Helmut Schwichtenberg

Beweise und Programme : Anmerkungen zu Heytings Formalisierung der intuitionistischen Logik

Vortrag in der gemeinsamen Sitzung der Geisteswissenschaftlichen und der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse am 26. November 1999

In: Berichte und Abhandlungen / Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften (vormals Preußische Akademie der Wissenschaften) ; 8.2000, S. 71-94

Persistent Identifier: urn:nbn:de:kobv:b4-opus4-32090

Helmut Schwichtenberg

Beweise und Programme.

Anmerkungen zu Heytings Formalisierung der intuitionistischen Logik

(Vortrag in der gemeinsamen Sitzung der Geisteswissenschaftlichen und der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse am 26. November 1999)

In der Mathematik wurde es schon immer für möglich und sinnvoll gehalten, zwischen Existenzbeweisen zu unterscheiden, die das als existent nachgewiesene Objekt tatsächlich liefern, und solchen, die dies nicht tun. Als Beispiel betrachten wir die folgende Aussage.

Es gibt irrationale Zahlen a, b mit a^b rational.

Einen Beweis erhält man wie folgt durch Fallunterscheidung.

Fall $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational. Man wähle $a=\sqrt{2}$ und $b=\sqrt{2}$. Dann sind a, b irrational, und nach Annahme ist a^b rational.

Fall $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist irrational. Man wähle $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b=\sqrt{2}$. Dann sind nach Annahme a, b irrational, und

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

ist rational. □

Solange wir nicht entschieden haben, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nun rational ist oder nicht, wissen wir nicht, welche Zahlen a, b wir nehmen müssen. Damit haben wir ein Beispiel eines Existenzbeweises, der es nicht erlaubt, das als existent nachgewiesene Objekt tatsächlich anzugeben. Weyl (in [20]; s. auch van Dalen [19]) hat die Notwendigkeit einer solchen Unterscheidung wie folgt begründet:

> Ein Existentialsatz – etwa „es gibt eine gerade Zahl" – ist überhaupt kein Urteil im eigentlichen Sinne, das einen Sachverhalt behauptet; Existentialsachverhalte sind eine leere Erfindung der Logiker. „2 ist eine gerade Zahl", das ist ein wirkliches, einem Sachverhalt Ausdruck gebendes Urteil; „es gibt

> eine gerade Zahl" ist nur ein aus diesem Urteil gewonnenes Urteilsabstrakt. Bezeichne ich Erkenntnis als einen wertvollen Schatz, so ist das Urteilsabstrakt ein Papier, welches das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. Sein einziger Wert kann darin liegen, daß es mich antreibt, nach dem Schatze zu suchen.

Ausgehend von derartigen Überlegungen hat Brouwer seine intuitionistische Mathematik und Logik begründet. Brouwer hat sich jedoch stets gegen eine Formalisierung der intuitionistischen Logik gewandt, die ihm der von ihm vertretenen Sache nicht dienlich zu sein schien. Dennoch hat sein Schüler Heyting eine solche in [9] durchgeführt.

In der vorliegenden Note sollen einige der positiven Auswirkungen von Heytings Arbeit auf weitere Entwicklungen in der mathematischen Logik und ihren Anwendungen beschrieben werden. Es wird deutlich werden, daß ein Aufbau auch der klassischen Logik auf den Regeln der intuitionistischen und darüber hinausgehend der Minimallogik wesentliche Vorteile bietet. Ein Hauptgrund liegt darin, daß Gentzens Kalkül des natürlichen Schließens [8] für die Minimallogik genau dem λ-Kalkül mit einfachen Typen entspricht (s. etwa [18] für eine einführende Darstellung dieser sogenannten Curry-Howard-Korrespondenz). Dies ist die wesentliche Grundlage für Anwendungen der intuitionistischen Logik in der Informatik, die gegenwärtig viel Aufmerksamkeit finden (s. etwa Bauer [1]). Einige derartige Anwendungen werden am Schluß dieser Note besprochen.

Wir beginnen in Abschnitt 1 mit einer Darstellung von Heytings Formalisierung der intuitionistischen Logik in einer für die anschließend zu beschreibenden Untersuchungen geeigneten Form. Hierbei werden Gentzens Kalkül des natürlichen Schließens [8] für die Minimallogik (Johansson [12]) zugrunde gelegt und die intuitionistische und klassische Logik durch fortschreitende Spezialisierung gewonnen. Den grundlegenden Vollständigkeitsbeweis geben wir für die Minimallogik unter Verwendung von Beth-Strukturen, nach einem (unveröffentlichten) Ansatz von Harvey Friedman. Daraus lassen sich dann durch recht einfache Spezialisierungen die Vollständigkeitsbeweise der intuitionistischen (auch bzgl. Beth-Strukturen) und der klassischen Logik (bzgl. gewöhnlicher Strukturen) gewinnen; die letztere geht auf Berger zurück. Abschnitt 2 befaßt sich mit der Extraktion von Programmen aus konstruktiven Beweisen. Im abschließenden Abschnitt 3 berichten wir kurz über neuere Versuche, auch aus klassischen Beweisen Programme extrahieren zu können; dies ist in [5] näher ausgeführt. Als Beispiel wird unter anderem ein einfacher klassischer Beweis des Dicksonschen Lemmas angegeben und analysiert. Er läßt sich leicht vollständig formalisieren und führt auf ein sehr einfaches, unerwartetes funktionales Programm.

1 Logik

Wir geben eine Formalisierung der Logik in Gentzens Kalkül des natürlichen Schließens [8] an. In ihr lassen sich die Minimallogik, die intuitionistische und die klassische Logik darstellen. Die *Minimallogik* (Johansson [12]) ist die Grundlage unserer Darstellung. Wir schreiben $\Gamma \vdash A$ für „Γ beweist A", wobei $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Menge von Annahmen ist. Die *intuitionistische Logik* (Heyting [9]) ergibt sich aus der Minimallogik, indem man ein spezielles Aussagensymbol $\bot$ (lies „falsum") hinzunimmt. Die Negation wird dann definiert durch $\neg A := A \to \bot$. Damit $\bot$ sich von einem gewöhnlichen Aussagensymbol unterscheidet, sind zusätzliche Annahmen notwendig: die *Ex-Falso-Quodlibet*-Formeln

$$\forall \vec{x}.\, \bot \to R\vec{x}\,. \tag{Efq_R}$$

Die *klassische Logik* ergibt sich durch eine weitere Verstärkung der Annahmen: man nimmt das *Prinzip des indirekten Beweisens* hinzu, also

$$\forall \vec{x}.\neg\neg R\vec{x} \to R\vec{x} \tag{Stab_R}$$

für jedes Prädikatensymbol R. Es gilt dann $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash_i A \Rightarrow \Gamma \vdash_c A$. Die Umkehrungen sind nicht richtig: zum Beispiel die Peirce-Formel $((P \to Q) \to P) \to P$ ist klassisch, aber nicht intuitionistisch herleitbar.

Eine Einbettung der intuitionistischen und der klassischen Logik in die Minimallogik ist im wesentlichen von Kolmogorov (in [13]) angegeben worden; Gödel und Gentzen haben später (und unabhängig von Kolmogorov) ähnliche Einbettungen gefunden (s. Definition 1.6).

Eine weitere wichtige Rolle spielt der starke Existenzquantor $\exists^*$. Er fehlt in der klassischen Logik; statt seiner wird dort der schwache Existenzquantor $\exists$ verwendet, der durch $\exists x A := \neg\forall x \neg A$ definiert ist. In diesem Sinn ist die klassische Logik echt enthalten in der intuitionistischen Logik.

1.1 Herleitungen

Wir wollen jetzt den Begriff einer *logischen Herleitung* einer Formel A definieren. Dazu verwenden wir ein System des „natürlichen Schließens", das 1934 von Gentzen eingeführt wurde. Seine besondere Eigenart ist es, daß für jede logische Verknüpfung *Einführungs- und Beseitigungsregeln* vorhanden sind.

Zunächst haben wir eine Annahmeregel, die es gestattet, eine beliebige mit einer Marke u versehene Formel A als Annahme hinzuschreiben:

$$u : A \quad \text{Annahme}$$

Für die Konjuktion $\wedge$ haben wir eine Einführungsregel $\wedge^+$ und zwei Beseitigungsregeln $\wedge_0^-$ und $\wedge_1^-$.

$$\frac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_1\\ A & B\end{array}}{A\wedge B}\wedge^+ \qquad \frac{\mathcal{D}}{A}\wedge_0^- \qquad \frac{\mathcal{D}}{B}\wedge_1^-$$

Für die Implikation $\to$ gibt es eine Einführungsregel $\to^+ u$ und eine Beseitigungsregel $\to^-$, die man auch *modus ponens* nennt. Die linke Prämisse $A\to B$ in $\to^-$ nennt man *Hauptprämisse*, die rechte Prämisse A *Nebenprämisse*. Man beachte, daß bei Anwendung einer $\to^+ u$-Regel *alle* darüber stehenden mit u markierten Annahmen A gestrichen werden.

$$\frac{\begin{array}{c}[u:A]\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{A\to B}\to^+ u \qquad \frac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_1\\ A\to B & A\end{array}}{B}\to^-$$

Für den Allquantor $\forall$ gibt es eine Einführungsregel $\forall^+ x$ und eine Beseitigungsregel $\forall^-$, die als rechte Prämisse den zu substituierenden Term t hat. Die Regel $\forall^+ x$ unterliegt der folgenden *Variablenbedingung*: Die Herleitung $\mathcal{D}$ der Prämisse A darf keine offenen Annahmen enthalten, in denen x frei vorkommt.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A\end{array}}{\forall x A}\forall^+ x \qquad \frac{\begin{array}{cc}\mathcal{D} & \\ \forall x A & t\end{array}}{A[x:=t]}\forall^-$$

Wir schreiben $\vdash A$ und nennen A *herleitbar* (in der *Minimallogik*), wenn es eine Herleitung von A ohne freie Annahmen gibt. Eine Formel B heißt herleitbar aus den Annahmen $A_1,\dots,A_n$, wenn es eine Herleitung mit freien Annahmen unter $A_1,\dots,A_n$ gibt. Sei Γ eine (endliche oder unendliche) Menge von Formeln. Wir schreiben $\Gamma\vdash B$, wenn die Formel B aus endlich vielen Annahmen $A_1,\dots,A_n\in\Gamma$ herleitbar ist.

