Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften

Debatte

Heft 4

Herausgeber: Präsident der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften
Redaktion: Sonja Ginnow, Dr. Annette Schaefgen unter Mitarbeit von Christiane Lahusen
Satz: Kathrin Künzel
Umschlagentwurf: Carolyn Steinbeck · Gestaltung
Druck: Oktoberdruck, Berlin

Mathematisierung der Natur

Streitgespräche in den Wissenschaftlichen Sitzungen der Versammlung der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften am 10. Dezember 2004 und 27. Mai 2005

Einführung und Konzeption: Jochen Brüning

Vorbemerkung

Das Streitgespräch „Mathematisierung der Natur" war in der Wissenschaftlichen Sitzung der Versammlung der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften am 10. Dezember 2004 begonnen worden und wurde am 27. Mai 2005 erneut aufgegriffen und fortgesetzt.

Jochen Brüning hatte beide Debatten federführend vorbereitet. Er führte jeweils in das Streitgespräch ein und leitete die Diskussion.

Mathematatisierung der Natur

Teil I

Jochen Brüning

Einleitung

1 Vorläufige Begriffsklärung

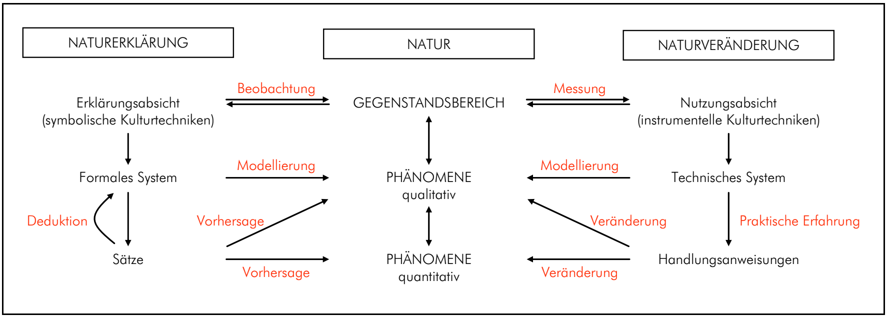
Wir betrachten den Menschen und seinen Geist als Teil der Natur. Wie alle Lebewesen nutzt der Mensch die Natur für sein Überleben, aber nur er allein hat die Fähigkeit, planvoll handelnd in die Natur einzugreifen.

Ausgangspunkt der Erörterung ist die folgende Arbeitshypothese:

Eine Mathematisierung ist eine formale Beschreibung eines Phänomens oder eines Phänomenbereiches mit dem Ziel einer so konkreten Vorausberechnung, daß damit Handlungen ermöglicht werden.

Seit mindestens 3.000 Jahren ist Mathematisierung in diesem Sinne ein Hilfsmittel der Erziehung, des Alltagslebens, der Welterklärung und der Weltveränderung. Als eines der überzeugendsten und einflußreichsten Beispiele einer gelungenen Mathematisierung gilt nach wie vor Isaac Newtons Beschreibung der Himmelsbewegungen. Zwei wichtige Aspekte – beliebig genaue Berechenbarkeit der Kenngrößen und außerordentliche Einfachheit des formalen Systems – verbinden sich in diesem Fall in idealer Weise. Für jeden, der Newtons Theorie zum ersten Mal studiert, ist wohl der Eindruck des ‘Verstehens’ der Natur unabweisbar.

Für die Zwecke unserer Diskussion und im Bewußtsein vielfältiger Vergröberungen lassen sich zwei unterschiedliche Motivationen der menschlichen Begegnung mit der Natur unterscheiden, nämlich die in Erklärungs- und die in Nutzungsabsicht. Dem ersten Komplex von Verhaltensformen ordnen wir die symbolischen, dem zweiten die instrumentellen Kulturtechniken zu. Diese Trennung mag etwas künstlich erscheinen, wenn man die biologisch notwendige Integration von Denken und Handeln in Rechnung stellt; sie hat sich aber spätestens mit der Differenzierung der arbeitsteiligen Gesellschaft durchgesetzt und sollte für unsere Diskussion nicht störend sein. Im folgenden möchte ich die wesentlichen Aspekte einer Mathematisierung im eben skizzierten Sinn kurz erörtern.



2 Voraussagen

Erklärungs- wie Nutzungsabsicht richten sich auf bestimmte Ausschnitte der Natur bzw. auf die Phänomene, die diese Naturbereiche konstituieren. Die betreffenden Phänomene sollen möglichst genau vorausgesagt werden, um die beabsichtigte Nutzung zu optimieren oder um eventuell drohenden Schaden abzuwenden. Stimmen Voraussage und Ergebnis überein, wird zudem die zugrundeliegende symbolische Basis gestützt. Um etwa die richtige Zeit für die Saat zu erkennen, bedarf es einer zumindest elementaren Kenntnis des Kalenders. Um aber zum Beispiel die Erntemenge – und damit die zu erhebende Steuer – nach einer Nilüberschwemmung abzuschätzen und den Landbesitz wiederherzustellen, bedarf es bereits erheblich feinerer mathematischer und technischer Kenntnisse. Allerdings ist die Qualität der Voraussagen stark abhängig von der Genauigkeit, mit der die Phänomene beschrieben werden können. Das erkennt man leicht an den Antworten auf alle Fragen, die das menschliche Schicksal oder Entscheidungssituationen betreffen. Prophezeiungen haben nach wie vor Konjunktur, und die Astrologie gibt sich immer noch als eine mathematische Wissenschaft. Dies ist deshalb für unser Thema wichtig, weil die Astrologie von je her ihre Fehlerhaftigkeit unpräzisen Meßdaten und ungenauen Rechenverfahren zuschreibt – daß sie dadurch die Entwicklung der Astronomie und der Mathematik wesentlich vorangebracht hat, scheint allerdings kein Zufall zu sein.

Einerseits ist es ein bemerkenswertes kulturelles Phänomen, daß falsche Voraussagen ihren Urhebern unter gewissen Umständen nicht angerechnet werden, wie ja schon allein die immerwährende Konjunktur der Astrologie lehrt; aber auch wissenschaftliche Schulen liefern Beispiele für dieses eigentümliche Verhalten. Andererseits kann eine Vorhersage kaum vollständiger erfüllt werden als durch die materielle Realisierung eines Planes, sei es der Bau eines Bauernhauses oder des Suez-Kanals, sei es der motorisierte Flug oder die friedliche Nutzung der Atomenergie. Eine erfüllte Voraussage wird deshalb letztlich nur dann überzeugen, wenn sie ein für alle sichtbares, leichtverständliches und möglichst überraschendes Ergebnis zeitigt. Ein mustergültiges Beispiel ist die Voraussage, mit der Carl Friedrich Gauß im Alter von 24 Jahren weltberühmt wurde: Aus den recht spärlichen Beobachtungen des italienischen Astronomen Giuseppe Piazzi gelang es Gauß, den Zeitpunkt und den Ort erneuter Sichtbarkeit des hinter der Sonne verschwundenen Kleinplaneten Ceres mit größter Präzision vorherzusagen – eine damals kaum vorstellbare Leistung.

3 Phänomene

Der ursprünglich biologische Umgang mit den 'Phänomenen' der Natur bezieht sich auf das Erkennen von Differenzen, die Handlungen notwendig machen, um sich einen Überlebensvorteil zu verschaffen oder um einer Gefahr zu entgehen. Die Aufgabe des 'Erkennens' liegt bei unseren Sinnesorganen, die so übermittelten Informationen werden vom Gehirn verarbeitet und in Handlungsanweisungen übersetzt. Daraus wird bereits deutlich, daß 'Phänomene' grundsätzlich als eine (kausale) Folge von Ereignissen, also insbesondere in zeitlicher Abfolge auftreten, und daß ihre Wahrnehmung durch den Menschen den Charakter von Messungen hat, und zwar der Messung von Unterschieden.

