitionismus lediglich die Bedeutung einer historischen Marginalie erhalten. Zwar gab es immer eine kleine Gruppe vor allem niederländischer Mathematiker, die den Intuitionismus wenigstens als Untersuchungsthema ihrer Arbeiten bevorzugt behandelten.[17] Auch dem klassischen Mathematiker erscheint es gelegentlich einer Notiz wert, wenn er für ein Theorem auch einen „konstruktiven" Beweis führen kann. Für die weitaus überwiegende Mehrzahl der Mathematiker erscheint es aber abwegig, einer intuitionistischen Auffassung der Logik und Mathematik beizutreten, hieße das doch, wegen philosophischer Skrupel ein so leistungsstarkes Instrument wie die klassische Logik und damit als wichtig eingeschätzte Teile der Mathematik aufzugeben. Die französische Mathematikergruppe Nicolas Bourbaki trifft wohl die Meinung vieler Mathematiker:

> „The intuitionist school, *whose memory will undoubtedly survive only as a historical curiosity*, has at least rendered the service of having obliged its opponents, that is to say the vast majority of mathematicians, to clarify their own positions and to become more consciously aware of the reasons (whether logical or sentimental) for their confidence in mathematics."[18]

Daß diese Einschätzung innerhalb der Mathematik neuerdings ins Wanken geraten ist, hängt einmal mit wissenschaftshistorischen Untersuchungen über die Bedeutung Brouwers für das heute paradigmatische, im wesentlichen auf Hilberts Programm zurückgehende Mathematikverständnis zusammen.[19] Auch diese historischen Arbeiten finden jedoch nur deshalb Beachtung, weil neuere Entwicklungen in der Beweistheorie sowie deren direkte Wirkung auf die theoretische Informatik dem

---

15 Vgl. Gethmann 1991.
16 Prawitz 1980; Dummett 1980.
17 Z. B. Beth 1965; Troelstra/van Dalen 1988.
18 Bourbaki 1968, S. 336 (Hervorhebung: CFG).
19 Mancosu 1998.

Logischen Intuitionismus eine neue Aktualität verschafft haben. Da konstruktive Beweise (im Unterschied zu genuin klassischen) direkt in Algorithmen überführbar sind, gibt es in der Informatik ein breites Anwendungsfeld für die intuitionistische Logik, beispielsweise in der rechnergestützten Überprüfung von Software auf Fehlerfreiheit.[20] Mit Blick auf diese Entwicklung schreibt F. L. Bauer:

> „Es wird Zeit, daß sich die Informatik des Intuitionismus annimmt. [...] Die Nützlichkeit des Intuitionismus, die Hermann Weyl für die Physik vermißte, ist für die Informatik gegeben."[21]

Heytings Aufsätze gehören historisch in den Kontext des sogenannten Grundlagenstreites in der Mathematik zwischen Vertretern des Logizismus (G. Frege, B. Russell, R. Carnap), Intuitionismus (L. E. J. Brouwer, A. Heyting) und Formalismus (D. Hilbert und der mainstream der modernen Mathematik seit etwa 1940). An dieser Diskussion um die durch die Entdeckung von Russells Antinomie hervorgerufene Grundlagenkrise waren seinerzeit Mathematiker und Philosophen (insbesondere philosophische Logiker) gleichermaßen beteiligt. Aus *philosophischer* Sicht geht es im Kern um eine sprachphilosophische Frage, die weit über das Feld der mathematischen Disziplinen hinausreicht, nämlich um das Verhältnis von Bedeutung und Wahrheit; eine Frage, die allerdings wegen ihrer Folgen für das Verständnis von Existenz, Unendlichkeit und indirektem Beweis (bzw. des Tertium non datur) *unmittelbare* Bedeutung für die Grundlagen der Mathematik hat. Bedauerlicherweise haben sich indessen die Diskussionsstränge zwischen Mathematik und mathematischer Logik auf der einen Seite und Sprachphilosophie und philosophischer Logik auf der anderen Seite seit den dreißiger Jahren deutlich auseinander entwickelt. Im folgenden sollen vor allem die Wechselwirkungen zwischen Logik, Mathematik und (theoretischer) Philosophie herausgestellt werden, um Anregungen für eine Wiederaufnahme der Diskussionsfäden zwischen den Fächern zu geben.

1 Das Ereignis

Am 24. Oktober 1929 teilte Ludwig Bieberbach, Professor der Mathematik an der Berliner Universität und Mitglied der Physikalisch-mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften, in einer Sitzung der Klasse mit, daß ihm eine Arbeit eines Dr. Arend Heyting aus Enschede zugegangen sei, die in zwei Teilen einen intuitionistischen Aussagen- und Prädikatenkalkül aufbaue.

---

[20] Bauer 1999; vgl. Troelstra/Schwichtenberg 1996 sowie den Beitrag von H. Schwichtenberg in diesem Band.

[21] Bauer 1999, S. 287.

Wie es kam, daß Heyting, zu dieser Zeit Gymnasiallehrer in den Niederlanden (bis 1938, ab 1948 Professor für reine Mathematik an der Universität Amsterdam), seine bahnbrechenden Arbeiten der Preußischen Akademie vorlegte, ist nicht in allen Details bekannt. Als gesichert kann jedenfalls folgendes gelten:[22] 1927 lobte die Holländische Mathematiker-Gesellschaft (Wiskundig Genootschap) einen Preis für die Formalisierung der Brouwerschen intuitionistischen Mathematik aus. Ein Jahr später wurde der Preis der von Heyting eingereichten Arbeit zuerkannt. Daß Brouwer selbst Einfluß auf die Preisausschreibung nahm, ist weniger wahrscheinlich, weil er dem Gedanken einer formalen Logik ablehnend gegenüberstand. Für seine Anhänger war es gleichwohl ein Desiderat, der formalistischen Position ein logisches Instrument entgegenzustellen, das zwar den Grundgedanken Brouwers folgte, es jedoch hinsichtlich seiner formalen Präzision mit der klassischen Logik Freges und Russells aufnehmen konnte. Nachdem Heyting seine Untersuchungen vorgelegt hatte, zeigte sich Brouwer dann jedoch an einer Veröffentlichung außerordentlich interessiert, wobei ihm zunächst eine Veröffentlichung in den *Mathematischen Annalen* vorschwebte, zu deren Herausgebergremium er gehörte. Dieser Plan geriet jedoch in das Umfeld des Streites um die *Mathematischen Annalen*, in dem sich bis auf den Ersten Weltkrieg zurückgehende Auseinandersetzungen um die internationale Ächtung deutscher Wissenschaftler, die fachliche Konkurrenz zwischen den mathematischen Instituten in Berlin und Göttingen sowie die zunehmend eskalierende persönliche Polemik zwischen Hilbert und Brouwer in den zwanziger Jahren auf schwer auflösbare Weise miteinander verwoben hatten.[23] Spannungen im Herausgebergremium der *Mathematischen Annalen*, bei denen Bieberbach eine mehr vermittelnde Position einzunehmen versuchte, hatten das Ausscheiden Brouwers 1928 zur Folge. Es war sicher einer Anregung Brouwers zu verdanken, daß Bieberbach die Arbeit schließlich für die *Sitzungsberichte* vorschlug. Bieberbach hatte sich nämlich bereits seit Mitte der zwanziger Jahre zunehmend kritisch gegen Hilberts Formalismus gewandt und sich – wie eine Reihe weiterer bedeutender Philosophen und Mathematiker (H. Weyl, O. Becker, P. Boutroux, L. Wittgenstein) – enger an ein von Kant, Poincaré und Brouwer beeinflußtes Mathematikverständnis angeschlossen. Brouwer konnte für Heytings

---

22 Vgl. Troelstra 1981; Troelstra 1968.

23 Vgl. zum sog. Annalenstreit Mehrtens 1987; van Dalen 1990; van Stigt 1990; allgemeiner Schappacher/Kneser 1990, bes. § 4.