Intuitionistische und klassische Logik

In unserer $\to\wedge\forall$-Sprache erhalten wir die *intuitionistische Logik*, indem wir gewisse zusätzliche Annahmen verwenden, und zwar die sogenannten *Ex-Falso-Quodlibet*-Formeln (oder „Axiome") Efq_R für jedes von $\bot$ verschiedene Relationssymbol R

$$\forall\vec{x}.\,\bot\to R\vec{x}. \qquad (\mathsf{Efq}_R)$$

Ähnlich erhält man die *klassische Logik*: wir nehmen für jedes von $\bot$ verschiedene Relationssymbol R das *Prinzip des indirekten Beweisens* für R als zusätzliche Annahme hinzu, also die Formel

$$\forall \vec{x}.\neg\neg R\vec{x} \to R\vec{x} \qquad (\mathsf{Stab}_R)$$

Diese Formel bezeichnet man auch als *Stabilität* von R.
Man beachte, daß mit $\bot$ für R beide Formeln trivialerweise herleitbar sind; zum Beispiel für die Stabilität haben wir $\neg\neg\bot\to\bot = ((\bot\to\bot)\to\bot)\to\bot$. Die gesuchte Herleitung ist

$$\dfrac{v:(\bot\to\bot)\to\bot \qquad \dfrac{u:\bot}{\bot\to\bot}\to^+ u}{\bot}$$

Sei

$$\mathsf{Efq} := \{\mathsf{Efq}_R \mid R \text{ Relationssymbol} \neq \bot\};$$
$$\mathsf{Stab} := \{\mathsf{Stab}_R \mid R \text{ Relationssymbol} \neq \bot\}.$$

Wir nennen die Formel A *klassisch (intuitionistisch) herleitbar* und schreiben $\vdash_c A (\vdash_i A)$, wenn es eine Herleitung von A aus Stabilitätsannahmen Stab_R (Ex-Falso-Quodlibet Annahmen Efq_R) gibt. Ebenso definieren wir klassische (intuitionistische) Herleitbarkeit aus Γ und schreiben $\Gamma\vdash_c A (\Gamma\vdash_i A)$, also

$$\Gamma\vdash_i A :\Leftrightarrow \Gamma\cup\mathsf{Efq}\vdash A,$$
$$\Gamma\vdash_c A :\Leftrightarrow \Gamma\cup\mathsf{Stab}\vdash A.$$

Lemma 1.1 (*Ex-falso-quodlibet*). *Für jede Formel A gilt $\vdash_i \bot\to A$.*

Beweis: Durch Induktion über A konstruieren wir für jede Formel A eine Herleitung $\mathcal{D}_A$ von $\bot\to A$.

Fall $R\vec{t}$. Mit Efq_R.

Fall $A\wedge B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_A}{\bot\to A} \quad u:\bot}{A} \quad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_B}{\bot\to B} \quad u:\bot}{B}}{\dfrac{A\wedge B}{\bot\to A\wedge B}\to^+ u}$$

Fall $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_B}{\bot \to B} \quad u:\bot}{B}}{\dfrac{A \to B}{\bot \to A \to B}} \to^+ u$$

Fall $\forall x A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_A}{\bot \to A} \quad u:\bot}{A}}{\dfrac{\forall x A}{\bot \to \forall x A}} \to^+ u$$

□

Lemma 1.2 (*Stabilität*). *Für jede Formel A (unserer* $\to \wedge \forall$-Sprache) *gilt* $\vdash_c \neg\neg A \to A$.

Beweis: Induktion über A. In den konstruierten Herleitungen lassen wir der Kürze halber Anwendungen von $\to^+$ am Schluß fort. *Fall* $R\vec{t}$. Mit Stab_R. *Fall* $A \wedge B$. Mit $\vdash (\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg B \to B) \to \neg\neg(A \wedge B) \to A \wedge B$, was leicht aus $\vdash \neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ folgt (was man leicht als Übung verifizieren kann). *Fall* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$. Mit $\vdash (\neg\neg B \to B) \to \neg\neg(A \to B) \to A \to B$. Eine Herleitung ist

$$\dfrac{u:\neg\neg B \to B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot}}{\neg\neg B} \to^+ u_1}{v:\neg\neg(A \to B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{u_2:A \to B \quad w:A}{B}}{\bot}}{\neg(A \to B)} \to^+ u_2}{\bot}}{B}$$

Fall $\forall x A$. Offenbar genügt es zu zeigen, daß $\vdash (\neg\neg A \to A) \to \neg\neg\forall x A \to A$. Eine Herleitung ist

$$\dfrac{u:\neg\neg A \to A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot}}{\neg\neg A} \to^+ u_1}{v:\neg\neg\forall x A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{u_2:\forall x A \quad x}{A}}{\bot}}{\neg\forall x A} \to^+ u_2}{\bot}}{A}$$

□

Lemma 1.3 $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash_i A$ und $\Gamma \vdash_i A \Rightarrow \Gamma \vdash_c A$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $\vdash_c \mathsf{Efq}_R$. Dies sieht man wie folgt; R sei etwa einstellig.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.\neg\neg Rx \to Rx \qquad x}{\neg\neg Rx \to Rx} \qquad \dfrac{u:\bot}{\neg\neg Rx}\to^+ v^{\neg Rx}}{Rx}}{\dfrac{Rx}{\bot \to Rx}\to^+ u}}{\forall x.\bot \to Rx}\forall^+$$

□

Die Umkehrungen gelten jedoch nicht; Gegenbeispiele sind:

$$\not\vdash \bot \to P, \qquad \text{aber } \vdash_i \bot \to P,$$
$$\not\vdash_i ((P \to Q) \to P) \to P, \qquad \text{aber } \vdash_c ((P \to Q) \to P) \to P.$$

$\vdash_i \bot \to P$ folgt aus Lemma 1.1, und die Peirce-Formel $((P \to Q) \to P) \to P$ läßt sich leicht klassisch herleiten. Die negativen Aussagen erfordern ein genaueres Studium der Herleitbarkeit. Wir werden in Abschnitt 1.3 einen Beweis geben.
Wir nennen zwei Formeln A und B *äquivalent* in der Minimallogik bzw. in der klassischen oder intuitionistischen Logik, wenn $\vdash A \leftrightarrow B$ bzw. $\vdash_c A \leftrightarrow B$ oder $\vdash_i A \leftrightarrow B$.

Lemma 1.4 (*Äquivalenzlemma*). *Für* $\vdash_{mic} \in \{\vdash, \vdash_i, \vdash_c\}$ *gilt folgendes. Ist* $\vdash_{mic} A_1 \leftrightarrow A_2$ *und entsteht* B_2 aus B_1 *durch Ersetzen eines Teils* A_1 *von* B_1 *durch* A_2, *so gilt auch* $\vdash_{mic} B_1 \leftrightarrow B_2$.

Beweis: Induktion über B_1.

Einbettung der intuitionistischen und klassischen Logik in die Minimallogik

Nachdem wir die klassische und die intuitionistische Logik definiert haben, wollen wir jetzt zeigen, daß beide Logiken in die Minimallogik eingebettet werden können. Dies mag verwunderlich erscheinen; es folgt wesentlich aus der Tatsache, daß wir uns auf eine Sprache beschränkt haben, die nur die Verknüpfungen $\{\to, \wedge, \forall\}$ enthält.
Eine Formel A (unserer $\to \wedge \forall$ -Sprache) heißt *negativ*, wenn jede atomare Formel $\neq \bot$ in A negiert vorkommt, d. h. in einem Kontext $R\vec{t} \to \bot$.

Lemma 1.5 *Für negative* A *gilt* $\vdash \neg\neg A \to A$.

Beweis: Dies beweist man wie das Stabilitätslemma 1.2 durch Induktion über A, wobei man anstelle der Stabilitätsannahmen verwendet $\vdash \neg\neg\neg R\vec{t} \to \neg R\vec{t}$.