Die damit auftretende Notwendigkeit des Erkennens von Zustandsänderungen führt auf die wesentlichen instrumentellen Kulturtechniken des Messens (von Längen), des Zählens und des Wägens, die schon die Bibel hervorhebt. In der Folge werden vor allem solche Phänomene Gegenstand der Mathematisierung, die einem wohldefinierten Meßprozeß zugänglich sind und deren Voraussagen sich auf ein kurz gefaßtes und leicht verständliches Ergebnis reduzieren lassen: am besten eine schlichte Zahl. Wenn wir hier von Kulturtechniken sprechen, so meinen wir Techniken, die hinreichend weit verbreitet sind und sich eingeschliffen haben, und die vor allem *gelehrt* werden können. Deshalb müssen die Phänomene, auf die sie sich beziehen, mit hinreichender Regelmäßigkeit auftreten: was nur einmal geschieht, entzieht sich der Beobachtung, gewinnt nicht den Status eines Phänomens. Diese Grundtatsache spiegelt sich in der unabdingbaren Forderung nach Wiederholbarkeit aller Experimente oder Deduktionen, die als wissenschaftliches Ergebnis veröffentlicht werden.

Die Entwicklung der Meßtechniken hat zu einer Koevolution von instrumentellen und symbolischen Kulturtechniken geführt. Eine regelgerechte Messung ist nicht erst heute ein Prozeß, in dem sich technische Abläufe und ihre symbolische Verarbeitung auf das engste verbinden. Aus dieser Verknüpfung entsteht insofern ein neuer Zugriff auf die Abläufe der Natur, als aus dem Meßprozeß die Möglichkeit zur autonomen Produktion neuer, ohne den Menschen nicht denkbarer Phänomene erwächst. An erster Stelle stehen die vom Menschen ins Werk gesetzten Veränderungen der Natur, vom Ackerbau über Siedlungen und befahrbare Wege bis hin zur Erzeugung von Substanzen und Lebensformen, die es ohne menschliche Einwirkung auf unserer Erde nicht geben würde. Der Weg der kulturellen Evolution führt von der Messung zum Experiment, vielfältig unterstützt durch die erfinderische Kraft des Zufalls. Mit dem Experiment entstehen die Naturwissenschaften als diejenigen Künste, die sich auf die systematische 'Befragung' der Natur durch Variation der experimentellen Parameter verstehen. Ein instruktives Beispiel für diesen Prozeß bietet die Geschichte der Alchemie, die über dem Generalbaß der Kochkunst die Oberstimmen der Pharmakologie und der Chemie entstehen läßt. Noch für Newton tritt die Alchemie als Arbeitsfeld mindestens gleichberechtigt neben seine Optik, Mathematik und Mechanik.

Die Techniken des Messens haben in den letzten zwei Jahrhunderten eine außerordentliche Erweiterung und Verfeinerung erfahren und viele Phänomene ans Licht gebracht, die unabhängig vom Meßprozeß nicht mehr wahrgenommen werden können. Die Formulierung „ans Licht bringen" ist hier sehr wörtlich zu nehmen, denn die Phänomene der atomaren und subatomaren Physik wie der Kosmologie werden nur sichtbar durch spezifische Abbildungstechniken, die dem Meßprozeß zugerechnet werden müssen. Die sogenannte Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik zieht angesichts der Dualität von Wellen- und Korpuskeleigenschaften daraus die Konsequenz, daß (physikalisch relevante) Phänomene durch den Meßprozeß überhaupt erst definiert werden. Diese Feststellung beunruhigt nicht nur wegen der schwankenden Natur der Elementarteilchen, sondern auch im Hinblick auf ganz andere Meßvorgänge, die beispielsweise das Phänomen des „Wählerwillens" beschreiben. Wir sehen uns also gezwungen, den Meßprozeß mit all seinen Aspekten in die Definition der 'meßbaren Phänomene' aufzunehmen, über deren ontologischen Status wir ansonsten zunächst nichts aussagen.

Mit der notwendig zu fordernden Reproduzierbarkeit der durch Meßprozesse definierten Phänomene geht die Vorstellung einher, daß Meßfehler durch Mittelbildung ausgeglichen werden können und daß genügend viele und feine Messungen in aller Regel auch beliebig genaue Ergebnisse – und damit beliebig genaue Voraussagen – erbringen werden. Während dies tatsächlich auf alle Phänomene zutrifft, die sich nach dem Newtonschen Paradigma beschreiben lassen, kennen wir doch inzwischen viele Systeme – wie das Klima der Erde –, die ein „chaotisches" Verhalten aufweisen und insbesondere einer genauen Voraussage über längere Zeiträume nicht zugänglich sind. Der Grund dafür liegt in der ‘Instabilität’ der Gleichungen, mit denen das Klimasystem modelliert wird, die auch kleinste Meßfehler in kurzer Zeit derart aufschaukeln, daß jedes Ergebnis möglich wird – so der berühmte Schmetterlingsflug, der auf der anderen Seite der Erde einen Sturm auslöst. Es handelt sich hier um eine Eigenschaft der *Modellierung*, also des ‘symbolisch-formalen Systems’, das der Voraussage zugrunde liegt, die zunächst nichts mit dem Meßprozeß selbst zu tun hat. Es ist deshalb nicht ausgeschlossen, daß andere Kenngrößen – die mit anderen Meßprozessen zu erfassen wären – und andere Modellierungen zu sehr viel befriedigenderen Ergebnissen führen könnten. Ein interessantes Beispiel sind Küstenlinien, die sich in dem Sinne als „chaotisch“ erweisen, daß sie einer sinnvollen Längenmessung nicht mehr zugänglich sind, weil sie auf jeder Längenskala die gleichen zerfransten Strukturen zeigen – ein als Selbstähnlichkeit bezeichnetes Phänomen. Statt einer Länge ordnet man ihnen deshalb eine „fraktale Dimension“ zu, die zwischen eins und zwei liegt. Für dieses scheinbar prinzipiell nicht berechenbare Phänomen hat kürzlich Bernard Sapoval ein außerordentlich einfaches Computermodell entwickelt, daß auf wohlbekannten geologischen und geochemischen Prozessen beruht und sehr „lebensnahe“ Küstenlinien produziert.

Tatsächlich wird an solchen Beispielen deutlich, daß die meisten physikalischen Vorgänge, die wir im Alltag beobachten können, eine Beschreibung der Newtonschen Art nicht zulassen; sie sind zu „komplex“. Der Überlebenserfolg einer Spezies hängt jedoch entscheidend von einem sehr effektiven Umgang mit vielfältigen komplexen Systemen ab. Es steht deshalb zu erwarten, daß die Mathematisierung der Lebensphänomene – wenn sie denn gelingt – viele neue Einsichten und Vorhersagen mit sich bringen wird (und natürlich wohl auch eine neue Mathematik). Aus dieser Sicht besteht Newtons geniale Leistung gerade darin, genau die Gruppe von Phänomenen im Bewegungsgeschehen der Himmelskörper isoliert zu haben, die einer vollständig exakten Beschreibung zugänglich waren.

4 Formale Systeme

Nach dieser ersten Klärung der Begriffe ‘Phänomen’ und ‘Vorhersage’ wende ich mich nunmehr den ‘formalen Systemen’ zu, deren Aufgabe innerhalb des Mathematisierungsprozesses darin besteht, die gewünschte Vorhersage auf der Basis der Meßdaten zu liefern. Das oben erwähnte Beispiel der von Gauß wieder aufgefundenen Ceres zeigt exemplarisch, welche Schritte zu leisten sind: Das in Rede stehende Phänomen wird zunächst modelliert, das heißt, in ein deduktives System übersetzt. Dieses System bestimmt dann aus einer kleinen Zahl von a priori als wahr angenommenen Sätzen – den Axiomen – durch logische Schlüsse *und* rechnerisches Verarbeiten der Meßergebnisse die gewünschte Voraussage. In diesem Fall ist das deduktive System die Newtonsche Mechanik, die uns die Bahn der Ceres – bis auf sehr kleine und zunächst vernachlässigbare Störungen – als eine Ellipse angibt, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Unter den unendlich vielen denkbaren Ellipsen wird nun die wahre Bahn durch die Meßdaten bestimmt. Allerdings muß diese Bestimmung so explizit ausgeführt werden, daß der Ort des Asteroiden zu einem beliebigen Zeitpunkt in der Zukunft möglichst genau vorausberechnet werden kann. Gauß gibt zunächst ein rechnerisches Verfahren an, um eine elliptische Bahn im Raum aus vier gemessenen Bahnpunkten zu bestimmen. Dann entwickelt er die Algorithmen, um diese Bahn rechnerisch beliebig genau zu bestimmen und führt die notwendigen und sehr umfangreichen Rechnungen (mit Bleistift und Papier) aus. Schließlich verwertet er die Daten Piazzis in einer geschickten Mittelbildung und erreicht sein Ziel.