Arbeiten bei Bieberbach also auf Verständnis setzen.[24] Im übrigen hatte Brouwer auf Betreiben Bieberbachs schon ein Jahr zuvor seine Auffassungen in den *Sitzungsberichten* darstellen können.[25]
Der damalige Sekretar Max Planck nahm zu Protokoll, daß Bieberbach vorläufig Bedenken trage, Heytings Arbeit zur Veröffentlichung zu geben, weil die darin gebrauchte logische Notation womöglich die Anfertigung spezieller Drucktypen erforderlich mache. Die Sache ging an das Sekretariat, das daraufhin beschloß, Bieberbach und seine Fachkollegen müßten in einem Antrag die wissenschaftliche Dringlichkeit der Veröffentlichung dartun. Daraufhin legten die Mathematiker Bieberbach, Schur und Schmidt eine Erklärung vor, in der es unter anderem heißt:

> „Die Arbeiten besitzen deshalb einen ganz eigenen und besonders wichtigen Charakter, weil sie in überraschender Weise eine versöhnende Synthese von Formalismus und Intuitionismus bringen. Sie wenden nämlich die formalistischen Methoden auf die intuitionistischen Grundanschauungen an. Dabei wird einerseits eine Erweiterung des formalistischen Wirkungsbereiches, andererseits eine Verfeinerung der Unterscheidungen in den intuitionistischen Grundbegriffen erzielt. Überdies war zur Durchführung der Untersuchungen ein besonders unermüdlicher Scharfsinn notwendig."[26]

Das Sekretariat gab dem Antrag statt, und im Januar 1930 erschienen Heytings Arbeiten.
Die Veröffentlichung machte Heyting schlagartig bekannt. Er wurde 1930 zur 2. Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften nach Königsberg eingeladen[27], wo er mit R. Carnap als Vertreter des Logizismus und J. von Neumann als Vertreter des Formalismus auf zwei namhafte Opponenten traf. 1931 folgten Einladungen nach Münster (Scholz) und Göttingen (Neugebauer). Heyting wurde in der Folgezeit der bedeutendste Vertreter des Intuitionismus in der Logik und Mathematik nach Brouwer.[28]

---

[24] Auch wenn Bieberbachs zahlreiche fachliche Verdienste weithin unbestritten sind, so wird sein Lebenswerk doch durch sein aktives Eintreten für die sogenannte *Deutsche Mathematik* überschattet (vgl. dazu Bieberbach 1934; Mehrtens 1987; Lindner 1980). Ferner ist anzunehmen, daß gerade Bieberbachs „rassentheoretisches" Plädoyer für den Intuitionismus seinen Teil zur skeptischen Aufnahme des Intuitionismus durch die Mehrheit seiner mathematischen Fachkollegen – erst recht nach dem Zweiten Weltkrieg – beigetragen hat.

[25] Brouwer 1928.

[26] Zitiert nach den im Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften erhaltenen Sitzungsprotokollen (Sign. II-XVI-27, Blatt 239). Frau W. Witzel sei für die Recherche im Akademiearchiv ausdrücklich gedankt.

[27] Vgl. dazu Gethmann 2000b.

[28] Vgl. Troelstra 1968; Troelstra 1981.

2 Heytings Bedeutung für die Philosophie der Logik

Die Entwicklung der modernen (im Unterschied zur von Aristoteles begründeten traditionellen) Logik beginnt mit Gottlob Freges *Begriffsschrift*. Freges hauptsächliche Errungenschaft ist die strikte Durchhaltung des Schemas Argument – Funktion – Wert, dem man seine mathematische Herkunft deutlich anmerkt. Das Ziel, das Frege mit seiner *Begriffsschrift* verfolgte, war denn auch zunächst vorrangig ein mathematisches, nämlich die Rückführung der Mathematik auf rein logische Mittel. Durch die lückenlose Darstellung mathematischer Beweise sollte sichergestellt werden, daß an keiner Stelle materiale Prämissen eingehen. Seine endgültige Form erhielt dieses Programm des „Logizismus" in den 1893 und 1903 erschienenen Bänden der *Grundgesetze der Arithmetik*; dort gelang Frege auch die Ableitung der 1891 von G. Peano formulierten arithmetischen Axiome aus logisch-mengentheoretischen Grundsätzen. Freges Arbeiten hatten jedoch ganz andere als die von ihm intendierten Konsequenzen:

(i) Durch die Präzision der Fregeschen Logik konnte Russell die bis dahin unbemerkt gebliebene Inkonsistenz der „naiven" Mengenlehre feststellen (2.1);
(ii) eine Strategie der Auflösung der Grundlagenkrise war die von Brouwer entwickelte konstruktivistische Kritik an der klassischen Logik Freges (2.2);
(iii) Heytings Formalisierung der Grundvorstellungen Brouwers hatte erhebliche Konsequenzen für das Verständnis der Logik (2.3).

2.1 Der Streit um die Grundlagen der Mathematik

Es entbehrt nicht einer gewissen Ironie, daß gerade die Strenge der Beweisführung, die Freges Kalkülisierung der Logik erstmals gewährleistete, die Existenz von Antinomien im System der „naiven" Mengenlehre zu einer unabweisbaren Einsicht machte. Am 16. Juni 1902 – also noch vor Erscheinen des zweiten Bandes der *Grundgesetze* – berichtete Russell Frege brieflich von der Entdeckung der nach ihm benannten Antinomie. Aus Freges Grundgesetz V (das dem Komprehensionsaxiom in modernen Formulierungen der Mengenlehre entspricht) ist ein Widerspruch ableitbar: Die Menge (aller und nur) derjenigen Mengen, die nicht ihr eigenes Element sind, enthält sich selbst dann und nur dann als Element, wenn sie sich nicht als Element enthält. Durch Russells Entdeckung wurden auch ähnliche, zuvor eher vermutete und als Kuriosa abgetane Antinomien (Burali-Forti und Cantor, beide vor 1900) bedeutsam. Die damit entstandene Grundlagenkrise der Mathematik beruhte nicht zuletzt darauf, daß präzisere Beweisinstrumente wie Freges klassische Logik Antinomien zu Tage förderten, die man vorher mit vageren Instrumenten nicht gefunden hatte und die man intuitiv auch nicht vermutete. Somit fanden die Diskussionen um die Bewältigung der Grundlagenkrise im Wechselspiel zwischen formaler Logik als Beweisinstrument und den „materialen" mathematischen Sprachen statt. Es liegt auf der Hand, daß eine derart komplexe Diagnose sehr unterschiedliche Therapiestrategien auf den Plan rief, die üblicherweise zu drei Grundvarianten zusammengefaßt werden.[29]

Im *Logizismus* wird an Freges Überzeugung vom deduktiven Zusammenhang zwischen Logik (einschließlich Mengenlehre) und Mathematik festgehalten. In der Fortführung des logizistischen Programmes durch Russell und A. N. Whitehead wird die Typentheorie entwickelt, die selbstreferentielle Mengenbildungen vom Russell-Typ auf syntaktischem Wege verbietet. Auch im *Intuitionismus* wurde die Bildung von Mengen vom Russell-Typ verworfen, allerdings aus anderen Gründen als im Logizismus, nämlich wegen der Nicht-Konstruktivität der Bildungsvorschriften für diesen Mengentyp: Um zu entscheiden, ob die Russellsche Menge sich selbst als Element angehört, müßte ja aufgrund der Bildungsregeln für diese Menge schon feststehen, ob das der Fall ist. Derartige „imprädikative" Begriffsbildungen werden aufgrund des Konstruktivitätskriteriums im Intuitionismus verboten. Im *Formalismus* wird zunächst das sogenannte „Hilbert-Programm" verfolgt: Die Konsistenz jeder einzelnen mathematischen Theorie sollte mit finiten Mitteln bewiesen werden. In dieser starken Form scheitert das Programm allerdings an K. Gödels zweitem Unvollständigkeitssatz: Die Konsistenz einer Theorie, die wenigstens die elementare Arithmetik umfaßt, ist mit ihren eigenen (und erst recht mit schwächeren) Mitteln nicht beweisbar. Nach 1931 mußte das Hilbertsche Programm daher entschieden abgeschwächt werden.

2.2 Brouwers Kritik an der klassischen Logik

Während Frege darum bemüht war, der Mathematik durch Fundierung auf die Logik dasselbe Maß an Sicherheit zu verleihen, geht L. E. J. Brouwer und die von ihm begründete Schule des Intuitionismus von einem geradezu umgekehrten Verständnis von Mathematik aus: Nach Brouwer ist die Mathematik eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes, die nur auf der Urintuition der Einheit und Verschiedenheit fußt. Da Brouwer die Mathematik darüber hinaus mit dem „exakten" Teil des Denkens identifiziert, kann sie nicht auf die Logik gegründet werden; im Gegenteil ist die Logik ein Teil der Mathematik. Die Logik beschreibt nur sehr allgemeine Operationen an unseren gedanklichen mathematischen Konstruktionen. Brouwers Ansicht, jeder gedankliche Schritt müsse einzeln auf seine Evidenz geprüft werden, hat dieser Richtung den Namen „Intuitionismus" einge-

[29] Vgl. z. B. von Neumann 1931; Carnap 1931; Heyting 1931; s. auch Schütte/Schwichtenberg 1990.

tragen.[30] Daher entzieht sich die Logik strenggenommen auch der Formalisierung.[31] Überhaupt lassen sich nach Brouwers Ansicht mathematische Einsichten nur sehr unvollkommen mitteilen, und sie dürfen keineswegs als Ergebnisse der Befolgung von sprachlichen Regeln mißdeutet werden.