Definition 1.6 (Negative Übersetzung ^{g} nach Gödel-Gentzen).

$$\begin{aligned} R\vec{t}^{\,g} &:= \neg\neg R\vec{t} \text{ für } R \neq \bot, \\ \bot^g &:= \bot, \\ (A \wedge B)^g &:= A^g \wedge B^g, \\ (A \to B)^g &:= A^g \to B^g, \\ (\forall x A)^g &:= \forall x A^g. \end{aligned}$$

Satz 1.7 *Für alle Formeln A gilt*
1. $\vdash_c A \leftrightarrow A^g$,
2. $\Gamma \vdash_c A$ *genau dann, wenn* $\Gamma^g \vdash A^g$, *wobei* $\Gamma^g := \{B^g \mid B \in \Gamma\}$.

Beweis: Der erste Teil folgt sofort aus dem Äquivalenzlemma 1.4. Für den zweiten Teil ist die Richtung von rechts nach links klar. Für die andere Richtung argumentieren wir durch Induktion nach der klassischen Herleitung. Für eine Stabilitätsannahme $\neg\neg R\vec{t} \to R\vec{t}$ gilt $(\neg\neg R\vec{t} \to R\vec{t})^g = \neg\neg\neg\neg R\vec{t} \to \neg\neg R\vec{t}$, und dies ist leicht herleitbar. *Fall* $\to^+$. Gelte

$$\dfrac{\begin{array}{c}[u:A] \\ \mathcal{D} \\ B\end{array}}{A \to B} \to^+ u$$

Dann haben wir nach IH

$$\begin{array}{c} u : A^g \\ \mathcal{D}^g \\ B^g \end{array} \quad \text{also} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[u:A^g] \\ \mathcal{D}^g \\ B^g\end{array}}{A^g \to B^g} \to^+ u$$

Fall $\to^-$. Gelte

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_1 \\ A \to B & A\end{array}}{B}$$

Dann haben wir nach IH

$$\begin{array}{cc}\mathcal{D}_0^g & \mathcal{D}_1^g \\ A^g \to B^g & A^g\end{array} \quad \text{also} \quad \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_0^g & \mathcal{D}_1^g \\ A^g \to B^g & A^g\end{array}}{B^g}$$

Die restlichen Fälle behandelt man ähnlich. □

Korollar 1.8 (*Einbettung der klassischen Logik in die Minimallogik*). *Für negative A gilt* $\vdash_c A$ *genau dann, wenn* $\vdash A$.

Beweis: Nach dem Satz gilt $\vdash_c A$ genau dann, wenn $\vdash A^g$. Da A negativ ist, muß jedes Atom $\neq\bot$ in A negiert vorkommen, ist also in A^g dreifach negiert (als $\neg\neg\neg R\vec{t}$). Die Behauptung folgt aus $\vdash \neg\neg\neg R\vec{t} \leftrightarrow \neg R\vec{t}$.

Da jede Formel klassisch äquivalent zu einer negativen Formel ist, haben wir damit eine Einbettung der klassischen in die Minimallogik erreicht.
Man beachte, daß $\not\vdash \neg\neg P \to P$ (wie wir in Abschnitt 1.3 zeigen werden). Das Korollar gilt also nicht für alle Formeln A.

Starke Disjunktion und Existenz

Wenn man für Zwecke der Programmextraktion einen Existenzbeweis führen will, so ist es vorteilhaft, neben dem bisher behandelten *schwachen* oder *klassischen* Existenzquantor $\exists$ (der durch $\neg\forall\neg$ definiert war) auch noch einen *starken* oder *konstruktiven* Existenzquantor $\exists^*$ zuzulassen. Man kann dann in den Fällen, in welchen ein Existenzbeweis tatsächlich konstruktiv durch Angabe eines Beispiels geführt wurde, dies auch in der Formelsprache angemessen ausdrücken.
Entsprechend könnte man neben der bisher behandelten *schwachen* oder *klassischen* Disjunktion $\vee$ (die durch $\neg\wedge\neg$ definiert war) auch noch eine *starke* oder *konstruktive* Disjunktion $\vee^*$ zulassen. In Anwesenheit des Grundtyps ι der natürlichen Zahlen ist dies jedoch entbehrlich: Wir definieren

$$A \vee^* B := \exists^* n.(n = 0 \to A) \wedge (n \neq 0 \to B).$$

Wir wollen kurz diskutieren, welchen Effekt die Hinzunahme von $\vee^*$, $\exists^*$ auf unsere bisherigen Untersuchungen hat. Die Regeln der Minimallogik können wir beibehalten und die starke Disjunktion sowie den starken Existenzquantor durch die Generalisierung der folgenden Formeln axiomatisieren.

$$A \to A \vee^* B, \quad B \to A \vee^* B.$$
$$A \vee^* B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C.$$
$$A \to \exists^* x A.$$
$$\exists^* x A \to (\forall x.A \to B) \to B, \quad \text{falls } x \notin \mathrm{FV}(B).$$

Diese Axiomenschemata bezeichnen wir durch $\vee_0^{*+}$, $\vee_1^{*+}$, $\vee^{*-}$, $\exists^{*+}$ und $\exists^{*-}$. Für Formeln A in der durch $\vee^*$ und $\exists^*$ erweiterten Sprache schreiben wir $\vdash A$ und nennen A *herleitbar* (in der *Minimallogik*), wenn es eine Herleitung von A aus diesen Axiomenschemata gibt.

Lemma 1.9 (*Ex-falso-quodlibet*). Für jede Formel A in der Sprache mit den Verknüpfungen $\to, \wedge, \vee^*, \forall$ und $\exists^*$ gilt

$$\vdash_i \bot \to A .$$

Beweis: Wir müssen nur die Fälle $A \vee^* B$ und $\exists^* x A$ zusätzlich behandeln, was aber trivial ist. □

Die Einbettung der intuitionistischen Logik läßt sich also wie bisher durchführen.

1.2 Modelle

Es ist eine offensichtliche Frage, ob unsere logischen Regeln ausreichen, d. h., ob wir notwendige Regeln vergessen haben. Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir die *Bedeutung* einer Formel kennen, d. h., wir müssen eine *Semantik* angegeben haben. Dazu definiert man wie üblich den Begriff einer Struktur (genauer $\mathcal{L}$-Struktur, wobei $\mathcal{L}$ die zugrundeliegende Sprache ist) und erklärt dann, was der Wert eines Terms und die Bedeutung einer Formel in einer solchen Struktur sein sollen. Man zeigt dann leicht den Korrektheitssatz: er sagt aus, daß jede in der klassischen Logik herleitbare Formel in einer beliebigen Struktur gültig ist.
Wir betrachten hier den Strukturbegriff von Beth, der zur Minimallogik und zur intuitionistischen Logik paßt, und zeigen einen Korrektheitssatz für beide Logiken. Im nächsten Anschnitt beweisen wir dann die Vollständigkeit unserer Regeln bezüglich dieses Strukturbegriffs, und als Folgerung erhalten wir im übernächsten Abschnitt die Vollständigkeit der klassischen Logik bezogen auf den üblichen Strukturbegriff.

Beth-Strukturen

Ein zur Minimallogik und zur intuitionistischen Logik passender Strukturbegriff wurde zuerst von Beth [6] konzipiert; er basiert auf einer Vorstellung von „sich entwickelnden möglichen Welten", die durch Knoten k eines endlich verzweigten Baums indiziert sind. Kenntnisse können sich nur vergrößern, d. h., gilt $R\vec{t}$ in einer Welt k, so gilt $R\vec{t}$ auch in allen künftigen möglichen Welten.
Jede Beth-Struktur basiert also auf einem endlich verzweigten Baum T. Wir führen zunächst die hierbei notwendigen Begriffe ein. Ein *Knoten* über einer nichtleeren Menge S ist eine endliche Folge $k = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$ von Elementen $a_i \in S$; n ist die *Länge* $\mathrm{lh}(k)$ von k. Wir schreiben $k \preceq k'$ wenn k ein Anfangsstück von k' ist. Ein *Baum* über S ist eine Menge von Knoten (über S), die gegen Bildung von Anfangsstücken abgeschlossen ist. Ein Baum T ist *endlich verzweigt*, wenn jedes $k \in T$

höchstens endlich viele unmittelbare Nachfolger in T hat. Ein Baum T ist *unbeschränkt*, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Knoten $k \in T$ gibt so daß $\mathsf{lh}(k) = n$. Ein *Ast* in einem Baum T ist ein linear geordneter (durch $\preceq$) Teilbaum von T. Ein *Blatt* in T ist ein Knoten k in T ohne echte Fortsetzungen in T.
Für den Vollständigkeitssatz wird es genügen, Beth-Strukturen über dem vollen binären Baum zu betrachten, d. h. der Menge T_{01} aller endlichen 0-1-Folgen (Knoten) k. Die leere Folge wird mit $\langle\rangle$ bezeichnet, und $k0$, $k1$ bezeichnen Erweiterungen der Folge k durch 0 oder 1.