Man sieht an diesem Beispiel, daß das formale System der Newtonschen Mechanik allein *nicht* ausreicht, um die gewünschte Voraussage zu erreichen; es muß zusätzlich algorithmisch ausgewertet werden. Während der Entwurf von Algorithmen der symbolischen Seite zuzurechnen ist, also durch logische Deduktionen erfolgt, muß die Implementierung, das heißt die tatsächliche Durchführung der Rechnung, eher auf der instrumentellen Seite gesehen werden. Es scheint deshalb sinnvoll, in den Begriff des 'formalen Systems' für die Zwecke unserer Diskussion sowohl die 'symbolischen formalen Systeme', das heißt logisch deduktive axiomatische Systeme, als auch automatisierte technisch-algorithmische Prozesse aufzunehmen, die ich zusammen mit ihrer Implementierung als 'instrumentelle formale Systeme' bezeichnen möchte. In diesem Sinne leistet dann auch ein technisches System, das algorithmisch arbeitet, eine Mathematisierung; diese Begriffserweiterung scheint deshalb angemessen, weil sich, wie schon betont, in der Entwicklung solcher Systeme in aller Regel symbolische und instrumentelle Kulturtechniken vielfach verschränken und vielfach gegenseitig beeinflussen.

Demzufolge ist ein 'symbolisches formales System' (oder eine Theorie) zunächst einmal ein axiomatisches System im Sinne des Hilbertschen Formalismus. Es stützt sich auf eine formale logische Sprache, in der die Grundtatsachen, die Axiome, sowie alle „einschlägigen", das heißt grammatisch richtigen Sätze formuliert werden. Axiome bedürfen keines Beweises, sie werden als fundamentale „wahre" Sätze, als „selbstevident" angenommen. Zugleich aber wird erstens ihre *Widerspruchsfreiheit* gefordert, das heißt, aus allen nur denkbaren logischen Operationen in diesem System darf sich niemals ergeben, daß ein einschlägiger Satz sowohl wahr als auch falsch ist. An diesem „Tertium non datur" läßt sich im Hinblick auf gewisse Bereiche der Realität durchaus ernsthaft zweifeln. Problematischer jedoch ist das Faktum, daß die Forderung der Widerspruchsfreiheit innerhalb des Systems selbst nicht befriedigend entschieden werden kann: Sie verlangt eine axiomatische Erweiterung der verwendeten logischen Werkzeuge. Zum zweiten wird – ungleich problematischer – dem Axiomensystem *Vollständigkeit* abverlangt, das heißt, daß alle einschlägigen Sätze entweder wahr oder falsch sind; es muß also entweder der Satz selbst oder sein logisches Gegenteil beweisbar sein. Diese Forderung hat Kurt Gödel 1931 als definitiv unerfüllbar nachgewiesen, indem er zeigte, daß in jedem hinreichend gehaltvollen formalen System Sätze existieren, die nicht beweisbar oder widerlegbar sind und damit selbst axiomatischen Charakter haben. Damit war zwar der Formalismus in Hilberts striktem Sinn als wissenschaftliches Programm erledigt, die Praxis der Mathematik und der Mathematisierungen jedoch wurde von Gödels „Unvollständigkeitssatz" kaum berührt, weder quantitativ noch qualitativ.

Die Praxis der Mathematik besteht in nichts anderem als in der „Explikation der Axiome", das heißt im tatsächlichen Beweis möglichst aller einschlägigen Sätze einer Theorie. Dies ist einerseits eine etwas unbefriedigende Tätigkeit, da ja der logische Gehalt der Theorie mit der Wahl der Axiome unabänderlich festgelegt ist; andererseits erweist es sich häufig als außerordentlich schwierig, zu einem beliebigen einschlägigen Satz einen Beweis oder eine Widerlegung zu finden. Der Erfolg eines Mathematikers hängt deshalb entscheidend von seiner Fähigkeit ab, in der unendlichen Mannigfaltigkeit einschlägiger Sätze *lösbare* Probleme zu isolieren, also solche Aussagen, deren Beweis mittels bereits bekannter Sätze und bereits vorhandener, geeignet modifizierter oder gar ganz neuer Methoden erreichbar ist. Wie Gödels Ergebnis zeigt, gibt es dafür kein automatisierbares Verfahren. Allerdings kann eine spezifische Beweismethodik durchaus in quasi-mechanischem Vorgehen eine Fülle von Ergebnissen zeitigen, die zunehmend komplizierter, aber aufgrund der etablierten Methodik dann eben „voraussagbar" sind.

Ob ein neuer Beweis allerdings „interessant" ist, also von vielen Mathematikern aufmerksam zur Kenntnis genommen wird, ist eine kollektive Entscheidung der Wissenschaftler, die sich mit der in Rede stehenden Theorie in irgendeiner Form beschäftigen. Dafür mögen viele Faktoren, mitunter auch zufällige, ausschlaggebend sein. Für die unmittelbare Wirkung aber ist sicher entscheidend, daß das vorgelegte Ergebnis weithin sichtbar, leichtverständlich und überraschend ist. Eine weitergehende Wirkung kann sich dann ergeben, wenn der Beweis eine neue Verbindung zwischen verschiedenen axiomatischen Systemen herstellt und damit gleichsam die Fesseln der gegebenen Theorie sprengt.

Um beide Effekte zu illustrieren, möchte ich nochmals die Wiederentdeckung von Ceres anführen, die exemplarisch alle Kriterien erfüllte, die unmittelbare und weitreichende Aufmerksamkeit sichern. Die Fesseln der Newtonschen Theorie sprengte diese Mathematisierung jedoch keineswegs, im Gegenteil: Sie gehört zu den wenigen Gaußschen Leistungen, die schon bald durch wesentlich leistungsfähigere ersetzt wurden, so daß sein damals so spektakuläres Resultat heute nur noch historisches Interesse verdient.

Völlig anders verhält es sich mit einer Schrift, die Gauß im Jahre 1800 publizierte. Diese „Disquisitiones arithmeticae" wurden zu einem der einflußreichsten Bücher auf dem Gebiet der Zahlentheorie und sind noch heute sehr lesenswert. Im letzten Kapitel löst Gauß ein berühmtes Problem der griechischen Antike: Er beantwortet die Frage, welche in einen Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecke mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Die Griechen kannten die Konstruierbarkeit von Dreieck und Fünfeck und glaubten, daß das Siebeneck nicht konstruierbar sei. Gauß bestätigte dies und gab eine eindeutige Antwort für jede Zahl n; daraus ergab sich unter anderem, daß das regelmäßige 17-Eck konstruierbar ist. Diese Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie wurde vom Publikum als Grenzüberschreitung und Loslösung der Arithmetik vom angestammten Gegenstandsbereich empfunden. Der französische Mathematiker Louis Poinsot kommentierte dies in seiner Rezension der „Disquisitiones" 1807 mit den Worten: „Mais dans les sciences mathématiques toutes les verités se tiennent par une chaine nécessaire."

Die Tätigkeit des Beweisens ist also mehr als ein tautologischer Vollzug. Sie ist immer begleitet von der Suche nach neuen, möglicherweise stärkeren axiomatischen Strukturen, die dann eine neue theoretische Entwicklung im Zuge ihrer Explikation einleiten. Jeder Beweis ist ein Experiment mit dem Ziel, verborgene Strukturen aufzuspüren. Gauß' Entdeckung markiert den Zeitpunkt der Konstituierung der „Reinen Mathematik" als selbständige „Strukturwissenschaft". Zu ihrem Selbstverständnis und zu ihrer Rechtfertigung bedarf sie seitdem nicht mehr des Verbundes mit instrumentellen Techniken im Zuge des Mathematisierungsprogramms.

Das bedeutet nicht das Ende des Mathematisierungsprogramms, im Gegenteil; aber für die Mathematik war ihre Rolle in diesem Programm nicht mehr der ausschließliche Existenzgrund. Nachdem sie autonome, „innere" Gesetze ihres Fortschreitens für sich in Anspruch nehmen konnte, folgte dann auch eine beispiellos erfolgreiche Entwicklung, die bis in unsere Zeit andauert und sich womöglich noch verstärkt. Umso deutlicher stellt sich die Frage nach der Bedeutung des Mathematisierungsprogramms für die Entwicklung der Mathematik (wie der Technik) insgesamt und nach den Faktoren, die seine Dynamik bestimmt haben und bestimmen.