Mit den frühen Konventionalisten (L. Kronecker, H. Poincaré u. a.) kommt Brouwer in seiner Kritik am Unendlichkeitsbegriff überein. Da die Mathematik von gedanklichen Konstruktionen handelt, können unendliche Mengen nicht als fertige Ansammlungen von „unendlich vielen" Gegenständen aufgefaßt werden (das wäre das sog. „Aktual-Unendliche"). Das Unendliche kommt nach Brouwer vielmehr dadurch in die Mathematik, daß es für die fortgesetzte Anwendung von Operationen (wie die Addition von 1) keine obere Grenze gibt. Sinnvoll ist daher nur die Rede vom Potential-Unendlichen, von der Unendlichkeit des „Und-so-weiter". Daraus ergeben sich zwei (logisch freilich voneinander abhängige) Konsequenzen, die sich in logischer und epistemologischer Hinsicht als besonders folgenreich erweisen:

Erstens erfährt der Begriff der *mathematischen Existenz* eine Umdeutung. Der Existenzquantor in 'Es gibt eine Zahl *n*, so daß F(*n*)' kann nicht so gedeutet werden, als gebe es diese Zahl irgendwo in der unendlichen Menge der natürlichen Zahlen, auch dann, wenn man sie noch nicht gefunden hat. Die Existenzbehauptung ist nach intuitionistischer Deutung vielmehr eine façon de parler für die Behauptung 'Es gelingt auf die und die Weise, eine Konstruktion vorzunehmen, die eine Zahl mit der Eigenschaft F erzeugt.' – Damit wird die Interdefinierbarkeit der Quantoren, wie sie in der klassischen Logik besteht, aufgegeben. Denn der Beweis, daß die Annahme der Eigenschaft nicht-F für alle *n* zum Widerspruch führt, ist für Brouwer (im Unterschied zu Frege) kein ausreichender Existenzbeweis. – Ein solches „konstruktives" Verständnis von Existenz variiert beträchtlich mit dem darin investierten Konstruktionsbegriff:[32] Für Brouwer war eine Konstruktion ein mentaler, nachträglich sprachlich veräußerlichter Prozeß des Erzeugens; nach der Ansicht Lorenzens zum Beispiel ist erst der „effektive Aufweis" des fraglichen Objektes zureichend.

Zweitens – und das ist der Kern der Brouwerschen Kritik an der klassischen Logik – bedarf der Negationsbegriff einer anderen Deutung als der Fregeschen. *Locus classicus* ist der Aufsatz *De onbetrouwbaarheid der logische principes* von 1908, in dem Brouwer darlegt, daß die klassischen Schlußweisen in der Mathematik sich einer unrechtmäßigen Übertragung der Verhältnisse in endlichen Bereichen auf unendliche verdanken. Da sich unendliche Mengen nur als durch Konstruktion

[30] Daneben ist sicher Brouwers eher vage Reminiszenz an Kant bedeutsam (Brouwer 1907). Vgl. Thiel 1988, S. 69.

[31] Troelstra 1980, S. 198.

[32] Vgl. Mainzer 1984; Troelstra/van Dalen 1988.

gegeben vorstellen lassen, muß der Behauptung oder Bestreitung einer mathematischen Aussage ein mentaler Vorgang vorausgehen, der entweder die Einsicht in die Wahrheit einer Aussage oder in ihre Falschheit zur Folge hat. Damit ist die Möglichkeit offengelassen, daß bisher weder der eine noch der andere Fall eingetreten ist. Da mathematische Sachverhalte nur durch solche Konstruktionen existieren, gilt das *Prinzip der Bivalenz* für mathematische Aussagen nicht; sie sind nicht „an sich" wahr *oder* falsch. Dies wiederum entzieht nach Brouwer dem *Tertium non datur* (Satz vom ausgeschlossenen Dritten) – für die nicht-finiten Teile der Mathematik – die Grundlage. Eine weitere Konsequenz ist, daß die Regel des *Duplex negatio affirmat* intuitionistisch nicht gültig ist: Die Einsicht in die Absurdität der Annahme, A selbst sei absurd, ist keine Konstruktion mit dem Ergebnis, daß A gilt. Bereits in den 21 Thesen, die Brouwer bei seiner Promotion (1907) aufstellte, hatte er sich gegen Hilberts Behauptung gewandt, daß „ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, daß es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, daß die Unmöglichkeit einer Lösung und damit die Notwendigkeit des Mißlingens aller Versuche dargethan wird."[33] Im *Onbetrouwbaarheids*-Aufsatz wird diese These – das Entscheidbarkeitspostulat für mathematische Sätze – darüber hinaus mit dem *Tertium non datur* identifiziert. Das Tertium non datur würde demnach nicht mehr ausdrücken als die Hoffnung auf die Lösbarkeit aller mathematischen Probleme, der Gödel 1931 die Grundlage entzogen hat.

2.3 Heytings Formalisierung der intuitionistischen Logik

In den Vorbemerkungen zu seinen beiden in den *Sitzungsberichten* erschienenen Aufsätzen erweist sich Heyting zunächst scheinbar als getreuer Brouwer-Schüler; er schreibt dort:

> „Die intuitionistische Mathematik ist eine Denktätigkeit, und jede Sprache, auch die formalistische, ist für sie nur Hilfsmittel zur Mitteilung. Es ist prinzipiell unmöglich, ein System von Formeln aufzustellen, das mit der intuitionistischen Mathematik gleichwertig wäre, denn die Möglichkeiten des Denkens lassen sich nicht auf eine endliche Zahl von im voraus aufstellbaren Regeln zurückführen. [...] Zum Aufbau der Mathematik ist die Aufstellung allgemeingültiger logischer Gesetze nicht notwendig; diese Gesetze werden in jedem einzelnen Fall gleichsam von neuem entdeckt als gültig für das eben betrachtete mathematische System."[34]

[33] Hilbert 1900, S. 261.
[34] Heyting 1930a, S. 42.

Hier ist bereits deutlich eine Zurückweisung sowohl des Formalismus als auch des Logizismus angekündigt: Aus Sicht des Formalismus *ist* die Mathematik der Kalkül (sie wird nicht durch ihn „mitgeteilt"); ein widerspruchsfreies System bedarf keiner weiteren Rechtfertigung. Der Stein des Anstoßes für den Logizisten ist vor allem das Vorordnungsverhältnis zwischen Mathematik und Logik. Obwohl Heyting Brouwers Ansicht teilt, daß Mathematik eigentlich sprachfrei sei, macht er sich daran, als „Hilfsmittel zur Mitteilung" zunächst den Kalkül der intuitionistischen Aussagenlogik[35], im darauffolgenden Aufsatz den der Prädikatenlogik[36] zu entwickeln. Er übernimmt dazu das System der *Principia Mathematica* von Russell/Whitehead, ändert jedoch die die Negation betreffenden Axiome so ab, daß eben ein intuitionistischer Kalkül entsteht. Damit ist es Heyting gelungen, eine Axiomatisierung zu finden, die den Ansprüchen des Intuitionisten hinsichtlich der Grundlagen der Mathematik gerecht wird. Heytings Bemerkungen enthalten insofern zugleich auch eine deutliche Kritik an Brouwer. Gegenüber dem epistemologischen Intuitionismus stellen Heytings Aufsätze sogar eine Rebellion gegen Brouwers Grundvorstellungen dar, so daß die Bezeichnung „intuitionistische" Logik eher denkmalspflegerischen Wert hat. Es ist daher durchaus zutreffend, wenn Bieberbach und seine beiden Kollegen in ihrem Bericht an die Klasse von einer Synthese im Sinne der Anwendung der formalistischen Methode auf intuitionistische Vorstellungen sprechen.[37]

Der vielleicht augenfälligste und folgenreichste Unterschied der intuitionistischen Logik zur klassischen Logik liegt in der Semantik. Die für die klassische Logik weitgehend übliche „Semantik der Wahrheitswerte" macht vom Bivalenzprinzip Gebrauch und ist daher intuitionistisch nicht akzeptabel. Für die intuitionistische Logik hat sich demgegenüber als Standardinterpretation die sogenannte BHK-Interpretation (Brouwer/Heyting/Kolmogoroff) durchgesetzt, die als Grundbegriff den des Beweises (der Konstruktion, der Lösung einer Aufgabe, der Gewinnstragegie o. ä.[38]) verwendet.

In diesem semantischen Zugang sind drei entscheidende Bedeutungspostulate enthalten, die den sprachphilosophischen und erkenntnistheoretischen Unterschied zwischen klassischer und intuitionistischer Logik schon erkennen lassen:

(a) Eine Aussage p darf nur dann als wahr behauptet werden, wenn p bewiesen werden kann.

(b) Die Negation einer Aussage p darf nur als wahr behauptet werden, wenn aus der Aussage p der Widerspruch $q \wedge \neg q$ abgeleitet werden kann.

[35] Heyting 1930a.

[36] Heyting 1930b.

[37] Siehe oben, § 1.

[38] Vgl. dazu Richter 1965.

(c) Die Adjunktion zweier Aussagen $p \vee q$ darf nur als wahr behauptet werden, wenn mindestens eines der Adjunkte p bzw. q bewiesen werden kann.