Definition 1.10 Sei $(T, \preceq)$ ein endlich verzweigter Baum. $\mathcal{B} = (M, I_0, I_1)$ ist eine *$\mathcal{L}$-Beth-Struktur* über T, wenn (M, I_0) eine $\mathcal{L}$-Prästruktur ist (d. h. M eine nichtleere Menge und I_0 eine Abbildung, die jedem n-stelligen Funktionssymbol f von $\mathcal{L}$ eine Funktion $I(f): D^n \to D$ zuordnet) und I_1 jedem n-stelligen Relationssymbol R von $\mathcal{L}$ und jedem Knoten $k \in T$ eine n-stellige Relation $I_1(R,k) \subseteq M^n$ zuordnet, so daß Monotonie gilt, das heißt

$$k \preceq k' \Rightarrow I_1(R,k) \subseteq I_1(R,k').$$

Ist $n = 0$, so ist $I_1(R,k)$ wahr oder falsch und die Monotonie sagt aus, daß für $k \preceq k'$ aus $I_1(R,k)$ stets $I_1(R,k')$ folgt.
Von $I_1(\bot,k)$ wird also *nichts* verlangt; das Falsum spielt in der Minimallogik die Rolle eines gewöhnlichen Aussagensymbols.
$t^{\mathcal{B}}[\eta]$ für eine Belegung η wird wie bei klassischen Modellen erklärt. An die Stelle der Modellbeziehung $\mathcal{M} \models A[\eta]$ tritt bei Beth-Strukturen jedoch die *Erzwingungsbeziehung*. Für deren Definition ist es bequem, den zugrundeliegenden Baum T zunächst zu *vervollständigen* zu einem Baum $\overline{T}$ ohne Blätter, indem wir zu jedem Blatt $k \in T$ alle Fortsetzungen $k0$, $k00$, $k000$, ... zu T hinzunehmen. Für jeden hinzugekommenen Knoten $k0\ldots0$ setzen wir $I_1(R, k0\ldots0) := I_1(R,k)$.

Definition 1.11 $\mathcal{B}, k \Vdash A[\eta]$ ($\mathcal{B}$ erzwingt A im Knoten k für die Belegung η) wird induktiv wie folgt definiert. Wir schreiben $k \Vdash A[\eta]$ wenn die unterliegende Struktur $\mathcal{B}$ klar ist, und $\forall k' \succeq_n k\, A$ für $\forall k' \succeq k.\mathsf{lh}(k') = \mathsf{lh}(k) + n \to A$.

$$k \Vdash R(t_1,\ldots,t_p)[\eta] :\Leftrightarrow \exists n \forall k' \succeq_n k (t_1^{\mathcal{B}}[\eta],\ldots,t_p^{\mathcal{B}}[\eta]) \in I_1(R,k').$$
$$k \Vdash R[\eta] :\Leftrightarrow \exists n \forall k' \succeq_n k\ I_1(R,k') = 1 \quad \text{für } R \text{ nullstellig}.$$
$$k \Vdash (A \vee^* B)[\eta] :\Leftrightarrow \exists n \forall k' \succeq_n k.k' \Vdash A[\eta] \text{ oder } k' \Vdash B[\eta].$$
$$k \Vdash (\exists^* x A)[\eta] :\Leftrightarrow \exists n \forall k' \succeq_n k \exists a \in |\mathcal{B}| k' \Vdash A[\eta_x^a].$$
$$k \Vdash (A \to B)[\eta] :\Leftrightarrow \forall k' \succeq_n k.k' \Vdash A[\eta] \Rightarrow k' \Vdash B[\eta].$$
$$k \Vdash (A \wedge B)[\eta] :\Leftrightarrow k \Vdash A[\eta] \text{ und } k \Vdash B[\eta].$$
$$k \Vdash (\forall x A)[\eta] :\Leftrightarrow \forall a \in |\mathcal{B}| k \Vdash A[\eta_x^a].$$

In den Klauseln für Atome, Disjunktionen und Existenzformeln beziehen wir uns also auf eine „Schranke" („bar") in $\overline{T}$. Für Atome wäre dies nicht nötig; es ist jedoch bequem für die Konstruktion von Beth-Strukturen.
Aus der Definition ergibt sich leicht, daß die Monotonie sich auf Formeln überträgt, d. h., daß aus $k \Vdash A[\eta]$ stets $k' \Vdash A[\eta]$ folgt für $k \preceq k'$. Auch die Umkehrung ist richtig:

Lemma 1.12 *(Überdeckungseigenschaft).*

$$\forall k' \succeq_n k\, k' \Vdash A[\eta] \Rightarrow k \Vdash A[\eta].$$

Beweis: Induktion über A. Wir schreiben $k \Vdash A$ für $k \Vdash A[\eta]$.
Fall $R\vec{t}$. Gelte

$$\exists n \forall k' \succeq_n k\, k' \vDash R\vec{t},$$

also nach Definition

$$\exists n \forall k' \succeq_n k \exists m \forall k'' \succeq_m k' \vec{t}^{\mathcal{B}}[\eta] \in I_1(R, k'').$$

Da T ein endlich verzweigter Baum ist, haben wir

$$\exists m \forall k' \succeq_m k \vec{t}^{\mathcal{B}}[\eta] \in I_1(R, k'),$$

also $k \vDash R\vec{t}$.
Die Fälle $A \vee^* B$ und $\exists^* x A$ behandelt man ähnlich.
Fall $A \to B$. Gelte $k' \vDash A \to B$ für alle $k' \succeq k$ mit $\mathsf{lh}(k') = \mathsf{lh}(k) + n$. Wir müssen zeigen

$$\forall l \succeq k.l \vDash A \Rightarrow l \Vdash B.$$

Gelte also $l \succeq k$ und $l \Vdash A$. Zu zeigen ist $l \Vdash B$. Wir verwenden die IH für B mit $m := \max(\mathsf{lh}(k) + n, \mathsf{lh}(l))$. Gelte also $l' \succeq l$ und $\mathsf{lh}(l') = m$. Es genügt zu zeigen $l' \Vdash B$. Ist $\mathsf{lh}(l') = \mathsf{lh}(l)$, so gilt $l' = l$ und wir sind fertig. Ist $\mathsf{lh}(l') = \mathsf{lh}(k) + n > \mathsf{lh}(l)$, so ist l' eine Erweiterung von l und auch von k mit Länge $\mathsf{lh}(k) + n$, und wir haben $l' \Vdash A \to B$ nach Annahme. Ferner gilt $l' \Vdash A$, da $l' \succeq l$ und $l \Vdash A$. Dies wiederum impliziert $l' \Vdash B$.
Die Fälle $A \wedge B$ und $\forall x A$ sind klar. □

Das Koinzidenzlemma und das Substitutionslemma gelten wie erwartet auch für Beth-Strukturen.

Lemma 1.13 *(Koinzidenzlemma). Sei $\mathcal{B}$ eine Beth-Struktur, t ein Term, A eine Formel und η, ξ Belegungen in $|\mathcal{B}|$.*
1. Gilt $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \mathsf{vars}(t)$, so ist $\eta(t) = \xi(t)$.

2. Gilt $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \mathrm{FV}(A)$, so folgt $\mathcal{B}, k \Vdash A[\eta] \Leftrightarrow \mathcal{B}, k \Vdash A[\xi]$.

Beweis: Induktion über Terme und Formeln. □

Lemma 1.14 *(Substitutionslemma). Sei $\mathcal{B}$ eine Beth-Struktur, t,r Terme, A eine Formel und η eine Belegung in $|\mathcal{B}|$. Dann gilt*
1. $\eta(r[x := t]) = \eta_x^{\eta(t)}(r)$.
2. $\mathcal{B}, k \Vdash A[x := t][\eta] \Leftrightarrow \mathcal{B}, k \Vdash A[\eta_x^{\eta(t)}]$.

Beweis: Induktion über Terme und Formeln. □

Hieraus erhalten wir wie üblich den Korrektheitssatz.

Satz 1.15 *(Korrektheit). Sei $\Gamma \cup \{A\}$ eine Formelmenge und es gelte $\Gamma \vdash A$. Ist dann $\mathcal{B}$ eine Beth-Struktur, k ein Knoten und η eine Belegung in $|\mathcal{B}|$, so folgt aus $\mathcal{B}, k \Vdash \Gamma[\eta]$ stets $\mathcal{B}, k \Vdash A[\eta]$.*

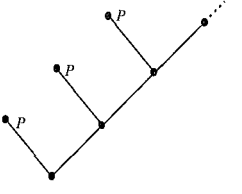
Beweis: Induktion über Herleitungen. □

Gegenmodelle

Mit Hilfe des Korrektheitssatzes ist es einfach, Gegenmodelle zu finden, aus denen sich die Nicht-Herleitbarkeit in der Minimallogik bzw. in der intuitionistischen Logik ergibt. Unter einer *Beth-Struktur für die intuitionistische Logik* verstehen wir eine Beth-Struktur $\mathcal{B} = (M, I_0, I_1)$, in der $\bot$ nicht erzwungen wird, das heißt $I_1(\bot, k) = 0$ für alle k. In Beth-Strukturen für die intuitionistische Logik haben wir deshalb

$$\begin{aligned} k \Vdash \neg A &\Leftrightarrow \forall k' \succeq k\ k' \nVdash A \\ k \Vdash \neg\neg A &\Leftrightarrow \forall k' \succeq k\ k' \nVdash \neg A \\ &\Leftrightarrow \forall k' \succeq k \exists k'' \succeq k'\ k'' \Vdash A. \end{aligned}$$

Als Beispiel zeigen wir $\nvdash_i \neg\neg P \to P$. Um eine Beth-Struktur zu beschreiben, stellen wir den zugrundeliegenden Baum durch ein Diagramm dar, wo wir neben jeden Knoten die Aussagensymbole schreiben, die in diesem Knoten erzwungen werden. Man betrachte die durch das folgende Diagramm gegebene Beth-Struktur.