Aus mindestens zwei Gründen dürfte die Entdeckung der Mathematisierbarkeit als Möglichkeit der sicheren Voraussage von Ereignissen für die Entwicklung der instrumentellen, aber vor allem der symbolischen Kulturtechniken entscheidend gewesen sein. Zum einen haben nur diese Erfolge den Mehrwert erwirtschaftet, der es erlaubte, einzelne bzw. kleinere Gruppen von Stammesmitgliedern von der unmittelbaren Daseinsvorsorge zu befreien, so daß sie sich der Entwicklung neuer, vor allem symbolischer Kulturtechniken widmen konnten. Zum anderen hatten die symbolischen Techniken sicher die Existenz von ausgefeilten instrumentellen Kulturtechniken, also von Kunstlehren, zur Voraussetzung, deren Erlernen und Abstimmen in einer eng kooperierenden Gruppe den Rückhalt für Abstraktionen bildete. Aus diesen Abstraktionen entsprangen Vereinfachungen und Übertragungen der Kunstlehren und damit die Grundlage für weiterreichende, häufig vom Zufall unterstützte Techniken, so daß instrumentelles Handeln und symbolisches Verstehen in ein Verhältnis gegenseitiger Verstärkung traten. In der hellenistischen Wissenschaft von Euklid und Archimedes begegnen wir denn auch Mathematisierungen mit bereits weitgehend ausbalancierten theoretischen und technischen Anteilen.

Die entscheidende Verknüpfung zwischen dem symbolischen und dem instrumentellen formalen System besteht in einer 'Modellierungs'-Vorschrift, welche die Kenngrößen des Meßprozesses im Rahmen des formalen symbolischen Systems interpretiert. Damit werden dem betrachteten Bereich von Phänomenen Begriffe und Relationen unterlegt – die *Hypothesen* der Theorie –, die in aller Regel viel mehr an formalen Implikationen mit sich bringen, als durch Messungen tatsächlich belegt werden kann. Nicht selten werden Hypothesen konstatiert, die keiner direkten Messung zugänglich sind. Die Architektur des formalen symbolischen Systems ist deshalb nicht a priori zwingend, sie kann im besten Falle „die Phänomene retten", ohne aber einen Wahrheitsanspruch geltend machen zu können; denn es kann nie ausgeschlossen werden, daß eine andere Theorie zu noch besseren Voraussagen führt. Darüber hinaus bedeutet die erfolgreiche Implementierung einer Theorie eine reale Konsistenzprüfung, einen nicht zu unterschätzenden Schutz gegen innere logische Widersprüche. Des weiteren ergeben sich aus Zusammenhängen der Meßdaten häufig, wenn auch nur selten zwangsläufig, die „richtigen" einschlägigen Fragen an die Theorie. Durch solche Realitätsprüfungen wird die Spreu der unendlich vielen gleichberechtigten formalen Sätze der Theorie vom Weizen der wichtigen getrennt (und das Gödelsche Gespenst auf Abstand gehalten). Von dieser Rückkoppelung hat die Mathematik in ihrer Entwicklung außerordentlich profitiert, und das wird auch weiterhin so bleiben, obwohl dies manchmal nicht mit genügender Deutlichkeit gesehen wird. Nicht zuletzt ist der allgegenwärtige Computer ein formales instrumentelles System, dessen Wirkungsweise – nach erfolgreicher Gewöhnung – kaum noch wahrgenommen wird.

Ein vergleichbarer Effekt ist für die Technik zu vermerken, die dazu neigt, die Erfolge der Theorie durch Verkleidung als „Hardware“ unter ihrer Benutzeroberfläche verschwinden zu lassen, wofür wiederum der Computer die schönsten Beispiele liefert, unter anderem in seiner Inkarnation als Navigationssystem. Tatsächlich wird der Prozeß der technischen Entwicklung vom Zwang zur optimierenden Automatisierung getrieben, und jedesmal wenn ein gewisser Abschluß erreicht ist, läßt sich guten Gewissens die Unabhängigkeit von der Theorie behaupten. Das gilt übrigens auch für die von der Quantenmechanik inspirierten technischen Effekte, deren schlichte Wirksamkeit im Laser oder im Halbleiter alle bohrenden Fragen nach grundsätzlichem Verständnis scheinbar überflüssig werden läßt. Allerdings schöpft die technische Entwicklung auch aus anderen, weniger leicht zu beschreibenden Quellen als der Theorie, die Teil ihrer ursprünglichen Konstitution als instrumentelle, also handelnde Kunstlehre zu sein scheinen. Sie manifestieren sich nicht nur in optimierenden, sondern auch in spielerischen Antrieben, die dem Fortschritt durch glückliche Zufälle die Türen öffnen. Der theoretische Anteil ist aber sicher in einem qualitativen Wachstum begriffen, so daß immer komplexere Systeme mit immer größerer Reichweite mathematisiert werden, deren Folgen immer globaler und langfristiger – und damit immer schwerer abzuschätzen – sind.

5 Wissenschaft und Wissen

Bei aller Bedeutung, die den vielfältigen Mathematisierungen in Vergangenheit und Gegenwart für das Dasein des Menschen zukommt, muß man doch fragen, welche Aspekte des Lebens durch diese Methoden erfaßt werden können und welche möglicherweise – oder sogar sicher – nicht. Bis vor nicht allzu langer Zeit hätte man leicht Einverständnis darüber erzielen können, daß die geistig-moralische Sphäre der menschlichen Existenz keinesfalls angemessen mathematisiert werden kann, was nicht zuletzt die quantitativ höchst unbefriedigenden Voraussagen der Wahlforscher wie der Wirtschaftsweisen, der Politologen wie der Astrologen unbarmherzig bezeugen. Das unmittelbar sichtbare Hindernis jeder Mathematisierung dieser Phänomene liegt in ihrer Komplexität, die sich auch nicht durch geeignete Experimente reduzieren läßt, weil letztere entweder nicht möglich oder nicht zumutbar sind. Ich hatte jedoch schon darauf hingewiesen, daß allein das Versagen der bekannten Methoden nichts über die prinzipielle Unmöglichkeit einer Mathematisierung besagt, genauso wenig wie Erfolge auf anderen Feldern, und seien sie noch so spektakulär. Die Wissenschaft kann sich durch solche Erwägungen – die sie zweifellos beschäftigen müssen, weil sie ein zentrales Problemfeld auch ihres Selbstverständnisses berühren – allerdings nicht davon abhalten lassen, die Grenzen des „ignoramus" immer wieder auszuloten und, wo immer möglich, hinauszuschieben.

Schließlich könnte man fragen, wie aus der unüberschaubaren Zahl von Mathematisierungen und eventuell weiteren wissenschaftlichen Leistungen ein Ganzes, ein Wissen also, entsteht. Die vielfältige Klage über die Fragmentierung des Wissens durch Spezialisierung ändert ja nichts am Zwang zur Synthese, schon allein deshalb nicht, weil lebensgerechtes Wissen, wie eingangs betont, zu Handlungsanweisungen führen muß. Das gilt für den einzelnen Menschen genauso wie für Organisationen und Institutionen, die alle täglich den 'executive summary' produzieren, auf dessen Grundlage sie entscheiden. Wie Entscheider wirklich zu ihren Entscheidungen kommen, scheint im einzelnen kaum bekannt zu sein, aber wir dürfen wohl annehmen, daß Mathematisierungen, auch wenn sie ausdrücklich ins Feld geführt werden, dabei die geringste Rolle spielen. Aufgabe der Wissenschaft insgesamt muß es deshalb sein, neben allem Streben nach weiteren gelungenen Mathematisierungen (oder andersartigen problemlösenden Strategien) auch den Zusammenhang und die Verfügbarkeit des verläßlichen Wissens zu fördern, wobei die Frage, wie das am besten zu geschehen hätte, sicherlich eine eigene Diskussion wert wäre.

Klaus Lucas

Zur Rolle der Mathematik in den Technikwissenschaften

Mathematik und Technikwissenschaften verbindet ein kompliziertes, vielfältiges Beziehungsgeflecht. Sie treiben sich gegenseitig an, bedingen sich in vielen Fällen, hassen und verachten sich aber auch gelegentlich und kommen doch nicht voneinander los. So wie der Begriff der Technikwissenschaften eine Vielzahl unterschiedlicher, teilweise gegensätzlich gearteter Gebiete umfaßt, so ist auch die Rolle der Mathematik in den Technikwissenschaften facettenreich. Jede allgemeine Erörterung hat daher notwendig etwas Grobes, Undifferenziertes, vielleicht sogar Anmaßendes an sich und fordert Widerspruch heraus. Das durchaus respektierte Einzelne soll hier jedoch zugunsten des Verbindenden zurücktreten.