Bereits die Existenz faktisch unbewiesener Aussagen ist unter diesen Voraussetzungen ein schlagendes Argument gegen das *Tertium non datur*: Da beispielsweise bisher weder die Goldbachsche Vermutung noch ihre Negation bewiesen worden sind, gibt es keine Rechtfertigung für die Behauptung der entsprechenden Adjunktion. Selbst wenn man die Forderungen abschwächt und nicht das tatsächliche Verfügen über einen Beweis, sondern nur die Beweis*barkeit* fordert, ist aufgrund der Existenz unentscheidbarer mathematischer Aussagen derjenige, der (a)–(c) – in entsprechend abgeschwächter Form – akzeptiert, auf die Verwendung einer schwächeren als der klassischen Logik festgelegt.
Die Standardantwort des Proponenten einer klassischen Logik auf die „konstruktivistische Herausforderung" erfolgt letztlich im Geiste Freges: Sie besteht in einer Entkopplung von Wahrheit und epistemischer Qualifikation. Die Logik befasse sich mit dem Wahr*sein*, nicht mit dem Erkennen der Wahrheit, also gehe sie das Beweisen als Erkenntnismittel nur sekundär etwas an. Mathematische Sätze seien wahr oder falsch kraft ihrer abbildenden Beziehung zu einem „Modell", unabhängig davon, ob irgend jemand in der Lage ist, ihre Wahrheit einzusehen oder zu beweisen. Die Frage, ob die Wahrheit einer Aussage durch ihre Beweisbarkeit konstituiert wird, oder ob die Wahrheit in einer Abbildbeziehung besteht, die ihre epistemische Erreichbarkeit im Prinzip transzendiert – dies ist die eigentliche sprachphilosophische und epistemologische Grundfrage, die den Grundlagenstreit der Mathematik bestimmt, die aber letztlich eine von den besonderen Problemen der Mathematikbegründung unabhängige Bedeutung hat.
An dieser Stelle ist auch darauf hinzuweisen, daß die intuitionistische Grundvorstellung von der Wahrheit als Beweisbarkeit nicht zwingend zu einer Verwerfung der klassischen Logik als Kalkül führen muß. Wer die Forderung aufgibt, für den Beweis einer Adjunktion müsse mindestens eines der Adjunkte bewiesen werden[39], kann am *Tertium non datur* festhalten, ohne dadurch auf das Bivalenzprinzip festgelegt zu sein.[40] Insofern kann es eine nicht-realistische Deutung der klassischen Logik geben. Bivalenzprinzip und *Tertium non datur* werden in der Diskussion in den ersten Jahrzehnten des zwanzigsten Jahrhunderts und auch heute noch häufig gleichgesetzt. Beim Bivalenzprinzip handelt es sich jedoch um eine Festlegung der Verwendung der *metasprachlichen* Ausdrücke „wahr" und „falsch", beim *Tertium non datur* hingegen um ein Theorem *innerhalb* einer Sprache S, dessen Interpretation von der Semantik von S abhängt.

[39] Dies ist die sog. Disjunktionseigenschaft der intuitionistischen Logik.
[40] Hinst 1977; Siegwart 1997, S. 468ff.

Brouwers philosophische Grundüberzeugung liegt in der definitorischen Bindung des Wahrheitsbegriffs an den Begriff der Konstruktion oder des Beweisens im weiteren Sinne. Der Kalkül von Heyting beansprucht nicht (und für einen solchen Anspruch gäbe es auch keinen Beweis), die einzig mögliche Umsetzung dieses Grundgedankens in einen Kalkül zu sein, der gewissen elementaren sprachphilosophischen (z. B. hinsichtlich des Ausdrucksreichtums der Sprache), formalen (z. B. hinsichtlich der Widerspruchsfreiheit) und pragmatischen Anforderungen (z. B. hinsichtlich der Rekonstruktion der mathematischen Beweisprozeduren) genügt. Es dauerte auch nicht lange, bis ein weiterer Kalkül entwickelt wurde, der mit Brouwers Grundannahmen kompatibel ist. Der 1936 von I. Johansson vorgelegte Minimalkalkül,[41] der einen intuitionistischen Kalkül ohne *ex falso quodlibet* darstellt, bestätigte, daß Brouwers Grundannahmen in vielen Kalkülen dargestellt werden können.

Die eigentliche logikhistorische Bedeutung von Heytings Arbeit liegt demnach nicht darin, daß sie *die* Logik der intuitionistischen Mathematik aufstellt. Sie zeigt zwar *einmal*, daß Brouwers Grundannahmen eine Darstellung in einem Kalkül finden können und insoweit Freges gegenläufigen sprachphilosophischen Grundintuitionen nicht unterlegen sind – was zwischen Brouwers ersten Schriften und Heytings Beiträgen über ca. 30 Jahre so schien. *Zweitens* ist Heytings Kalkülisierung jedoch semantisch-ontologisch neutral: Es gibt eine axiomatische Darstellung der intuitionistischen Grundüberzeugungen, die den Hilbertianer formal zufrieden stellt. In dem wenige Jahre später durch Gentzen vorgeführten regellogischen Kalkültyp[42] zeigte sich darüber hinaus, daß es eine Darstellung im Sinne der direkten Semantik gibt (was die Konstruktivisten befriedigt); schließlich gibt es eine konstruktive Interpretation der klassischen Logik im Sinne einer zulässigen Verstärkung der intuitionistischen Logik für definite Satzmengen.

Den Zusammenhang der Diskussion um die Folgen der Grundlagenkrise mit den Grundfragen von Erkenntnis- und Sprachphilosophie sieht man sofort, wenn man sich die Revolution vor Augen hält, die dadurch ausgelöst wurde, daß man seit Heytings Aufsätzen definitiv nicht über *die* Logik, sondern über eine Pluralität von Logik*en* verfügte. Für Frege war es selbstverständlich, daß er mit seiner *Begriffsschrift* die bereits im vorhinein festliegenden „Gesetze des Wahrseins"[43] gewissermaßen sprachlich nachzeichnete. Diese Sichtweise ist seit Heytings Arbeiten nicht mehr ohne weiteres aufrechtzuerhalten. Wer mehrere Möglichkeiten hat, hat ein *Wahlproblem*. Was liegt näher, als dieses Problem *pragmatisch* zu lösen, das heißt Kalküle und Kalkültypen als Instrumente zur Lösung bestimmter Sorten von Problemen zu betrachten? Die Vielzahl möglicher Logiken führt allein dadurch, daß

---

[41] Johansson 1937.

[42] Gentzen 1934.

[43] Frege 1918/1919, S. 31.

sie existiert, nahezu zwangsläufig von der Frage nach den ewigen Gesetzen des Wahrseins zur Frage nach der instrumentellen Adäquatheit. Damit aber hat tendenziell Brouwer recht bekommen: Wir fragen heute nicht (wie Frege) nach *der* Logik, sondern nach der *adäquaten* Logik. Auch Brouwer und Heyting lassen sich so verstehen: Solange wir uns argumentativ in definiten Kontexten bewegen, gilt das Bivalenzprinzip, die klassische Logik ist adäquat; darüber hinaus jedoch gilt es nicht, wir haben eine schwächere Logik zu wählen. Genau darin hat Hilbert Brouwer mit seinem Konzept der (mit finiten Mitteln arbeitenden) Metamathematik zugestimmt. Der Instrumentalismus liegt also auch in der Linie des *Formalismus*. Der *Logizismus* rückte unter dem Eindruck von Heytings Kalkül ebenfalls von Freges Wahrheits-Platonismus ab, wie Carnaps „Toleranzprinzip" dokumentiert:

> „In der Logik gibt es keine Moral. Jeder mag seine Logik, das heißt seine Sprachform, aufbauen wie er will. Nur muß er, wenn er mit uns diskutieren will, deutlich angeben, wie er es machen will, syntaktische Bestimmungen angeben anstatt philosophischer Erörterungen."[44]

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß durch Heytings kalkülmäßige Darstellung von Brouwers logischen Intuitionen die Vorstellung von der einen wahren Logik und der damit verbundene Platonismus der Wahrheit zu Grabe getragen war. Alle drei Ansätze im Grundlagenstreit konvergieren schließlich – trotz aller Unterschiede im Detail – in einem Instrumentalismus des Logikverständnisses.

3 Heytings Bedeutung für Sprachphilosophie und Erkenntnistheorie

Sofern Heytings Arbeiten die Grundvorstellungen Brouwers im Grundlagenstreit der Mathematik durch einen Kalkül instantiieren, gehören sie zunächst in die Sphäre der Mathematik. Ob sie in dieser Hinsicht noch von systematischer Relevanz sind oder eher in die Geschichte der Mathematik gehören, muß letztlich dem Urteil der Mathematiker überlassen bleiben. Unabhängig von diesem Urteil ist jedoch ihre *philosophische* Bedeutung zu diskutieren, nämlich das Verhältnis von Wahrheit und Beweisbarkeit im Rahmen der Epistemologie und Sprachphilosophie. Folgende *drei Grundthesen* einschließlich ihrer Prämissen und Konsequenzen sollen im folgenden eingehender erörtert werden:

(i) Die Verwendung des Ausdrucks „*wahr*" ist nur zulässig, wenn ein effektives Verfahren angegeben werden kann, das diese Auszeichnung rechtfertigt (3.1);

---

[44] Carnap 1968, S. 45 (Hervorhebung im Original).