Offenbar haben wir

$$\langle\rangle \not\Vdash P,$$
$$\langle\rangle \Vdash \neg\neg P.$$

Also gilt $\langle\rangle \not\Vdash \neg\neg P \to P$ und deshalb $\not\vdash \neg\neg P \to P$. Da offenbar $\Vdash \mathsf{Efq}_R$ für jedes R gilt, haben wir auch $\not\vdash_i \neg\neg P \to P$. Das Modell zeigt ebenfalls die Nicht-Herleitbarkeit der Peirce-Formel $((P \to Q) \to P) \to P$ in der intuitionistischen Logik.

1.3 Vollständigkeit der Minimallogik und der intuitionistischen Logik

Wir zeigen jetzt die Umkehrung des Korrektheitssatzes.

Satz 1.16 *(Vollständigkeit). Sei $\Gamma \cup \{A\}$ eine Formelmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*
1. $\Gamma \vdash A$.
2. $\Gamma \Vdash A$, *das heißt für alle Beth-Strukturen $\mathcal{B}$, Knoten k und Belegungen η*

$$\mathcal{B}, k \Vdash \Gamma[\eta] \Rightarrow \mathcal{B}, k \Vdash A[\eta]$$

Beweis: Eine Richtung ist der Korrektheitssatz. Für die andere Richtung verwenden wir einen Ansatz von Harvey Friedman und konstruieren eine Beth-Struktur $\mathcal{B}$ (über der Menge T_{01} aller endlichen 0-1-Folgen k geordnet durch die Anfangsstück-Relation $k \preceq k'$) mit der Eigenschaft, daß $\Gamma \vdash B$ äquivalent ist zu $\mathcal{B}, \langle\rangle \Vdash B[\mathsf{id}]$.
Zur Definition von $\mathcal{B}$ gehen wir aus von einer Aufzählung $A_0, A_1, A_2 \ldots$ aller $\mathcal{L}$-Formeln, in der jede Formel unendlich oft vorkommen möge; wir fixieren auch eine Aufzählung $x_0, x_1, \ldots$ aller Variablen. Sei $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$ mit endlichen Mengen Γ_n so daß $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$. Jedem Knoten $k \in T_{01}$ ordnen wir eine endliche Menge Δ_k von Formeln zu, durch Induktion über die Länge von k.
Sei $\Delta_{\langle\rangle} := \emptyset$. Nehmen wir jetzt an, daß für einen Knoten k mit $\mathsf{lh}(k) = n$ die Menge Δ_k schon definiert ist. $\Delta \vdash_n B$ bedeute, daß es eine Herleitung von B aus Δ gibt mit Länge (:= Gesamtzahl der Symbole) $\leq n$. Wir definieren Δ_{k0} und Δ_{k1} wie folgt.
Fall 1. $\Gamma_n, \Delta_k \not\vdash_n A_n$. Dann sei

$$\Delta_{k0} := \Delta_k \text{ und } \Delta_{k1} := \Delta_k \cup \{A_n\}.$$

Fall 2. $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n A_n = A_n' \vee^* A_n''$. Dann sei

$$\Delta_{k0} := \Delta_k \cup \{A_n, A_n'\} \text{ und } \Delta_{k1} := \Delta_k \cup \{A_n, A_n''\}.$$

Fall 3. $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n A_n = \exists^* x A_n'$. Dann sei

$$\Delta_{k0} := \Delta_{k1} := \Delta_k \cup \{A_n, A_n'[x := x_i]\}$$

mit x_i die erste Variable $\notin \mathrm{FV}(\Gamma_n, A_n, \Delta_k)$.

Fall 4. $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n A_n$, mit A_n weder Disjunktion noch Existenzformel. Dann sei

$$\Delta_{k0} := \Delta_{k1} := \Delta_k \cup \{A_n\}.$$

Offenbar impliziert $k \preceq k'$ stets $\Delta_k \subseteq \Delta_{k'}$. Man beachte zunächst, daß

$$\forall k' \succeq_n k \Gamma, \Delta_{k'} \vdash B \Rightarrow \Gamma, \Delta_k \vdash B. \tag{1}$$

Um dies zu sehen, genügt es zu zeigen

$$\Gamma, \Delta_{k0} \vdash B \text{ und } \Gamma, \Delta_{k1} \vdash B \Rightarrow \Gamma, \Delta_k \vdash B.$$

Dies ist klar in den Fällen 1 und 4, und für die Fälle 2 und 3 folgt es leicht aus den Schemata $\vee^{*-}$ und $\exists^{*-}$ (vgl. Abschnitt 1.1).
Wir zeigen jetzt

$$\Gamma, \Delta_k \vdash B \Rightarrow \exists n \forall k' \succeq_n k\ B \in \Delta_{k'} \tag{2}$$

Um dies einzusehen, wähle man ein $n \geq \mathrm{lh}(k)$ mit $B = A_n$ und $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n A_n$. Für alle $k' \succeq k$ mit $\mathrm{lh}(k') = n+1$ gilt dann $A_n \in \Delta_{k'}$ (vgl. die Fälle 2-4).
Mit Hilfe der Mengen Δ_k können wir jetzt eine $\mathcal{L}$-Beth-Struktur $\mathcal{B}$ definieren als $(\mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}, I_0, I_1)$ mit den kanonischen $I_0(f)\vec{t} := f\vec{t}$ und

$$\vec{t} \in I_1(R,k) :\Leftrightarrow R\vec{t} \in \Delta_k.$$

Offenbar ist $t^{\mathcal{B}}[\mathrm{id}] = t$ für alle $\mathcal{L}$-Terme t.
Wir zeigen schließlich, daß

$$\Gamma, \Delta_k \vdash B \Leftrightarrow \mathcal{B}, k \Vdash B[\mathrm{id}], \tag{3}$$

und zwar durch Induktion über die logische Komplexität von B. Für $\mathcal{B}, k \Vdash B[\mathrm{id}]$ schreiben wir $k \Vdash B$.
Fall $R\vec{t}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

$\Gamma, \Delta_k \vdash R\vec{t}$	
$\exists n \forall k' \succeq_n k\ R\vec{t} \in \Delta_{k'}$	nach (2) und (1)
$\exists n \forall k' \succeq_n k\ \vec{t} \in I_1(R,k')$	nach Definition von $\mathcal{B}$
$k \Vdash R\vec{t}$	nach Definition von $\Vdash$, da $t^{\mathcal{B}}[\mathrm{id}] = t$.

Fall $B \vee^* C$. $\Rightarrow$. Gelte $\Gamma, \Delta_k \vdash B \vee^* C$. Man wähle ein $n \geq \mathrm{lh}(k)$ mit $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n A_n = B \vee^* C$. Für alle $k' \succeq k$ mit $\mathrm{lh}(k') = n$ gilt dann

$$\Delta_{k'0} = \Delta_{k'} \cup \{B \vee^* C, B\} \text{ und } \Delta_{k'1} = \Delta_{k'} \cup \{B \vee^* C, C\},$$

also nach IH

$$k'0 \Vdash B \text{ und } k'1 \Vdash C.$$

Nach Definition impliziert dies $k \Vdash B \vee^* C$. $\Leftarrow$.

$k \Vdash B \vee^* C$
$\exists n \forall k' \succeq_n k.k' \Vdash B$ oder $k' \Vdash C$
$\exists n \forall k' \succeq_n k.\Gamma, \Delta_{k'} \vdash B$ oder $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash C$ nach IH
$\exists n \forall k' \succeq_n k\Gamma, \Delta_{k'} \vdash B \vee^* C$
$\Gamma, \Delta_k \vdash B \vee^* C$ nach (1).

Der Fall $B \wedge C$ ist klar.
Fall $B \to C$. $\Rightarrow$. Gelte $\Gamma, \Delta_k \vdash B \to C$. Wir müssen zeigen $k \Vdash B \to C$, das heißt

$$\forall k' \succeq k.k' \Vdash B \Rightarrow k' \Vdash C.$$

Sei also $k' \succeq k$ und gelte $k' \Vdash B$. Nach IH haben wir $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash B$, also $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash C$ nach Annahme. Wieder die IH liefert $k' \Vdash C$.
$\Leftarrow$. Gelte $k \Vdash B \to C$, d. h. $\forall k' \succeq k.k' \Vdash B \Rightarrow k' \Vdash C$. Wir müssen zeigen $\Gamma, \Delta_k \vdash B \to C$. Dafür wollen wir (1) verwenden. Man wähle ein $n \geq \mathsf{lh}(k)$ mit $B = A_n$. Sei $k' \succeq_m k$ beliebig, wobei $m := n - \mathsf{lh}(k)$. Wir müssen zeigen $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash B \to C$.
Im Fall $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash_n A_n$ haben wir $k' \Vdash B$ nach IH, also $k' \Vdash C$ nach Annahme, also $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash C$ wieder nach IH und deshalb $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash B \to C$.
Im Fall $\Gamma, \Delta_{k'} \nvdash_n A_n$ haben wir nach Definition $\Delta_{k'1} = \Delta_{k'} \cup \{B\}$. Dies liefert $\Gamma, \Delta_{k'1} \vdash B$, also $k'1 \Vdash B$ nach IH, also $k'1 \Vdash C$ nach Annahme, also $\Gamma, \Delta_{k'1} \vdash C$ wieder nach IH. Wegen $\Delta_{k'1} = \Delta_{k'} \cup \{B\}$ folgt $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash B \to C$.
Fall $\forall x B$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

$\Gamma, \Delta_k \vdash \forall x B$
$\forall t \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}} \Gamma, \Delta_k \vdash B[x := t]$
$\forall t \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}\ k \Vdash B[x := t]$ nach IH
$\forall t \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}\ k \Vdash B[\mathsf{id}'_x]$ nach dem Substitutionslemma, da $t^B[\mathsf{id}] = t$,
$k \Vdash \forall x B$ nach Definition von $\Vdash$.