Grundsätzlich und allgemein gilt, daß die Technikwissenschaften Artefakte in die Welt setzen. Ihre Aufgabe ist es nicht primär, die Natur zu verstehen, zu erklären oder gar zu mathematisieren. Sie nutzen vielmehr die Naturgesetze – ob mathematisch formuliert oder nicht – zum Aufbau dieser Artefakte und, sehr wichtig, zum Erkennen der Grenzen des Möglichen. Dabei sind die Technikwissenschaften aus historischer Perspektive empirische Wissenschaften – etwas abwertend formuliert, regelrechte Probierwissenschaften. Sicherlich waren sie keine mathematisierten Wissenschaften nach heutigem Verständnis. Wenn etwas funktionierte, war es nicht das primäre Interesse der Technikwissenschaften, den Grund dafür herauszufinden oder es gar mathematisch zu beschreiben. Man war mit der Funktionalität zunächst einmal zufrieden; der Fortschritt entwickelte sich empirisch. Charakteristisch für viele Jahrhunderte technikwissenschaftlicher Aktivitäten war insbesondere ein entspanntes Verhältnis zum Verbrauch von Ressourcen menschlicher Arbeitskraft, Raum und Zeit. Die historische Textilbleiche zum Beispiel, ohne Zweifel ein bedeutender chemotechnischer Grundprozeß, hatte einen enormen und nach heutigen Vorstellungen ganz unangemessenen Verbrauch an menschlichen und natürlichen Ressourcen. Die vorindustriellen Transportsysteme, also die Mobilität auf der Grundlage von Pferdewagen und Schiff, verbrauchten die Ressource Zeit in heute nicht mehr tolerierbarem Maße und waren durch erhebliche Störanfälligkeiten, das heißt Unsicherheiten, gekennzeichnet. Grundsätzliche Neuerung brachte, historisch gesehen, erst eine besondere technische Erfindung, die Dampfmaschine. Sie verdankt ihre Existenz nicht vorrangig der angewandten Mathematik, sondern systematischer empirischer Forschung. Die Dampfmaschine ermöglichte die zur industriellen Revolution grundlegende Konzentration von nutzbarer Energie, die nicht nur eine neue Form der Mobilität, sondern auch viele neuartige Technologien hervorbrachte.

Kurzum, die Bedeutung der Mathematik in den Technikwissenschaften, die sich heute zu einer überragenden Dimension entwickelt hat, verfügt über keine tiefen historischen Wurzeln, sondern ist eine Folge moderner Ansprüche. Blicken wir auf unsere heutigen technischen Artefakte, so sehen wir nicht nur äußerlich einen Wandel – eine Eisenbahn muß nicht nur fahren, ein chemischer Prozeß nicht nur funktionieren. Unsere Ansprüche gehen darüber hinaus: Wir wünschen optimale Lösungen in bezug auf Präzision, Schnelligkeit, Sicherheit, Wirtschaftlichkeit, Umweltverträglichkeit etc. All dies läßt sich in einem Begriff zusammenfassen: Wir wünschen Berechenbarkeit. Damit steht die Mathematik plötzlich verbal bereits im Zentrum der Technikwissenschaften, nicht im Sinne der Bedeutung in den Naturwissenschaften, möglicherweise aber als Quelle von Neuem, von Überraschungen. In den technischen Artefakten wünscht man sich keine Überraschungen, weder gute noch schlechte. In den Technikwissenschaften hat die Mathematik ganz überwiegend eine dienende Funktion. Sie soll das, was im Grunde bekannt ist und funktioniert, quantifizieren und optimieren, auch hier von Sonderfällen abgesehen.

Blicken wir zur Illustration auf einen speziellen technischen Prozeß: die Stromerzeugung im Wärmekraftwerk. Hier gibt uns die Naturwissenschaft, insbesondere die Physik, mit dem Carnot-Wirkungsgrad eine obere Grenze des Möglichen in bezug auf die Stromausbeute pro Energieinhalt des eingesetzten Brennstoffs vor. Sie ist durch eine einfache mathematische Beziehung quantifiziert. Diese Grenze kann kein Technikwissenschaftler – und sei er noch so genial – bei der Gestaltung eines Kraftwerkes mit oder ohne Mathematik überbieten. Die Aufgabe der Technikwissenschaften ist es vielmehr, sich dieser Grenze unter vielerlei Randbedingungen, insbesondere der Wirtschaftlichkeit, durch geeignete technische Strukturen anzunähern. Dabei muß man erkennen, daß eine technische Struktur wie ein Kraftwerk eine Zusammenfassung vieler Einzelteile ist, die zielgerichtet zusammenwirken müssen. Der Dampferzeuger muß nicht nur Dampf generieren, sondern dies auch mit gleichbleibender Qualität von Temperatur und Druck tun, damit die nachgeschaltete Dampfturbine daraus auf optimale Weise Strom gewinnen kann. Am Ende des Prozesses muß eine bei möglichst tiefer Temperatur gestaltete Kühlung die aus naturgesetzlichen Gründen erforderliche Wärmeabfuhr sicherstellen. Ein solches Zusammenspiel von technischen Komponenten ist ohne Mathematik nicht zu optimieren. Es wird daher ein mathematisches Simulationsmodell aufgestellt, welches die Wirkungsweise der Komponenten soweit abbildet, daß ihr Zusammenspiel bei variierenden Prozeßbedingungen rechnerisch verfolgt werden kann. Ein solches Modell kann mathematisch noch relativ einfach sein, da das Zusammenwirken der Komponenten durch eine grobe Modellbildung auf thermodynamischer Grundlage ausreichend genau beschrieben wird. Es besteht im wesentlichen aus linearen Beziehungen zwischen den relevanten Größen des Prozesses, die durch die Naturgesetze der Masseerhaltung, der Energieerhaltung und der Entropiebilanz vorgegeben sind. Wegen seiner Linearität und der Stetigkeit seiner funktionalen Zusammenhänge ist die Lösung aus solchen Gleichungssystemen mathematisch trivial. Es gibt Computercodes, die für jedermann handhabbar sind. Als Ergebnis erhält man für unterschiedliche Prozeßparameter und unterschiedliche Verschaltungen Zahlenwerte für den elektrischen Wirkungsgrad, anhand derer optimale Prozeßbedingungen herausgefunden werden können. Solche Anwendungen der Mathematik auf technische Prozesse sind heute Standard, nicht nur in der Kraftwerkstechnik.

Deutlich anspruchsvollere mathematische Methoden werden erforderlich, wenn die einzelnen Komponenten des Kraftwerksprozesses im Detail einer optimalen Gestaltung zugeführt werden sollen. Ein Dampferzeuger in einem Kraftwerk kann erhebliche Ausmaße annehmen. Er hat ganz offenbar eine spezielle geometrische Struktur, die keineswegs belanglos, sondern maßgeblich für die gewünschte optimale Funktion ist. Es ist zum Beispiel von Bedeutung, an welcher Stelle und mit welchem Impuls die Luftzufuhr und die Brennstoffzufuhr gestaltet werden, damit ein möglichst weitgehender Ausbrand mit geringer Schadstoffemmission erfolgt. Die Optimierung dieses Vorgangs wird heute nicht mehr durch reines Probieren erreicht. Man konstruiert vielmehr ein detailliertes mathematisches Simulationsmodell auf der Basis von Feldgleichungen – also Differentialgleichungen für Impuls, Masse und Energie – in Kombination mit chemischen Reaktionsgleichungen. Solch ein mathematisches Modell ist im Grunde nichts anderes als eine differentielle Formulierung der bereits im trivialen Kraftwerksmodell benutzten naturgesetzlichen Bedingungen der Masse- und Energieerhaltung, hier noch ergänzt durch die Newtonsche Impulserhaltung und die Bilanz für die Masse einer Komponente. Auf der Grundlage eines solchen mathematischen Modells lassen sich die detaillierten Feldgrößen von Temperatur, Zusammensetzung und Geschwindigkeit an jedem Ort und zu jeder Zeit im Dampferzeuger bestimmen. Diese Informationen wiederum erlauben Rückschlüsse auf seine Wirkungsweise sowie seine Optimierung unter gegebenen Randbedingungen. Auf derselben Grundlage werden auch alle anderen Maschinen und Apparate des Kraftwerksprozesses beschrieben, beispielsweise die Turbinen. Das nämliche gilt im Grundsatz für alle technischen Strukturen, deren Wirkung durch die Bilanzgleichungen von Masse, Impuls und

Energie bestimmt werden. Man muß örtliche und zeitliche Randbedingungen vorgeben, außerdem benötigt man sogenannte konstitutive Gleichungen, in denen Systemgrößen – von Viskositäten bis hin zu chemischen Reaktionsgeschwindigkeiten – auftreten, die das Gesamtgeschehen maßgeblich beeinflussen. Auch für die Lösung eines solchen Systems von Differentialgleichungen gibt es heute Computercodes. Ihre Anwendung ist naturgemäß viel schwieriger als die des trivialen Modells. Analoge Modellbildungen, allerdings auf der Basis anderer Gleichungssysteme, sind in anderen Bereichen der Technikwissenschaft üblich, so im Bauingenieurwesen, im Maschinen- und Apparatebau.