(ii) die Behauptung der Existenz ist an den effektiven Existenznachweis gebunden. Verallgemeinert heißt das: *Realität* ist immer durch Verfahren vollzogene Realität. Es gibt keine schlechthin verfahrenstranszendente Realität (3.2);

(iii) der Bezug auf einen Akteur, der die Kompetenz besitzt, Verfahren durchzuführen, traditionell gesprochen: das erkennende *Subjekt*, ist für das Zusprechen von Wahrheit und das Erkennen von Realität wesentlich (3.3).

3.1 Wahrheit

Die Argumentation der Intuitionisten unterstellt ein Verständnis von Wahrheit, demgemäß Wahrheit als Beweisbarkeit charakterisiert wird. Statt von „Beweisbarkeit" wird auch – mit leichten Bedeutungsunterschieden, die hier nicht berücksichtigt zu werden brauchen – von Effektivität (effektiver Beweisbarkeit), Konstruierbarkeit, Begründbarkeit oder (erfolgreicher) Behauptbarkeit gesprochen. Das Hauptargument für einen solchen, wesentlich auf *Verfahren* bezogenen Wahrheitsbegriff („Prozeduralismus") läßt sich in Anlehnung an Dummett[45] so formulieren: Das Wort „Wahrheit" kann nichts bedeuten, was das Erkenntnisvermögen seiner Benutzer transzendiert, deshalb muß das Zu- und Absprechen von Wahrheit an Verfahren der Verifikation bzw. Falsifikation zurückgebunden werden. Solange eine Aussage weder bewiesen noch widerlegt ist, kann man deshalb nicht davon ausgehen, daß sie kraft ihrer Darstellungsfunktion von einer erkenntnisunabhängigen Realität „wahr gemacht" wird.

Dummetts Konzeption einer Gebrauchstheorie der Bedeutung rekurriert neben dem Intuitionismus vor allem auf den späten Wittgenstein. Er sieht in Wittgensteins These, daß die Bedeutung eines Ausdrucks erschöpfend durch seinen Gebrauch bestimmt sei, eine konsequente Weiterentwicklung der schon von Frege aufgestellten Forderung nach der Intersubjektivität von Bedeutung. Um sicherzustellen, daß zwei Sprecher tatsächlich dasselbe mit einem bestimmten Ausdruck meinen, muß sich nach Dummett seine Bedeutung im beobachtbaren Sprachgebrauch vollständig manifestieren können (Manifestationsprinzip). Die einem Sprecher zugeschriebene Kenntnis der Bedeutung muß daher in der *Verwendung* eines Ausdrucks sichtbar sein. Deshalb muß eine Bedeutungstheorie nach Dummettschem Verständnis nicht nur angeben, was ein Sprecher wissen muß, um einen Ausdruck zu verstehen, sondern auch, durch welche Manifestation dieses Wissen intersubjektiv nachvollziehbar wird.

Die Bedeutung einer Aussage kann folglich nicht durch Angabe ihrer *Wahrheitsbedingungen* im Sinne der klassischen Semantik erklärt werden, sondern nur durch Angabe ihrer *Behauptbarkeitsbedingungen*, das heißt der Umstände, unter denen

[45] Dummett 1975.

ein Sprecher eine Aussage (korrekt) behaupten darf. Wäre eine Aussage allein deshalb wahr, weil der durch sie dargestellte Sachverhalt besteht, dann könnte die Feststellung ihrer Wahrheit das Erkenntnisvermögen des Sprechers unter Umständen übersteigen. Dies würde wiederum zur Folge haben, daß sich die Kenntnis der Bedeutung dieser Aussage nicht im Handeln manifestieren kann, weil es keine Möglichkeit gibt, über das Zutreffen der Wahrheitsbedingungen zu befinden. Dies ist für Dummett das Kernargument, das ihn mit den Intuitionisten zur Unhaltbarkeit des Bivalenzprinzips (entweder ist p wahr oder non-p ist wahr) der klassischen Logik führt: Unentscheidbare Aussagen sind weder wahr noch falsch, weil die Wahrheit einer Aussage nicht über ihre prinzipielle Verifizierbarkeit hinausgehen kann. In dieser Fassung ist die Problemstellung nicht spezifisch auf mathematische oder andere analytische Wahrheiten beschränkt, sondern sie gilt für beliebige Kontexte; sie betrifft in gleichem Maße lebensweltliche Erfahrung, empirische Laborwissenschaften, exakte Formalwissenschaften und hermeneutische Kulturwissenschaften. In allen diesen Kontexten ist die epistemologische Grundfrage zu beantworten, wie das Verhältnis zwischen Wahrheit (als Eigenschaft einer mentalen oder lingualen Entität wie Urteil oder Behauptung) und dem Verfahren zu denken ist, das zur Feststellung dieser Eigenschaft führt.

Im Unterschied zum Anti-Realisten besteht der Realist und Korrespondist demgegenüber auf einer strikten Unterscheidung zwischen der *Wahrheit* einer mentalen oder lingualen Entität und ihren *epistemischen Qualifikationen*. Das Wahrsein sei vom „Fürwahrgehaltenwerden" strikt zu unterscheiden. Während der Anti-Realist dem Realisten vorwirft, Wahrheit vom Verfahren des Bewahrheitens zu *abstrahieren*, wirft umgekehrt der Realist dem Anti-Realisten vor, Wahrheit mit dem *Erkennen des* Wahrseins zu *konfundieren*. Dieser Streitfrage läßt sich folgende Fassung geben: Sollen wir eine sprachliche Entität p (Satz, Aussage, Behauptung u. a.) genau dann als „wahr" auszeichnen,

(a) wenn die Annahme von non-p zu einem Widerspruch in einer Sprache S führt (*ontisches* Verständnis von Wahrheit),

oder

(b) wenn es ein Verfahren der Bewahrheitung (einen „Beweis") für p in S gibt (*epistemisches* Verständnis der Wahrheit)?

Die Unterschiede beider Konzeptionen sind beträchtlich und ziehen erhebliche wissenschaftstheoretische und sprachphilosophische Weiterungen nach sich. Nach dem epistemischen Verständnis von Wahrheit ist die Behauptung der Existenz eines Sachverhalts an die tatsächliche (effektive) Verfügbarkeit eines Verfahrens gebunden, durch das die Existenz nachgewiesen wird. Somit ist nach dem epistemischen Verständnis nur eine Teilklasse derjenigen p als „wahr" ausgezeichnet, die nach dem ontischen Verständnis als „wahr" ausgezeichnet werden. Das bedeutet, daß bei Nichtverfügbarkeit eines Verfahrens für p zwei Möglichkeiten bleiben: Ein Verfahren für non-p ist verfügbar (p ist widerlegbar), *oder*: weder für p noch für non-p ist ein Verfahren verfügbar. Nach dem epistemischen Verständnis von Wahrheit gilt also das Bivalenzprinzip in der Tat nicht.

Wenn das Bivalenzprinzip nicht gilt, dann fällt auch eine Spielart des bedeutungstheoretischen Verifikationismus, wie er bereits in der Frühphase des Wiener Kreises entwickelt wurde und auch heute noch weithin die Diskussionen der Analytischen Sprachphilosophie bestimmt. In einer prägnanten Formulierung von M. Schlick lautet die Grundthese:

> „Es muß inzwischen deutlich geworden sein, daß es nur eine Methode gibt, einem Satz Bedeutung zu verleihen [...]: Wir müssen die Regeln dafür angeben, wie er gebraucht werden soll, mit anderen Worten: Wir müssen die Tatsachen beschreiben, die die Aussage zu einer ‚wahren' machen, und wir müssen sie von den Tatsachen unterscheiden können, die sie zu einer ‚falschen' machen. Noch anders gesagt: Die Bedeutung einer Aussage ist die Methode ihrer Verifikation."[46]

Unter der Bedingung der Gültigkeit des Bivalenzprinzips kennt der Sprachverwender *im Prinzip* die Bedeutungen aller Ausdrücke, die in Sprachen vorkommen, deren Aussagen sinnvoll als wahr oder falsch ausgezeichnet werden können („*konstative* Sprachen"). Gegen diese Variante des semantischen Verifikationismus kann man schon einwenden, daß Ausdrücke, die in nicht-konstativen Sprachen vorkommen (z. B. Imperative), eo ipso keine Bedeutung hätten; eine Schlußfolgerung, die mit erheblichen Konsequenzen für die Ethik tatsächlich gezogen wurde.[47] Ferner gäbe es nach dem semantischen Verifikationismus Elemente auch in konstativen Sprachen, die keine Bedeutung hätten (oder zumindest keine, die der Sprachbenutzer kennen kann). Zur Klasse dieser „problematischen Sätze" gehören: (faktisch) unentschiedene Sätze; (prinzipiell) unentscheidbare Sätze; futurische Sätze; vage Sätze u. a. Entweder müßte man unterstellen, solche Sätze seien bedeutungslos – das würde bedeuten, daß ein Satz wie „es gibt eine ungerade vollkommene Zahl" semantisch äquivalent ist dem Satz: „alle Rumänen sind Primzahlen" – oder wir müssen eben annehmen, daß das Verstehen der Bedeutung eines Ausdrucks α unabhängig von den Wahrheitsbedingungen des Satzes p erfolgt, in dem α wesentlich vorkommt. Diese Auffassung hätte den weiteren Vorteil, daß auch nicht-konstative Sprachen und damit auch konstativ/nicht-konstativ gemischte Sprachen (wie die Umgangssprache) nicht durch ein prinzipielles oder partielles semantisches Nonsense-Verdikt disqualifiziert werden.