Fall $\exists^* x B$. Dies ist ähnlich zum Fall $\vee^*$. Im einzelnen verläuft der Beweis wie folgt. $\Rightarrow$. Gelte $\Gamma, \Delta_k \vdash \exists^* x B$. Man wähle $n \geq \mathsf{lh}(k)$ mit $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n A_n = \exists^* x B$. Für alle $k' \succeq k$ mit $\mathsf{lh}(k') = n$ gilt dann

$$\Delta_{k'0} = \Delta_{k'1} = \Delta_k \cup \{\exists^* x B, B[x := x_i]\}$$

mit x_i nicht frei in $\Delta_k \cup \{\exists^* x B\}$, also nach IH

$$k'0 \Vdash B[x := x_i] \text{ und } k'1 \Vdash B[x := x_i].$$

Nach Definition impliziert dies $k \Vdash \exists^* x B$. $\Leftarrow$.

$k \Vdash \exists^* xB$
$\exists n \forall k' \succeq_n k \exists t \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}\ k' \Vdash B[\mathsf{id}^t_x]$
$\exists n \forall k' \succeq_n k \exists t \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}\ k' \Vdash B[x := t]$
$\exists n \forall k' \succeq_n k \exists t \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}\ \Gamma, \Delta_{k'} \vdash B[x := t]$ nach IH
$\exists n \forall k' \succeq_n k\, \Gamma, \Delta_{k'} \vdash \exists^* xB$
$\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \exists^* xB$ nach (1).

Jetzt können wir den Beweis des Vollständigkeitssatzes abschließen. Nach (3) haben wir $\mathcal{B}, \langle\rangle \Vdash \Gamma[\mathsf{id}]$. Nach Annahme impliziert dies $\mathcal{B}, \langle\rangle \Vdash A[\mathsf{id}]$, also $\Gamma \vdash A$ wieder nach (3). □

Als ein unmittelbares Korollar erhalten wir den Vollständigkeitssatz für die intuitionistische Logik.

Korollar 1.17 *Sei $\Gamma \cup \{A\}$ eine Formelmenge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. $\Gamma \vdash_i A$.
2. $\Gamma, \mathsf{Efq} \Vdash A$, *d. h. für alle Beth-Strukturen $\mathcal{B}$ für die intuitionistische Logik, Knoten k und Belegungen η*

$$\mathcal{B}, k \Vdash \Gamma[\eta] \Rightarrow \mathcal{B}, k \Vdash A[\eta].$$ □

1.4 Vollständigkeit der klassischen Logik

Wir geben jetzt einen Beweis der Vollständigkeit der klassischen Logik, und zwar unter Zuhilfenahme der Vollständigkeit der Minimallogik.
Zur Vereinfachung zeigen wir zunächst, daß man auf $\wedge$ verzichten kann.

Lemma 1.18 (Elimination von $\wedge$). Für jede Formel A in der auf $\{\to, \wedge, \forall\}$ aufgebauten Sprache findet man Formeln $A_1, \ldots, A_n$ ohne $\wedge$ so daß $\vdash A \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^n A_i$.

Beweis: Induktion über A. □

Satz 1.19 *(Vollständigkeit). Sei $\Gamma \cup \{A\}$ eine Menge von Formeln (in unserer abzählbaren Sprache $\mathcal{L}$). Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. $\Gamma \vdash_c A$.
2. $\Gamma \models A$, *d. h. für alle Strukturen $\mathcal{M}$ und Belegungen η gilt*

$$\mathcal{M} \models \Gamma[\eta] \Rightarrow \mathcal{M} \models A[\eta].$$

Beweis: Eine Richtung ist der Korrektheitssatz. Für die andere Richtung verwenden wir den Vollständigkeitssatz für die Minimallogik.

Offenbar genügt es, Formeln ohne $\vee^*$, $\exists^*$ zu betrachten und (nach Lemma 1.18) auch ohne $\wedge$.
Gelte $\Gamma \nvdash_c A$, d. h. $\Gamma, \mathsf{Stab} \nvdash A$. Nach dem Vollständigkeitssatz für die Minimallogik haben wir eine abzählbare Beth-Struktur $\mathcal{B} = (\mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}, I_0, I_1)$ über dem vollen binären Baum T_{01} und einen Knoten l_0 mit $l_0 \Vdash \Gamma, \mathsf{Stab}$ und $l_0 \not\Vdash A$ (wir schreiben $k \Vdash B$ für $\mathcal{B}, k \Vdash B[\mathsf{id}]$).
Ein Knoten k heiße *konsistent*, wenn $k \not\Vdash \bot$ und *stabil*, wenn $k \Vdash \mathsf{Stab}$. Sei k ein stabiler Knoten und B eine Formel (ohne $\vee^*$, $\exists^*$). Wir haben die Stabilität $\mathsf{Stab} \vdash \neg\neg B \to B$ nach Lemma 1.2, also $k \Vdash \neg\neg B \to B$, also

$$\begin{aligned} k \not\Vdash B &\Leftrightarrow k \not\Vdash \neg\neg B \\ &\Leftrightarrow \exists k' \succeq k.k' \text{ konsistent und } k' \Vdash \neg B. \end{aligned} \tag{4}$$

Sei α ein Ast im zugrundeliegenden Baum T_{01}. Wir definieren

$$\begin{aligned} \alpha \Vdash A &:\Leftrightarrow \exists k \in \alpha k \Vdash A, \\ \alpha \text{ ist konsistent} &:\Leftrightarrow \alpha \not\Vdash \bot, \\ \alpha \text{ ist stabil} &:\Leftrightarrow \exists k \in \alpha k \Vdash \mathsf{Stab}. \end{aligned}$$

Man beachte

$$\text{Aus } \alpha \Vdash \vec{A} \text{ und } \vdash \vec{A} \to B \text{ folgt } \alpha \Vdash B. \tag{5}$$

Um dies zu sehen, nehmen wir $\alpha \Vdash \vec{A}$ an. Dann gilt $k \Vdash \vec{A}$ für ein $k \in \alpha$, da α linear geordnet ist. Wegen $\vdash \vec{A} \to B$ liefert der Korrektheitssatz $k \Vdash B$, d. h. $\alpha \Vdash B$.
Ein Ast α heißt *generisch* (in dem Sinn, daß er ein klassisches Modell erzeugt), wenn er konsistent und stabil ist, für alle Formeln B gilt

$$\alpha \Vdash B \text{ oder } \alpha \Vdash \neg B, \tag{6}$$

und für alle Formeln $\forall \vec{y} B$ (wobei $\vec{y}$ nicht leer ist) mit B keine Allformel

$$\forall \vec{s} \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}\ \alpha \Vdash B[\vec{y} := \vec{s}] \Rightarrow \alpha \Vdash \forall \vec{y} B \tag{7}$$

Schließlich definieren wir für einen Ast α eine klassische Struktur $\mathcal{M}^\alpha = (\mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}, I_0, I_1^\alpha)$ durch

$$I_1^\alpha(R) := \bigcup_{k \in \alpha} I_1(R,k) \text{ für } R \neq \bot.$$

Wir zeigen, daß für jeden generischen Ast α und jede Formel B in der auf $\{\to, \forall\}$ aufbauenden Sprache gilt

$$\alpha \Vdash B \Leftrightarrow \mathcal{M}^\alpha \vDash B. \tag{8}$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über die logische Komplexität von B.
Fall $R\vec{t}$, $R \neq \bot$. Dann gilt die Behauptung für alle α.
Fall $\bot$. Es gilt $\alpha \not\Vdash \bot$ für konsistentes α.