Der Stand der Mathematisierung der Technikwissenschaften ist demgemäß hoch. Wir können komplexe technische Strukturen im mathematischen Modell studieren und daraus Rückschlüsse auf die reale Funktionalität ziehen. Und dennoch gibt es auch Grenzen, und Fragen werfen sich auf: Wie detailliert und umfassend dürfen unsere Fragestellungen sein? Geben unsere mathematischen Modelle wirklich die gewünschten Antworten auf die gestellten Fragen, oder tun sie das nur im groben, statistischen oder auch eingeschränkten, das heißt nicht eigentlich belastbaren Sinn?

Einige ungelöste Probleme sollen hier dargestellt werden:

Was heißt eigentlich Optimalität? Ist es das, was Kurt Tucholsky mit „Das Ideal" beschreibt? Sollen unterschiedliche Teilziele gewichtet werden, und wenn ja, wie? Wenn schon die Villa im Grünen nicht an der Friedrichstraße liegen kann, wo ist der Kompromiß? Ganz analog sind die Ansprüche, die an technische Artefakte gestellt werden. Betrachten wir wieder das Kraftwerk. Schon bei der eigentlich simplen Frage der Wirtschaftlichkeit steht man vor dem Problem, daß diese durch Investitionskosten und Betriebskosten bestimmt wird. Beide sind bekanntlich konfliktionär, das heißt sie können nicht gleichzeitig minimiert werden. Wenn man in ausgefeilte Technik investiert, kann man Betriebskosten sparen und umgekehrt. Da man beide Kostenarten nicht sinnvoll zusammenfassen kann, wird man versuchen, die Paretomenge aller optimalen Lösungen auf die Weise zu bestimmen, daß eine Verbesserung in einem Kriterium ein anderes verschlechtert. Es ist nicht einfach, solche Lösungen zu finden, und die Mathematik hat dazu bisher keine allgemeingültigen Algorithmen beizutragen. Das gilt insbesondere im vorliegenden Fall, wenn Investitionskosten der einzelnen Komponenten unstetig variieren, zum Beispiel in Abhängigkeit von Baugrößen. Klassische mathematische Lösungsansätze versagen noch vor dieser Aufgabe. Dies gilt umso mehr, wenn weitere Teilziele, wie Energieverbrauch, Standortbedingungen etc. mit einbezogen werden.

Eine weitere Frage ist, ob ein mathematisches Gleichungssystem – und sei es noch so ausgefeilt – überhaupt die Realität wiedergibt? Wenn wir Mathematik in den Technikwissenschaften anwenden, dann postulieren wir zunächst ein abstraktes physikalisches Modell und beschreiben dies mathematisch, nicht mehr und nicht weniger. Kennen wir wirklich die Geometrien unserer Artefakte so genau, wie wir es für die detaillierte mathematische Behandlung im Modell unterstellen? Die Antwort ist nein. Kennen wir die Materialeigenschaften, die die Prozesse und die Strukturen bestimmen, genau genug, so daß wir von den Ergebnissen des Modells zuverlässig auf die Realität schließen können? Die Antwort ist wieder nein. Die Ergebnisse unserer mathematischen Modellierungen, so wertvoll sie auch sind, stehen bei der Vorhersage der Realität grundsätzlich unter schwerwiegenden Vorbehalten. Wie berücksichtigen wir diese Informationsdefizite, wie gehen wir mit Nichtwissen um? Hier gibt es unterschiedliche Ansätze: Der mathematisch gestützte Weg besteht in der Einführung stochastischer Elemente in die mathematische Modellierung. Ein Beispiel aus dem Bauingenieurwesen ist die stochastische Versagensanalyse von Gebäudekonstruktionen. Etwa die Frage, wie die Tragwerke einer Halle gestaltet sein müssen, um bestimmte Sicherheiten bei Versagen aufgrund nur unscharf bekannter Belastungen, zum Beispiel Windstärken, angeben zu können. Fazit solcher mathematischer Modellierung ist, daß im Einzelfall überhaupt keine Sicherheiten möglich sind, sondern nur noch statistisch scharfe Aussagen der Art: Bei vielen gleichen Tragwerken und plausiblen Belastungsszenarien wird eine bestimmte Anzahl 100 Jahre halten und sich in Abhängigkeit von der Gestaltung auf diese oder jene Weise verändern. Man kann dann eine Gestaltung auswählen, die mit einer bestimmten statistischen Wahrscheinlichkeit eine vorgegebene Lebensdauer erreicht.

Gerade bei der Behandlung von unscharfem Wissen in den Technikwissenschaften wird der Blick aber auch auf die Grenzen der Mathematik und auf die Erkenntnisse anderer Fachgebiete als der Mathematik gelenkt. Wenn die Anzahl unscharfer Parameter und ihre gegenseitige Abhängigkeit eine gewisse Grenze übertrifft, dann ist die Mathematik keine reale Hilfe mehr bei der Gestaltung und Bewertung technischer Strukturen. Dann gelangt man in Bereiche, wo nicht-mathematisches Grundwissen letztlich der mathematischen Modellierung überlegen ist. In den Sozialwissenschaften ist für diesen Denkansatz der Begriff der 'Begrenzten Rationalität' eingeführt worden. Die Technikwissenschaften werden zu überprüfen haben, inwieweit und unter welchen Umständen dieser Denkansatz in die Gestaltung technischer Artefakte einfließen kann, zum Beispiel in Form von einfachen Expertensystembeziehungen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen:

Zu Beginn ihrer Entwicklung waren die Technikwissenschaften empirische, durch Probieren gekennzeichnete Ansätze.

Heute stehen wir bei der mathematischen Modellierung auf hohem Niveau und können große Fortschritte bei der Gestaltung der Artefakte und der Prognose ihrer Funktion machen.

Bei zunehmender Berücksichtigung von Details der realen Welt in unseren Modellen beginnt die mathematische Modellierung an ihre Grenzen zu stoßen und es gibt Ansätze, sich von ihr abzuheben zugunsten einfacher Heuristiken.

Gerhard Huisken

Mathematisierung der Gravitation: Die Schwarzschildlösung der Einsteingleichungen als Grundmodell vieler Phänomene der Gravitation

Als Beispiel für ein mathematisches Modell in der theoretischen Physik habe ich die Schwarzschildlösung der Einsteinschen Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie ausgewählt. Für die Auswahl dieses speziellen Modells gibt es mehrere Gründe: Zum einen handelt es sich um ein grundlegendes Modell, das eine entscheidende Rolle in der allgemeinen Relativitätstheorie spielt, die als sehr erfolgreiches Modell der Gravitation in der theoretischen Physik bekannt ist. Das Modell erlaubt eine besonders deutliche Darstellung der engen Beziehungen zwischen verschiedenen Gebieten des Wissens, insbesondere zwischen Analysis, Geometrie und theoretischer Physik. Darüber hinaus kann man zeigen, daß das Modell in einer historischen Kontinuität von mathematischen und physikalischen Konzepten steht; das Modell ist nicht auf einmal vom Himmel gefallen, sondern baut auf bekanntem Wissen auf, insbesondere den Keplerschen Planetenbahnen und der Newtonschen Gravitationstheorie. Schließlich habe ich das Modell ausgewählt, weil es für einen Mathematiker, der sich mit diesem Gebiet beschäftigt, ein ästhetisch besonders schönes Modell ist, das auf sehr elegante Weise vorher ganz unerwartete Beziehungen herstellt zwischen Konzepten der Physik und grundlegenden Strukturen der theoretischen Geometrie. Zu guter Letzt weckt es noch Verwunderung: Warum gibt es überhaupt ein mathematisches Modell, das so natürlich eine grundlegende Rolle in Geometrie und Analysis spielt und gleichzeitig qualitativ und quantitativ so genau auf eine Vielzahl von Gravitationsphänomen paßt?