---

[46] Schlick 1986, S. 144.

[47] Beispielsweise bei Ayer 1936. Vgl. dazu Hegselmann 1979.

Trifft der Verifikationismus der Bedeutung aber nicht (nicht allgemein) zu, dann ist das Funktionieren der Sprache so zu erklären, daß das Bedeutungsverstehen dem Verfahren des Wahrmachens vorausgeht. Ferner können für *nicht-konstative* Sprachsegmente, zum Beispiel Aufforderungen, Versprechen, Beschwörungen und anderes mehr, Korrektheitsbedingungen festgelegt werden, zu denen andere Verfahren als Verfahren des Wahr-Machens (Beweisens) hinführen: Verfahren der Überprüfung der Richtigkeit, Angemessenheit etc., die erlauben, solche Sprachelemente als korrekt oder inkorrekt zu diskriminieren.
Damit zeigt sich an einfachen Beispielen, daß die Verwerfung des Bivalenzprinzips zu einem völlig anderen Verständnis des Verhältnisses von Bedeutung und Wahrheit und damit von Sprache führt, als es in der traditionellen Sprachphilosophie aufgrund des mit der klassischen Logik mitgesetzten Bivalenzprinzips gilt.

3.2 Realität

Von Anfang an war der Grundlagenstreit der Mathematik und Logik nicht nur ein Streit um die richtigen Instrumente des Beweisens, sondern ein Streit um den Realitätsstatus der mathematischen Objekte und damit ein Streit um die den Wissenschaften adäquate Epistemologie. Dabei sind die Intuitionisten von Anfang an „Anti-Realisten". So sagt Heyting auf der Königsberger Tagung:

> „[...] daß wir den ganzen Zahlen, und ähnlicherweise anderen mathematischen Gegenständen, eine Existenz unabhängig von unserem Denken, eine transzendente Existenz also, nicht zuschreiben. [...] Die mathematischen Gegenstände, wenn auch vielleicht unabhängig vom einzelnen Denkakt, sind ihrem Wesen nach durch das menschliche Denken bedingt. Ihre Existenz ist nur gesichert, insoweit sie durch das Denken bestimmt werden können [...]."[48]

Die epistemische Interpretation des Wahrheitsbegriffs besagt, daß das Wahr-Sein nicht unabhängig vom Wahr-Machen besteht. Versteht man unter „Realität" das Ensemble der Tatsachen, das heißt *wahrer* Sachverhalte, dann hängt die Frage, was „real" ist, von den Verfahren ab, die eine sprachliche Entität als „wahr" auszeichnen. Ein solcher Antirealismus ist erfahrungsgemäß dem Mißverständnis ausgesetzt, die Realität werde als bloßes Produkt subjektiver Vollzüge angesehen. Der Anti-Realist behauptet jedoch nicht, Tatsachen seien *Resultate* des Wahrmachens (dies wäre klassischer „Idealismus"), sondern nur, daß es Tatsachen *nicht ohne* Verfahren des Wahrmachens gibt: Verfahren sind notwendige, nicht hinreichende Bedingung für das Zusprechen von Realität. Während der Idealismus (ähnlich auch

[48] Heyting 1931, S. 106f.

der radikale Konstruktivismus[49]) die Meinung vertritt, die subjektiven Vollzüge seien notwendig und hinreichend für das Zusprechen des Realitätsstatus, ist der Antirealismus ein *moderater Konstruktivismus*, dem zufolge die Objektivität der Welt durch prozedurale Strukturen gesichert ist, die invariant gelten und somit nicht subjektiver Willkür unterliegen.[50]
Die Bindung des Wahrheitsbegriffs an den Begriff der Beweisbarkeit (oder einen ähnlichen) setzt ein vorgängiges Verständnis der Fähigkeit eines handelnden Wesens zu einem Modus von Tätigkeit voraus. Allein dieser Umstand veranlaßt die Kritiker von intuitionistischer und konstruktiver Logik bzw. anti-realistischer Epistemologie zum Vorwurf des „*Subjektivismus*" – dies gewöhnlich mit der Unterstellung, was wahr oder falsch genannt werde, sei in anti-realistischen Epistemologien grundsätzlich der Beliebigkeit individuellen Gutdünkens anheimgegeben. Die hier dargestellte Tradition ist indessen nichts weniger als subjektivistisch oder relativistisch; sie tritt allerdings der These entgegen, der Subjektivismus bzw. Relativismus sei nur um den Preis einer platonistischen Bedeutungstheorie und/ oder realistischen Epistemologie zu vermeiden. Die entscheidende Pointe liegt darin, daß die mit dem Wahrheitsbegriff mitgesetzte Vorstellung von „Invarianz" nicht durch eine „unabhängige" Wirklichkeit garantiert wird, sondern durch invariante Strukturen des beweisenden (konstruierenden, begründenden) Verfahrens, das der Akteur ausführt. *Irrelative Wahrheit wird nicht durch Transzendenz (einer „Realität"), sondern durch Invarianz (eines wahr machenden Verfahrens) garantiert.*
Die Qualifikationen der Beweisbarkeit und Widerlegbarkeit hängen von Verfahrensstrukturen („Strategien"), nicht vom einzelnen raumzeitlichen Vollzug („Partie") ab.[51] Damit sind hinsichtlich des Verfahrensverständnisses sowohl ein Moment der *Faktizität* als auch ein solches der *Invarianz* zu unterscheiden. Die Faktizität liegt darin, daß es einen Handlungsrahmen geben muß, relativ zu dem Verfahrensvorschriften formuliert werden, deren Ausführungen Handlungen sind. Solche faktischen Rahmenbedingungen sind zum Beispiel Materialeigenschaften derjenigen Körper, aus denen Meßgeräte hergestellt werden, mit deren Hilfe wiederum Meßverfahren durchgeführt werden; oder die Kompetenzen derjenigen Akteure, die Verfahren durchführen, zum Beispiel sprachliche elementare Fähigkeiten, wie eine Aufforderung zu verstehen und zu befolgen. Allgemein: Verfahren sind eingebettet in eine faktische Lebenswelt mit sozialen und natürlichen Momenten, die faktisch (kontingent) sind. Werden im gegebenen Rahmen Handlungspläne entwickelt, so

---

[49] S. z. B. Schmidt 1987.
[50] Zum Unterschied zwischen radikalem und moderatem Konstruktivismus s. z. B. Janich 1996.
[51] Die Unterscheidung von Strategie und Partie entspricht derjenigen von Handlungsschema und -vorkommnis (bzw. type und token); vgl. Lorenz 1976.

gelingen oder mißlingen sie – faktisch. Verfügen Menschen jedoch über Verfahren, die *immer* (oder *nie*) gelingen, dann steht das Resultat des Handelns nicht mehr zur Verfügung subjektiver Beliebigkeit: die Winkelsumme im Dreieck in der Ebene beträgt zwei Rechte oder nicht; der intuitionistische Kalkül ist widerspruchsfrei oder nicht; der Delphin erfüllt die Bedeutungsregel für „... ist Säugetier" oder nicht; der *Wilhelm Meister* erfüllt die Bedeutungsregel für „... ist ein romantischer Text" oder nicht, etc. Ein Wesen, das im Rahmen einer faktischen Lebenswelt fähig ist, Verfahren des Beweisens oder Widerlegens zu entwickeln, hat die Möglichkeit (nicht die Garantie), Verfahrensstrukturen zu finden, die im gegebenen Rahmen immer gelten: Diese bilden dann ein relatives Apriori, relativ zu einer faktischen Lebenswelt. Gesetzt, einem verfahrenskompetenten Wesen gelingt es, im Rahmen einer Lebenswelt apriorische Strukturen zu entwickeln, dann gelten diese soweit und solange die Rahmenbedingungen gelten.[52]

3.3 Subjektivität

Das Verfügen über ein Verfahren ist vor allem deswegen als Wahrheitskriterium geeignet, weil es nicht nur um das private und einmalige Für-wahr-Halten, sondern um die prinzipielle Nach-Vollziehbarkeit für jedermann geht. Der Verfahrensbegriff ordnet die Wahrheitsqualifikation nicht nur einer faktisch-allgemeinen, sondern einer prinzipiell öffentlichen Sphäre zu. Dies bedeutet aber, daß das Verfügen über ein Verfahren nicht adäquat mit mentalen Termini wie Vorstellen, Denken usw. erfolgen kann. Ein Proponent, der äußert: „Ich kann mir ein Verfahren denken, aber ich kann es nicht mitteilen", verstößt gegen eine wesentliche Gelingensbedingung des Wahrheitsdiskurses. Der Wahrheitsdiskurs verläuft nicht auf einer Hinterbühne, deren Spiel gelegentlich auch auf der Vorderbühne „ausgedrückt" wird, sondern das Wahrheitsgeschehen ist wesentlich ein öffentlicher Vorgang. Das Manifestationsprinzip besagt also, daß eine Verdoppelung der Wirklichkeit in eine Denk- und eine Sprachsphäre überflüssig ist, weil mentale Prozeduren sowieso wiederum mit lingualen, also öffentlichen Kategorien rekonstruiert werden müßten. Um nämlich sichergehen zu können, daß zwei Sprecher dasselbe „meinen", muß sich die Bedeutung der verwendeten Ausdrücke im öffentlichen Sprachgebrauch niederschlagen können.[53]

---

[52] Vgl. Gethmann 1987.