Fall $B \to C$. $\Rightarrow$. Gelte $\alpha \Vdash B \to C$ und $\mathcal{M}^\alpha \models B$. Wir müssen zeigen $\mathcal{M}^\alpha \models C$. Nun ist $\alpha \Vdash B$ nach IH, also $\alpha \Vdash C$, also $\mathcal{M}^\alpha \models C$ wieder nach IH. $\Leftarrow$. Gelte $\mathcal{M}^\alpha \models B \to C$. Gilt $\mathcal{M}^\alpha \models B$, so ist $\mathcal{M}^\alpha \models C$, also $\alpha \Vdash C$ nach IH und deshalb $\alpha \Vdash B \to C$. Gilt $\mathcal{M}^\alpha \not\models B$, so ist $\alpha \nVdash B$ nach IH, also $\alpha \Vdash \neg B$ nach (6) und deshalb $\alpha \Vdash B \to C$, da α stabil ist (und $\vdash (\neg\neg C \to C) \to \bot \to C$).
Fall $\forall \vec{y} B$ (wobei $\vec{y}$ nicht leer ist) mit B keine Allformel. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

$$\begin{gathered} \alpha \Vdash \forall \vec{y} B \\ \forall \vec{s} \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}\ \alpha \Vdash B[\vec{y} := \vec{s}] \text{ nach (7)} \\ \forall \vec{s} \in \mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}\ \mathcal{M}^\alpha \models B[\vec{y} := \vec{s}] \text{ nach IH} \\ \mathcal{M}^\alpha \models \forall \vec{y} B\,. \end{gathered}$$

Wir zeigen schließlich, daß es für jeden konsistenten stabilen Knoten k einen generischen Ast gibt, der k enthält. Zum Beweis sei $A_0, A_1, \ldots$ eine Aufzählung aller Formeln. Wir definieren induktiv eine Folge $k = k_0 \preceq k_1 \preceq k_2 \ldots$ von konsistenten stabilen Knoten. Sei $k_0 := k$. Nehmen wir jetzt an, daß k_n bereits konstruiert ist. Wir schreiben A_n in der Form $\forall \vec{y} B$ (wobei $\vec{y}$ leer sein kann) mit B keine Allformel. Im Fall $k_n \Vdash \forall \vec{y} B$ sei $k_{n+1} := k_n$. Andernfalls gilt $k_n \nVdash B[\vec{y} := \vec{s}]$ für ein $\vec{s}$, und nach (4) gibt es einen konsistenten Knoten $k' \succeq k_n$ mit $k' \Vdash \neg B[\vec{y} := \vec{s}]$. Sei $k_{n+1} := k'$. Wegen $k_n \preceq k_{n+1}$ ist auch k_{n+1} stabil.
Sei $\alpha := \{l \mid \exists n\, l \preceq k_n\}$, also $k \in \alpha$. Wir zeigen, daß α generisch ist. Offenbar ist α konsistent und stabil. Die Aussagen (6) und (7) können simultan bewiesen werden. Sei $C = \forall \vec{y} B$ mit B keine Allformel, und man wähle n mit $C = A_n$. Im Fall $k_n \Vdash \forall \vec{y} B$ ist nichts zu zeigen. Andernfalls gilt $k_n \nVdash B[\vec{y} := \vec{s}]$ für ein $\vec{s}$, und nach Konstruktion $k_{n+1} \Vdash \neg B[\vec{y} := \vec{s}]$. Für (6) erhalten wir $k_{n+1} \Vdash \neg \forall \vec{y} B$ (da $\vdash \forall \vec{y} B \to B[\vec{y} := \vec{s}]$), und (7) ergibt sich aus der Konsistenz von α.
Wir können jetzt den Beweis des Vollständigkeitssatzes abschließen. Da $l_0 \nVdash A$ und l_0 stabil ist, liefert (4) einen konsistenten Knoten $k \succeq l_0$ mit $k \Vdash \neg A$. Offenbar ist auch k stabil. Nach dem, was wir eben bewiesen haben, gibt es einen generischen Ast α mit $k \in \alpha$. Wegen $k \Vdash \neg A$ haben wir $\alpha \Vdash \neg A$, also $\mathcal{M}^\alpha \models \neg A$ nach (8). Ferner gilt $\alpha \Vdash \Gamma$, also $\mathcal{M}^\alpha \models \Gamma$ wieder nach (8). Also $\Gamma \not\models A$. □
Der Vollständigkeitssatz hat viele wichtige Korollare; wir erwähnen nur einige davon. Eine Menge Γ von $\mathcal{L}$-Formeln heiße *konsistent*, wenn $\Gamma \not\vdash_c \bot$ und *erfüllbar*, wenn es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ und eine Belegung η in $|\mathcal{M}|$ gibt mit $\mathcal{M} \models B[\eta]$ für alle $B \in \Gamma$.

Korollar 1.20 *Sei* Γ *eine Menge von* $\mathcal{L}$*-Formeln.*
1. *Wenn* Γ *konsistent ist, so ist* Γ *auch erfüllbar.*
2. *(Kompaktheitssatz). Wenn jede endliche Teilmenge von* Γ *erfüllbar ist, so auch* Γ.

Beweis: 1. Aus $\Gamma \nvdash_c \bot$ erhält man $\Gamma \nvDash \bot$ nach dem Vollständigkeitssatz, und dies impliziert die Erfüllbarkeit von Γ.
2. Andernfalls gilt $\Gamma \vDash \bot$, also $\Gamma \vdash_c \bot$ nach dem Vollständigkeitssatz, also auch $\Gamma_0 \vdash_c \bot$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, also $\Gamma_0 \vDash \bot$ im Widerspruch zu unserer Annahme, daß Γ_0 ein Modell besitzt. □

Korollar 1.21 *(Löwenheim, Skolem). Sei Γ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln (wir hatten angenommen, daß $\mathcal{L}$ abzählbar ist). Ist Γ erfüllbar, so ist Γ auch erfüllbar durch eine $\mathcal{L}$-Struktur mit abzählbarer Trägermenge.*

Beweis: Wir verwenden den Beweis des Vollständigkeitssatzes mit $A = \bot$. Er liefert entweder $\Gamma \vdash_c \bot$ oder aber ein Modell von $\Gamma \cup \{\neg \bot\}$, dessen Trägermenge die abzählbare Menge $\mathsf{Ter}_{\mathcal{L}}$ ist. $\Gamma \vdash_c \bot$ kann jedoch aufgrund der Annahme nicht gelten. □

2 Programme aus konstruktiven Beweisen

Bekanntlich ist es aus prinzipiellen Gründen unentscheidbar, ob ein Programm seine Spezifikation erfüllt. Im Gegensatz dazu kann ein formaler Beweis auch praktisch leicht auf seine Korrektheit überprüft werden. Man kann soweit gehen, einen Beweis als ein „Programm mit hinreichend vielen Kommentaren" anzusehen. Genauer gilt, daß aus einem vollständig formalisierten Beweis ein Programm extrahierbar ist, das jedenfalls keine Denkfehler oder vergessenen Fälle mehr enthält. Man kann hoffen, daß sich die mathematische Beweiskultur so zum Organisieren komplexer Strukturen verwenden läßt, daß sich anschließend durch Programmextraktion nützliche und auch praktisch verwertbare Programme aus entsprechenden Beweisen gewinnen lassen. Als Beispiele kommen etwa Steuerprogramme im Anlagenbau oder in der Telekommunikation in Frage. Erste Ansätze dazu gibt es bereits, jedoch ist das Gebiet erst am Anfang seiner Entwicklung. Einige Einwände gegen eine derartige Vision sollen kurz besprochen werden.

1. Eine Algorithmus-Idee ist schon *vor* einem konstruktiven Beweis vorhanden.
2. Die Komplexität des extrahierten Programms schließt seine praktische Anwendung aus.
3. Klassische Beweise sind nach wie vor der Standard; inwieweit sind auch sie zur Programmextraktion verwendbar?

Hierauf kann man etwa folgendes erwidern:

1. Die Gewinnung eines Programms aus einem konstruktiven Beweis hat den Vorteil, daß die Anpassung des Programms an veränderte oder spezialisierte Aus-

gangssituationen und auch allgemeiner die Wartung des Programms leichter möglich sind; insbesondere die Wartung macht heutzutage einen beträchtlichen Teil der Kosten aus.

2. Neuere Studien konzentrieren sich darauf, Beweissysteme mit geeignet eingeschränkten Termsystemen und damit (via der sogenannten Curry-Howard Korrespondenz) Beweissysteme zu konstruieren, für die die extrahierten Programme in polynomialer Zeit ihr Ergebnis liefern. Hier sind in erster Linie zu nennen die Arbeiten von Leivant [16, 15,] und Hofmann [11] sowie auch [10] und [2].
3. Dieser Punkt soll im nächsten Abschnitt besprochen werden.

3 Programme aus klassischen Beweisen

Es ist seit langem bekannt, daß man zu jedem Beweis von $\forall x \exists y A(x, y)$ mit $A(x, y)$ quantorenfrei einen Beweis von $\forall x \exists^* y A(x, y)$ konstruieren kann, also der entsprechenden Existenzaussage mit dem starken Existenzquantor. Eine Methode zum Beweis ist die sogenannte Friedmansche A-Übersetzung aus [7], die später von Leivant [14] verfeinert und erweitert wurde. Aus einem Beweis von $\forall x \exists^* y A(x, y)$ kann man dann ein Programm zur Berechnung eines y in Abhängigkeit von x extrahieren (Realisierbarkeit). Als *Beispiel* betrachten wir folgendes Problem. Gegeben seien Zahlenfolgen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Gesucht sind Indizes $i < j$ so, daß $f(i) \leq f(j)$ und $g(i) \leq g(j)$ gelten, also beide Folgen gleichzeitig aufsteigen. Seien etwa

$$f: 1\ 2\ 1\ 4\ 3\ 2\ 1\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 16\ldots$$
$$g: 4\ 3\ 3\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ldots$$

oder allgemein

$$\text{teeth}(2^n + i) := 2^n - i \quad (i < 2^n)$$
$$\text{slow}_b(2^n + i) := b - n \quad (i < 2^n)$$

Einen Beweis der Existenz solcher Indizes i, j kann man mit dem Minimumprinzip, also klassisch führen. Er liefert *kein* Berechnungsverfahren, da das Minimum einer unentscheidbaren Menge gebildet wird. Für ein ähnliches Beispiel hat Murthy [17] eine Programmextraktion mit Hilfe von Friedmans A-Übersetzung durchgeführt. Allerdings war das extrahierte Programm mehrere Megabyte groß; offenbar sind also Verfeinerungen dieser Methodologie notwendig. Daß dies in der Tat möglich ist, hat sich erst in jüngster Zeit herausgestellt (s. etwa [3, 4, 5]).
Ein weiteres interessantes Beispiel der Programmextraktion aus klassischen Beweisen liefert das *Dicksonsche Lemma*: Für alle k, ℓ

$$\forall f_1,\dots,f_k \exists i_0,\dots,i_\ell \bigwedge_{n<\ell} i_n < i_{n+1} \wedge \bigwedge_{m=1}^{k} f_m(i_n) \le f_m(i_{n+1}).$$

Wir führen den Beweis mit Hilfe des Minimumprinzips bzgl. einer Maßfunktion. $Q \subseteq \mathbb{N}$ heiße *unbeschränkt*, wenn $\forall x \exists y. Q(y) \wedge x < y$.