Um das Modell einzuführen, möchte ich mit einem Rückblick auf die Newtonsche Gravitationstheorie beginnen, und zwar den statischen Fall ohne Dynamik: Für einen rotationssymmetrischen Zentralkörper weiß man, daß man das aus dem Zentralkörper herrührende Gravitationsfeld im Vakuum durch ein rotationssymmetrisches Potential U beschreiben kann, das berühmte Newtonsche Potential

$$U = M/r,$$

wobei M die Masse des Körpers und r den Abstand vom Zentrum des Körpers bezeichnet. Ein Testteilchen der Masse m erfährt dann eine Kraft proportional zu m und zum Gradienten des Potentials, in diesem Fall zu mM/r^2 in Richtung des stärksten Anstiegs des Potentials U (Newtonsches Kraftgesetz).

Grundlegende Eigenschaft eines solchen Potentials (im Vakuum) ist die Differentialgleichung, die es erfüllt: Die Spur der Matrix der zweiten Ableitungen von U verschwindet ($\Delta U = 0$). In gewisser Weise befinden sich solche sogenannten harmonischen Funktionen U in einem perfekten, sie charakterisierenden Gleichgewicht: Der Mittelwert ihrer (reinen) zweiten Ableitungen ist Null und die Funktionswerte von U selbst stimmen an jeder Stelle des Raumes genau mit dem Mittelwert von U in allen kleinen umgebenden Kugeln der betrachteten Stelle überein. Da die Differentialgleichung für U linear ist, gilt in der Newtonschen Theorie zudem ein Superpositionsprinzip: Das Potential U eines allgemeinen gravitierenden Körpers läßt sich durch geeignete lineare Superposition von rotationssymmetrischen Potentialen des Typs M/r zusammensetzen, und die Gravitationswirkung ausgedehnter Körper aufeinander läßt sich durch die Betrachtung geeigneter Punktmassen in den Massenzentren der Körper vereinfacht beschreiben.

Was entspricht dem grundlegenden Newtonschen Potential $U=M/r$ nun in der allgemeinen Relativitätstheorie?

Wenn man zur allgemeinen Relativitätstheorie übergeht, dann muß man den euklidischen Raum, also die gewohnten kartesischen Koordinaten x, y, z, durch ein Raum-Zeit-Kontinuum ersetzen, das Raum- und Zeitkoordinaten miteinander verquickt. Einsteins zentrale Idee war, daß dieses Raum-Zeit-Kontinuum kein euklidischer Raum mehr sein muß mit all seinen Symmetrien, die ihn an jeder Stelle in jeder Richtung gleich aussehen lassen, sondern daß die Raumzeit durch die darin enthaltene Materie nach einem ganz bestimmten Gesetz gekrümmt wird. In einem gekrümmten Raum-Zeit-Kontinuum kann man genauso mit Koordinaten rechnen wie man auf der gekrümmten Erdoberfläche mit Hilfe der Karten eines Atlanten in Koordinaten rechnen kann – und eine von Einsteins grundlegenden Forderungen lautet, daß alle physikalischen Gesetze unabhängig sein müssen von den speziellen Karten, die man gerade zum Rechnen verwendet.

Um die neuen Differentialgleichungen formulieren zu können, ist das Potential U, das wir in der Newtonschen Theorie diskutiert hatten, durch eine andere Struktur zu ersetzen, die die Abweichung vom (leeren) euklidischen Raum beschreiben kann. Es stellt sich heraus, daß die geeignete Struktur eine Metrik ist, das ist eine Vorschrift, die an jedem Punkt des Raum-Zeit-Kontinuums angibt, wie an diesem Punkt Winkel, Längen und Uhrzeiten gemessen werden, – anders ausgedrückt, liefert eine Metrik an jedem Punkt des

Raumes eine Vorschrift, die einem sagt, auf welche Weise das Gesetz des Pythagoras an diesem Punkt der Raumzeit vom euklidischen Fall abweicht.

Um unter den vielen möglichen Metriken die physikalisch sinnvollen zu finden, braucht man für die Metrik eine Differentialgleichung, die zu der Gleichung für das Newtonsche Potential ($\Delta U = 0$) analog ist. In der allgemeinen Relativitätstheorie, im einfachsten Fall des Vakuums, ist die von Einstein vorgeschlagene Gleichung eine Mittelwerteigenschaft für die Krümmungen der Raum-Zeit-Metrik: So wie in der Newtonschen Theorie der Mittelwert der zweiten Ableitungen des Potentials U überall verschwindet, so muß bei Einstein der Mittelwert der Krümmungen der Metrik an jeder Stelle der Raumzeit Null sein.

Der Begriff der Krümmung für einen vierdimensionalen Raum ist kompliziert, läßt sich aber nach B. Riemann auf die ursprüngliche Formulierung von Gauß für zweidimensionale Flächen zurückführen. Man kann das im Sinne von Abweichungen der Winkelsumme im Dreieck formulieren: Gauß hat einen Krümmungsbegriff – Gaußsche Krümmung – für Metriken auf zweidimensionalen Flächen entwickelt, der mißt, wie sehr die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck auf der Fläche von 180 Grad abweicht. In einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum gibt es viele zweidimensionale Flächen mit zugehörigen Gaußschen Krümmungen, – hieraus kann für jede gegebene Richtung an einer Stelle der Raumzeit auf sinnvolle Weise der Mittelwert der Gaußschen Krümmungen in den (infinitesimalen) zweidimensionalen Flächen berechnet werden, die die gegebene Richtung an einer Stelle enthalten. Die Einsteinschen Gleichungen im Fall des Vakuums sagen gerade, daß alle diese Mittelwerte der Gaußschen Krümmungen für alle Richtungen an allen Stellen der Raumzeit gleich Null sind.

Wenn man bedenkt, daß die so definierte Krümmung einer Metrik durch einen Differentialoperator zweiter Ordnung beschrieben wird, dessen analytische Struktur der des Operators Δ in der Newtonschen Potentialgleichung ähnlich ist, so ergibt sich bereits hier eine enge strukturelle Verwandtschaft der beiden Gleichungen aus dem Sichtwinkel der Analysis. Die gravierenden Unterschiede der beiden Theorien haben ihren Ursprung vor allem darin, daß die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie nichtlinear sind und kein Superpositionsprinzip erlauben. Betrachtet man ein Testteilchen in solch einem Raum-Zeit-Vakuum mit einer Metrik, die die Einsteinschen Gleichungen für die Krümmung erfüllt, so lautet die Regel für das Teilchen nun, daß es sich auf Geodäten bewegen muß, das heißt auf Kurven extremaler Länge.

Hat man dieses Grundgerüst der allgemeinen Relativitätstheorie etabliert, so beginnen erst die konkreten Aufgaben: Es gibt eine Unzahl von Lösungen der Einsteinschen Gleichungen, das heißt von vierdimensionalen Geometrien mit der beschriebenen Mittelwerteigenschaft der Krümmung. Um ein konkretes Phänomen in der Natur zu beschreiben, müssen angemessene Lösungen ausgewählt werden, die etwas mit den Phänomenen zu tun haben. Wir betrachten daher nun das versprochene grundlegende Modell, also die Schwarzschildlösung der Einsteinschen Gleichungen, die Hauptgegenstand des Vortrags ist.