[53] Das von Brouwer vertretene Verständnis von Mathematik als rein geistigem Verfahren ist allerdings geradezu ultra-mentalistisch und verstößt somit gegen das Manifestationsprinzip. Dies zeigt, daß zwischen Brouwers epistemologischem Mentalismus und seinem prozeduralistischen Wahrheitsverständnis unterschieden werden muß. Heytings Arbeiten von 1930 sind ein erster entscheidender Schritt in Richtung einer klaren Differenzierung.

Im Anschluß an Wittgenstein hat Dummett herausgestellt, daß das Wissen um die Bedeutung eines Ausdrucks eine praktische Fähigkeit sein muß: die Fähigkeit zu seiner korrekten Verwendung. Diese Fähigkeit besteht in einem *impliziten* Wissen. Denn würde man verlangen, daß das zum Verständnis notwendige Wissen in jedem Fall explizit formuliert ist, geriete man in einen infiniten Regreß von Metasprachen, in denen jeweils das nötige Wissen explizit angegeben werden müßte. Deshalb muß eine adäquate Bedeutungstheorie nicht nur angeben, was ein Sprecher wissen muß, um einen Ausdruck zu verstehen, sondern auch, welche *Fähigkeit* als Manifestation dieses Wissens zu gelten hat.

Insgesamt führt diese Reduktion auf sprachliche Fähigkeiten zu einem konventionellen Verständnis der Sprache (Anti-Naturalismus), die Sprache ist ein Verständigungsinstrument zum Zweck der Bedeutungsklärung und der Kontrolle diskursiver Verfahren (kein Abbild der „Wirklichkeit“). Der über öffentlich zugängliche Verfahren verfügende bzw. diese kontrollierende und nachvollziehende Akteur muß als einer gedacht werden, der Handlungen gemäß Verfahren als Zweckrealisierungsversuche vollziehen *kann*. Eine Verständigung über Handlungen ist generell nur möglich, wenn wir nicht nur über Handlungsvorkommnisse (tokens), sondern auch über Handlungsschemata (types) kontrolliert reden können. Über ein Handlungsschema reden heißt, wissen, wann *dasselbe noch einmal* getan wird.[54] Je nach Handlungstyp gibt es Kennzeichen dafür, ob jemand diesen Handlungstyp beherrscht oder nicht. Ein Verfahren des Beweisens muß wenigstens folgende Anforderungen erfüllen, was auf Seiten des Akteurs Fähigkeiten nicht-trivialer Art unterstellt:

(a) Das Verfahren muß *regelgemäß* sein, das heißt, es müssen wenigstens implizite Regeln rekonstruierbar sein, die für jedermann die Wiederholbarkeit sichern. Damit wird für jeden Akteur die Fähigkeit unterstellt, eine kanonische Handlungsfolge einzuhalten (regulative Kompetenz).
(b) Das Verfahren muß *lückenlos* sein, das heißt, es darf beim schrittweisen Durchlaufen keine Schritte geben, die nicht durch die Regeln erlaubt sind. Dies unterstellt für jeden Akteur die Fähigkeit, Handlungsfolgen *als Folgen* zu bilden und wahrzunehmen (konsekutive Kompetenz).
(c) Das Verfahren darf keinen *Zirkel* enthalten. Dies unterstellt die Fähigkeit, Wiederholungen in einer Handlungsfolge zu erkennen und zu vermeiden (repetitive Kompetenz).

Das Subjekt, auf das der Verfahrensbegriff verweist, muß also mit spezifischen, durchaus anspruchvollen Kompetenzen wie regulativer, konsekutiver und repetitiver Kompetenz ausgestattet gedacht werden.

---

[54] Vgl. Kamlah/Lorenzen 1973, Kap. II.2; in dieser Fassung nach Lorenz 1976, S. 258.

Der Gedanke der Bindung des „Wahrseins" an das Vorführenkönnen eines Verfahrens ist als Versuch zu verstehen, das Problem der Unkontrollierbarkeit von prätendierten Wahrheits*intuitionen* zu vermeiden. Ein endlicher Akteur muß sich die Wahrheit einer sprachlichen Entität gemäß dem regelgerechten, lückenlosen und zirkelfreien Durchlaufen eines Verfahrens – diskursiv, nicht-intuitiv – im Prinzip jederzeit reproduzierbar vor Augen führen können. Führt der Beweisbarkeitsbegriff das Zu- und Absprechen von Wahrheit auch über das einzelne Beweisvorkommnis hinaus, so jedoch nicht beliebig: Über Wahrheit weiß ein endliches Wesen nur durch diskursive Verfahren etwas. Die intuitionistische Logik und die mit ihr gegebene Ablehnung des Bivalenzprinzips läßt diese Logik als eine Logik für endliche Wesen erscheinen. Ein unendliches Wesen könnte vielleicht für die Behauptung des Bivalenzprinzips eine Einlösung finden (jedoch: gilt für Gott der Unentscheidbarkeitsbeweis nicht?). Einem endlichen Wesen ist dies jedenfalls verwehrt.

Zusammenfassend liegt die philosophische Bedeutung des Intuitionismus, dem Heyting durch seine Aufsätze Bahn bricht, in der Beschränkung des Verständnisses von Wahrheit und Realität auf das einem endlichen Wesen durch diskursive Verfahren Erreichbare. Mit der Ablehnung des Bivalenzprinzips als meta-logischem Prinzip wird ein epistemologischer Anti-Realismus begründet, der *in nuce* eine Theorie der endlichen Subjektivität darstellt.

Literatur

Ayer, A. J.: Language, Truth and Logic. London, 1936.

Bauer, F. L.: Intuitionismus und Informatik. In: Informatik-Spektrum, 22. August 1999, S. 284-287.

Becker, O.: Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene. In: Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, 8 (1927), S. 439-809 (Nachdruck Tübingen 1973).

Beth, E. W.: Mathematical Thought. An Introduction to the Philosophy of Mathematics, Dordrecht, 1965.

Bieberbach, L.: Stilarten mathematischen Schaffens. In: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1934, S. 351-360.

Bourbaki, N.: Elements of Mathematics, Bd. I: Theory of Sets. Reading (Mass.), 1968.

Brandom, R. B.: Making it Explicit. Reasoning, Representing, and Discursive Commitment, Cambridge (Mass.)/London, 1994.

Brouwer, L. E. J.: Over de Grondslagen der Wiskunde, Amsterdam/Leipzig, 1907.

Ders.: De onbetrouwbaarheid der logische principes. In: Tijdschrift voor Wijsbegeerte, 2 (1908), S. 152-158.

Ders.: Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. In: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1928, S. 48-52.

Carnap, R.: Die logizistische Grundlegung der Mathematik. In: Erkenntnis, 2 (1931), S. 91-105.

Ders.: Logische Syntax der Sprache, 2. Auflage, Wien/New York, 1968 (1. Auflage Wien 1934).

Dalen, D. van: The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the *Mathematische Annalen*. In: The Mathematical Intelligencer, 4 (1990), S. 17-31.

Ders.: Mystic, Geometer, Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer, Oxford, 1999.

Dummett, M. A. E.: What is a Theory of Meaning? In: Guttenplan, S. (Hg.), Mind and Language, Oxford, 1975, S. 97-138.

Ders.: Elements of Intuitionism, Oxford, 1977.

Ders.: The Justification of Deduction. In: Ders., Truth and Other Enigmas, London, 1978a, S. 290-318.

Ders.: The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic. In: Ders., Truth and Other Enigmas, London, 1978b, S. 215-247.

Ders.: Comments on Professor Prawitz's Paper. In: von Wright, G. H. (Hg.), Logic and Philosophy, Den Haag u. a., 1980, S. 11-18.