Lemma 3.1. *Sei Q unbeschränkt und $f : \overline{Q} \supseteq Q \to \mathbb{N}$. Dann ist die Menge Q_f der linken f-Minima bzgl. Q unbeschränkt.*

$$Q_f(x) := Q(x) \wedge \forall y. Q(y) \to x < y \to f(x) \le f(y).$$

Beweis: Gegeben sei x. Gesucht ist ein y mit $Q_f(y)$ und $x < y$. Das Minimumprinzip für $\{y \mid Q(y) \wedge x < y\}$ mit Maß f liefert

$$(\exists y. Q(y) \wedge x < y) \to$$
$$\exists y. Q(y) \wedge x < y \wedge \forall z. Q(z) \wedge x < z \to f(y) \le f(z).$$

Da Q unbeschränkt ist, gilt die Prämisse. Wir zeigen, daß das y aus der Konklusion $Q_f(y)$ erfüllt, d. h.

$$Q(y) \wedge \forall z. Q(z) \to y < z \to f(y) \le f(z).$$

Sei z mit $Q(z)$ und $y < z$ gegeben. Aus $x < y$ folgt $x < z$, also $f(y) \le f(z)$. □

Lemma 3.2. *Sei Q unbeschränkt, $f_1,\dots,f_k : \overline{Q} \to \mathbb{N}$. Dann gibt es ein unbeschränktes $Q_1 \subseteq Q$, so daß $f_1,\dots,f_k$ auf Q_1 wachsen:*

$$Q_1(x) \wedge Q_1(y) \wedge x < y \to \bigwedge_{m=1}^{k} f_m(x) \le f_m(y).$$

Beweis: Induktion über k. $k = 1$: Sei $Q_2 := Q$. $k \ge 2$: Sei $Q_2 \subseteq Q$ unbeschränkt s. d. $f_2,\dots,f_k$ auf Q wachsen (IH für $f_2,\dots,f_k$). Sei $Q_1 :=$ Menge der linken f_1-Minima bzgl. Q_2:

$$Q_1(x) := Q_2(x) \wedge \forall y. Q_2(y) \to x < y \to f_1(x) \le f_1(y).$$

Nach dem ersten Lemma ist $Q_1 \subseteq Q_2$ unbeschränkt. Auf Q_1 wächst f_1, und wegen $Q_1 \subseteq Q_2$ auch $f_2,\dots,f_k$. □

Aus diesem klassischen Beweis läßt sich folgendes Programm extrahieren. $\Phi(f(0)+1)(0)$, mit $\Phi : \iota \to \iota \to \iota \times \iota$ definiert durch

$$\Phi(0)(i) = \mathsf{dummy}, \quad \Phi(k+1)(i) = \Psi(g(i)+1, i, \Phi(k))$$

$\Psi : \iota \to \iota \to (\iota \to \iota \times \iota) \to \iota \times \iota$:

$$\Psi(0,i,h) = \mathsf{dummy}, \quad \Psi(\ell+1,i,h) = \Xi_{\ell,i,h}(f(i+1)+1)(i+1)$$

$\Xi : \iota \to \iota \to (\iota \to \iota \times \iota) \to \iota \to \iota \to \iota \times \iota$:

$$\Xi_{\ell,i,h}(0)(j) = \text{dummy}$$

$$\Xi_{\ell,i,h}(m+1)(j) = \begin{cases} \Psi(\ell, j, \Xi_{\ell,i,h}(m)) & \text{falls } g(j) < g(i) \\ h(j) & \text{falls nicht \& } f(j) < f(i) \\ (i,j) & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beachte, daß hier Rekursionsparameter nur als obere Schranken vorkommen (der Grund dafür ist, daß die Induktion nur via Minimumprinzip verwendet wird). Man kann deshalb den primitiven Rekursionsoperator $\mathcal{R}$ durch den allgemeinen Rekursionsoperator $\mathcal{R}^{\text{gen}}_{\tau} : (\iota \to \iota \to \tau) \to \iota \to \tau$ ersetzen, definiert durch $\mathcal{R}^{\text{gen}} hx = hx(\mathcal{R}^{\text{gen}} h)$. Das extrahierte Programm vereinfacht sich dann noch einmal deutlich: $\varphi(0)$, mit

$$\varphi(i) = \psi(i, \varphi)$$

$$\psi(i,h) = \xi_{i,h}(i+1)$$

$$\xi_{i,h}(j) = \begin{cases} \psi(j, \xi_{i,h}) & \text{falls } g(j) < g(i) \\ h(j) & \text{falls nicht, aber } f(j) < f(i) \\ (i,j) & \text{sonst} \end{cases}$$

Der klassische Beweis hat uns also ein sehr einfaches und gleichzeitig recht unerwartetes funktionales Programm geliefert, das unter anderem mit allgemeiner Rekursion arbeitet.

Literatur

[1] Bauer, Friedrich L.: Intuitionismus und Informatik. In: Informatik-Spektrum (1999), S. 284-287.

[2] Bellantoni, Stephen, Niggl, Karl-Heinz & Helmut Schwichtenberg: Higher type recursion, ramification and polynomial time. Erscheint in: Annals of Pure and Applied Logic.

[3] Berger, Ulrich & Helmut Schwichtenberg: Program extraction from classical proofs. In: Leivant, D. (Hg.), Logic and Computational Complexity, International Workshop LCC '94, Indianapolis, IN, USA, October 1994, Band 960 von Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1995, S. 77-97.

[4] Diess.: The greatest common divisor: a case study for program extraction from classical proofs. In: Berardi, S. & M. Coppo (Hg.), Types for Proofs and Programs. International Workshop TYPES '95, Torino, Italy, June 1995. Selected Papers, Band 1158 von Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1996, S. 36-46.

[5] Diess. & Monika Seisenberger: The Warshall Algorithm and Dickson's Lemma: Two Examples of Realistic Program Extraction (in Vorbereitung).

[6] Beth, E.W.: Semantic construction of intuitionistic logic. In: Medelingen de KNAW N.S., 19 (1956) 11.

[7] Friedman, Harvey: Classically and intuitionistically provably recursive functions. In: Scott, D. S. & G. H. Müller (Hg.), Higher Set Theory, Band 669 von Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1978, S. 21-28.

[8] Gentzen, Gerhard: Untersuchungen über das logische Schließen. In: Mathematische Zeitschrift, 39 (1934), S. 176-210, 405-431.

[9] Heyting, Arend: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. In: Sitzb. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl., 1930, S. 42-56.

[10] Hofmann, Martin: Typed lambda calculi for polynomial-time computation. Habilitationsschrift, TU Darmstadt, Deutschland. Erhältlich unter www.dcs.ed.ac.uk/home/mxh/habil.ps.gz, 1998.

[11] Ders.: Linear types and non-size-increasing polynomial time computation. In: Proceedings 14th Symposium on Logic in Computer Science (Lics '99), 1999, S. 464-473.

[12] Johansson, Ingebrigt: Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. In: Compositio Mathematica, 4 (1937), S. 119-136.

[13] Kolmogorov, A. N.: On the principle of the excluded middle (Russian). In: Matematicheskij Sbornik. Akademiya Nauk SSSRi Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo, 32 (1925), S. 646-667. Übersetzung in: van Heijenoort, J.: From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931, Cambridge, MA.: Harvard University Press, 1967, S. 414-437.

[14] Leivant, Daniel: Syntactic translations and provably recursive functions. In: The Journal of Symbolic Logic, 50 (1985) 3, S. 682-688.

[15] Ders.: Ramified recurrence and computational complexity I: Word recurrence and poly-time. In: Clote, P. & J. Remmel (Hg.), Feasible Mathematics II, Boston: Birkhäuser, 1995, S. 320-343.

[16] Ders. & Jean-Yves Marion: Lambda calculus characterization of poly-time. In: Bezem, M. & J. F. Groote (Hg.), Typed Lambda Calculi and Applications, Springer Lecture Notes in Computer Science Vol. 664, 1993, S. 274-288.

[17] Murthy, Chetan: Extracting constructive content from classical proofs. Technical Report 90-1151, Dep. of Comp. Science, Cornell Univ., Ithaca, New York, 1990. PhD thesis.

[18] Troelstra, Anne S. & Helmut Schwichtenberg: Basic Proof Theory, Cambridge University Press, Zweite Auflage, 2000.

[19] van Dalen, Dirk: Hermann Weyl's Intuitionistic Mathematics. In: The Bulletin of Symbolic Logic, 1 (1995) 2, S. 145-169.

[20] Weyl, Hermann: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. In: Mathematische Zeitschrift, 10 (1921).