Feigl, H.: The Wiener Kreis in America. In: Fleming, D. & B. Bailyn (Hg.), Perspectives in American History, Vol. 2, Cambrige (Mass.), 1968, S. 630-673 (Nachdruck in: Feigl, H., Inquiries and Provocations. Selected Writings 1929-1974, Dordrecht u. a., 1981, S. 57-94).

Frascolla, P.: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. London/New York, 1994.

Frege, G.: Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. In: Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, 2 (1918/1919), S. 58-77.

Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schließen. In: Mathematische Zeitschrift, 39 (1934), S. 176-210 und 405-431.

Gethmann, C. F.: Letztbegründung vs. lebensweltliche Fundierung des Wissens und Handelns. In: Forum für Philosophie Bad Homburg (Hg.), Philosophie und Begründung, Frankfurt (Main), 1987, S. 268-302.

Ders.: Phänomenologische Logikfundierung. In: Jamme, C. & O. Pöggeler (Hg.), Phänomenologie im Widerstreit. Zum 50. Todestag Edmund Husserls, Frankfurt (Main), 1989, S. 192-212.

Ders.: Phänomenologie, Lebensphilosophie und konstruktive Wissenschaftstheorie. Eine historische Skizze zur Vorgeschichte der Erlanger Schule. In: Ders. (Hg.), Lebenswelt und Wissenschaft. Studien zum Verhältnis von Phänomenologie und Wissenschaftstheorie, Bonn, 1991, S. 28-77.

Ders.: Husserl und der logische Intuitionismus. In: Janich, P. (Hg.), Wechselwirkungen. Zum Verhältnis von Kulturalismus, Phänomenologie und Methode, Würzburg, 1999, S. 55-76.

Ders.: Hermeneutische Phänomenologie und logischer Intuitionismus. In: Gethmann, A. & J. Mittelstraß (Hg.), Phänomenologie und die Wissenschaften, München, 2000a (in Vorbereitung).

Ders.: Arend Heyting und die phänomenologische Erkenntnistheorie. In: Gethmann, A. & J. Mittelstraß (Hg.), Phänomenologie und die Wissenschaften, München, 2000b (in Vorbereitung).

Habermas, J.: Von Kant zu Hegel. Zu Robert Brandoms Sprachpragmatik. In: Ders., Wahrheit und Rechtfertigung. Philosophische Aufsätze, Frankfurt (Main), 1999, S. 138-185.

Hegselmann, R.: Normativität und Rationalität. Zum Problem praktischer Vernunft in der analytischen Philosophie, Frankfurt (Main)/New York, 1979.

Hesseling, D. E.: Gnomes in the Fog. The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s, Utrecht, 1999.

Heyting, A.: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. In: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl., 1930a, S. 42-56.

Ders.: Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. In: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl., 1930b, S. 57-71, 158-169.

Ders.: Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. In: Erkenntnis, 2 (1931), S. 106-115.

Hilbert, D.: Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. In: Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse, 1900, S. 253-297.

Hinst, P.: Klassische, intuitionistische oder dreiwertige Logik? In: Zeitschrift für philosophische Forschung, 31 (1977), S. 61-78.

Janich, P.: Die methodische Ordnung von Konstruktionen. In: Ders., Konstruktivismus und Naturerkenntnis. Auf dem Weg zum Kulturalismus, Frankfurt (Main), 1996, S. 105-122.

Johansson, I.: Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. In: Compositio Mathematica, 4 (1937), S. 119-136.

Kamlah, W. & P. Lorenzen: Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens, 2. Auflage, Mannheim, 1973 (1. Auflage 1967).

Kaufmann, F.: Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung. Eine Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik, Leipzig/Wien, 1930 (Nachdruck Darmstadt 1968).

Lindner, H.: „Deutsche" und „gegentypische" Mathematik. Zur Begründung einer arteigenen Mathematik im Dritten Reich durch Ludwig Bieberbach. In: Mehrtens, H. & S. Richter (Hg.), Naturwissenschaft, Technik und NS-Ideologie, Frankfurt (Main), 1980, S. 88-115.

Lorenz, K.: Elemente der Sprachkritik, Frankfurt (Main), 1970.

Ders.: Der dialogische Wahrheitsbegriff. In: neue hefte für philosophie, 2/3 (1972), S. 111-123.

Ders.: Sprachtheorie als Teil einer Handlungstheorie. Ein Beitrag zur Einführung linguistischer Grundbegriffe. In: Wunderlich, D. (Hg.), Wissenschaftstheorie der Linguistik, Kronberg, 1976, S. 250-266.

Lorenzen, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin/Heidelberg, 1955.

Ders.: Metamathematik, Mannheim, 1962.

Ders.: Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis, Frankfurt (Main), 1965.

Ders.: Constructive Mathematics as a Philosophical Problem. In: Compositio Mathematica, 20 (1968), S. 133-142.

Mainzer, K.: Konstruktion. In: Mittelstraß, J. (Hg.), Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, Bd. 2, Mannheim/Wien/Zürich, 1984, S. 445-447.

Mancosu, P. (Hg.): From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s, New York, 1998.

Mehrtens, H.: Ludwig Bieberbach and 'Deutsche Mathematik'. In: MAA Studies in Mathematics 26: Studies in the History of Mathematics, 1987, S. 195-241.

Menger, K.: Der Intuitionismus. In: Blätter für Deutsche Philosophie, 4 (1930/31), S. 311-325.

Neumann, J. von: Die formalistische Grundlegung der Mathematik. In: Erkenntnis, 2 (1931), S. 116-121.

Prawitz, D.: Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study, Uppsala, 1965.

Ders.: Towards a Foundation of a General Proof Theory. In: Suppes, P. et al. (Hg.), Logic, Methodology and Philosophy of Science. IV. Proceedings of the 1971 International Congress, Amsterdam, 1973, S. 225-250.

Ders.: On the Idea of a General Proof Theory. In: Synthese, 27 (1974), S. 63-77.

Ders.: Meaning and Proofs. On the Conflict between Classical and Intuitionistic Logic. In: Theoria, 43 (1977), S. 1-40.

Ders.: Intuitionistic Logic. A Philosophical Challenge. In: von Wright, G. H. (Hg.), Logic and Philosophy, Den Haag u. a., 1980, S. 1-10.

Ders.: Philosophical Aspects of Proof Theory. In: Floistad, G. (Hg.), Contemporary Philosophy. A New Survey I, Den Haag u. a., 1981, S. 235-277.

Ders. & P.-E. Malmnäs: A Survey of Some Connections between Classical, Intuitionistic and Minimal Logic. In: Schütte, K. et al. (Hg.), Contributions to Mathematical Logic. Proceedings of the Logic Colloquium Hannover 1966, Amsterdam, 1968, 215-229.

Richter, V.: Untersuchungen zur operativen Logik der Gegenwart, Freiburg i. Br., 1965.

Schappacher, N. & M. Kneser: Fachverband – Institut – Staat. In: Fischer, G. et al. (Hg.), Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV, Braunschweig/Wiesbaden, 1990, S. 1-82.

Schlick, M.: Form und Inhalt. Eine Einführung in philosophisches Denken. In: Ders., Philosophische Logik, Frankfurt (Main), 1986, S. 110-222.

Schmidt, S. J. (Hg.): Der Diskurs des Radikalen Konstruktivismus, Frankfurt (Main), 1987.

Schütte, K. & H. Schwichtenberg: Mathematische Logik. In: Fischer, G. et al. (Hg.), Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV, Braunschweig/Wiesbaden, 1990, S. 717-740.

Siegwart, G.: Vorfragen zur Wahrheit. Ein Traktat über kognitive Sprachen, München, 1997.

Stigt, W. P. van: Brouwer's Intuitionism, Amsterdam, 1990.

Tennant, N.: Anti-Realism and Logic, Oxford, 1987.

Ders.: The Taming of the True, Oxford, 1997.

Thiel, C.: Die Kontroverse um die intuitionistische Logik vor ihrer Axiomatisierung durch Heyting im Jahre 1930. In: History and Philosophy of Logic, 9 (1988), S. 67-75.

Troelstra, A. S.: The Scientific Work of A. Heyting. In: Compositio Mathematica, 20 (1968), S. 3-12.

Ders.: The Interplay between Logic and Mathematics: Intuitionism. In: Agazzi, E. (Hg.), Modern Logic – A Survey, Dordrecht/Boston, 1980, S. 197-221.
Ders.: Arend Heyting and his Contribution to Intuitionism. In: Nieuw archief voor wiskunde, 29 (1981), S. 1-23.
Ders. & D. van Dalen: Constructivism in Mathematics. An Introduction, Amsterdam u. a., 1988.
Ders. & H. Schwichtenberg: Basic Proof Theory. Amsterdam u. a., 1996.
Weyl, H.: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik (Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich). In: Mathematische Zeitschrift, 10 (1921), S. 39-79.
Wright, C.: Realism, Meaning and Truth, Oxford, 1987.