Die Schwarzschildlösung ist eigentlich ein vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum für die Beschreibung eines isolierten, statischen, rotationssymmetrischen schwarzen Loches; um die Darstellung aber so einfach wie möglich zu halten, werden wir die Zeitrichtung ignorieren und nur einen dreidimensionalen Schnitt durch diese vierdimensionale Raumzeit betrachten. Es handelt sich dann um einen unendlichen dreidimensionalen gekrümmten Raum, der in einem endlichen Bereich stark gekrümmt ist und asymptotisch in großer Entfernung wie der bekannte dreidimensionale euklidische Raum aussieht. Diesen speziellen Raum kann man ganz explizit mit einer Formel beschreiben: Wir lassen in dem dreidimensionalen Raum alle Winkel gleich und multiplizieren alle Abstände mit dem Faktor

$$(1 + M/2r)^2,$$

wobei die Radialkkoordinate $r>0$ wie bisher nach Pythagoras aus den alten kartesischen Koordinaten ausgerechnet wird. Man nennt die so entstandene neue Metrik wegen der Winkelerhaltung eine konforme Metrik, die sich nur in der Längenskala an jeder Stelle vom euklidischen Raum unterscheidet. Der Versuch, sich diesen Abstandsbegriff zu verbildlichen – natürlich kann man etwas Dreidimensionales nicht malen, aber durchaus versuchen, sich vorzustellen, was dieser Raum für eine Geometrie hat –, führt zu einem intuitiven Bild zweier übereinanderliegender, leicht gegeneinander gewölbter Ebenen, die an ihrem jeweiligen Ursprung durch einen „Trichter" oder „Schlund" miteinander verbunden sind. Wenn der Radius r nach unendlich geht, tendiert der Faktor gegen 1 und man erhält asymptotisch den üblichen euklidischen Raum auf der ersten der beiden Ebenen. Wenn der Radius r aber gegen 0 geht, dann ist $M/2r$ sehr groß und somit werden alle Abstände sehr groß, die vorher klein waren. Der ursprüngliche flache Raum in der Nähe des Ursprungs wird dadurch im Ursprung „aufgestochen" und aus der ersten Ebene „herausgestülpt" zu einer zweiten Ebene, die jenseits des entstandenen Trichters eine identischen Kopie der ersten Ebene ist.

Physikalisch interessant ist die obere Hälfte des so enstandenen gekrümmten Raumes, jenseits des engsten Querschnitts des „Trichters", der zweidimensionalen Sphäre gegeben durch den Koordinatenradius $r=M/2$. Es handelt sich um den dreidimensionalen räumlichen Querschnitt durch das mathematische Modell für ein statisches, rotationssymmetrisches schwarzes Loch der Masse M, mit seinem Horizont bei der zweidimensionalen Sphäre mit Radius $r=M/2$. In gewisser Weise ist es ein Wunder, daß es diese spezielle dreidimensionale Geometrie gibt, denn sie kann immens viele Dinge gleichzeitig leisten: Wenn man in der zugehörigen Raumzeit die Geodäten für ein Testteilchen berechnet, so erhält man asymptotisch im Bereich großer Abstände die Keplerbahnen um einen Zentralkörper der Masse M – und zusätzlich die Korrekturen, die man astronomisch beobachtet hat. Das bedeutet insbesondere, daß das Newtonsche Gesetz, das die Keplerbahnen ja impliziert, in unserem neuen geometrischen Modell mit enthalten ist. Man sieht an diesem Beispiel exemplarisch, daß es sich bei der allgemeinen Relativitätstheorie nicht um einen völligen Umsturz des alten Wissens, sondern um eine Erweiterung in neuer Formulierung handelt, in der die Erkenntnisse von Newton und Kepler eingebettet und in ihren Begrenzungen verstanden sind. Die historische Kontinuität der mathematischen Modelle für die Gravitation wird an diesem Beispiel auch noch in anderer, eher kurioser Weise deutlich, etwa wenn man sich klar macht, daß die beschriebene dreidimensionale Geometrie auch durch die Rotation eines zweidimensionalen Paraboloids um eine Achse des vierdimensionalen euklidischen Raumes erzeugt werden kann – also mit Hilfe eines Kegelschnittes, der schon Apollonius und Archimedes bekannt war.

Auch in der modernen konformen Geometrie spielt unser Modell eine ganz besondere Rolle, es ist ein fundamentales Beispiel der Theorie: Mit stereographischer Projektion bildet man unseren Raum ab auf die S^3, die dreidimensionale Sphäre – eines der Hauptbeispiele der dreidimensionalen Geometrie. Man kann sowohl in der Geometrie als auch in der Analysis auf verschiedenste Weise beschreiben, warum die S^3 und damit auch unsere Modellgeometrie eine Sonderrolle in der dreidimensionalen Geometrie spielt. Andererseits kann man in der allgemeinen Relativitätstheorie beweisen, daß die Schwarzschild-Metrik dort ein Grundmodell ist: Andere Modelle eines statischen, isolierten, gravitierenden Objektes müssen in einem präzisen quantitativen Sinne mehr Energie enthalten als die Schwarzschild-Metrik. Es ist also physikalisch gesehen ein Grundzustand der allgemeinen Relativitätstheorie, genauso wie es aus geometrischer Sicht einen Grundzustand darstellt. Aus ästhetischer Sicht ist das eine wunderschöne und faszinierende Korrespondenz. Daß es ein solches Objekt überhaupt gibt, das in der Geometrie, Analysis und in der Physik gleichzeitig diese überragende Rolle spielt, ist für mich bei allem technischen Verständnis dieser Tatsache immer wieder faszinierend.

Hiermit nicht genug, unser Modell stellt nicht einen Endpunkt der Theorie dar – man kann es erweitern: Es zeigt sich zum Beispiel, daß mit Hilfe dieses Modells nicht nur ein statisches schwarzes Loch richtig modelliert wird, sondern auch das Außengebiet eines statischen Sternes. Damit wird unsere Geometrie auch zum Startpunkt für das Studium zum Beispiel von Sternen mit verschiedenen Materiearten.

Schließlich stellte sich heraus, daß die Schwarzschildlösung nur die einfachste exakte Lösung der Einsteingleichung aus einer ganzen Familie solcher Lösungen ist. Es gibt die Kerrlösungen, die 50 Jahre später von R. Kerr gefunden wurden; sie können zusätzlich ein Drehmoment modellieren und somit rotierende schwarze Löcher. Aus physikalischer Sicht ist klar, daß man solche Modelle zur Verfügung haben möchte – schließlich sind praktisch alle Sterne oder schwarzen Löcher nicht statisch, sondern drehen sich. Aber es ist keineswegs selbstverständlich, daß in der Geometrie auch solche miteinander mathematisch und physikalisch konsistente Modelle mit den richtigen Eigenschaften zu finden sind! Kerrs Familie von Lösungen mit Drehmoment, mit genau der richtigen Anzahl freier Parameter, ist heute Grundlage nahezu aller Vorhersagen für das Verhalten rotierender schwarzer Löcher. Aus tiefliegenden geometrischen Eindeutigkeitssätzen folgt, daß es keine weiteren geometrischen Modelle mit den fraglichen Drehsymmetrien gibt, – mit anderen Worten, es gibt genau so viele geometrische Objekte mit den geforderten Eigenschaften, wie man in der Physik braucht.

Über die rotierenden Löcher oder Sterne hinaus, die ihre Gestalt nicht verändern, kann man das Schwarzschildmodell auch noch um Dynamik erweitern: Man kann etwa Objekte betrachten, die nicht ganz rotationssymmetrisch sind, man kann Binärsysteme betrachten oder zwei Objekte, die auf Kollisionskurs sind. Bei diesen Problemen, zu denen man keine exakten, durch Formeln gegebenen Lösungen erwarten kann, untersucht man zunächst Störungen der oben diskutierten exakten Modelle und versucht, das Stabilitätsverhalten von Lösungen der Einsteingleichungen zu verstehen. In vielen Fällen kann man bereits zeigen, daß dann die Lösungen der Einsteingleichungen Eigenschaften haben, die sowohl mit den mathematischen Eigenschaften statischer schwarzer Löcher als auch mit den Erwartungen der Physik übereinstimmen. Insbesondere sagen solche Untersuchungen die Existenz und die Eigenschaften von Gravitationswellen voraus, die man zur Zeit fieberhaft experimentell zu beobachten sucht. Die direkte Beobachtung von Gravitationswellen, deren Form zunächst auf der Basis von Störungen der Schwarzschild- und Kerrlösungen vorhergesagt wurde, wäre ein weiterer Erfolg dieser geometrischen Modelle, der – wie die Vorhersage schwarzer Löcher vor mehr als 50 Jahren – weit über die Newtonsche Theorie hinausgeht.

Zusammenfassend bleibt festzuhalten:

Die Schwarzschildlösung hat als Modell mehrere grundlegende Eigenschaften, die es zu einem besonders erfolgreichen Beispiel der Mathematisierung der Natur machen:

- Die Keplerschen Gesetze der älteren Newtonschen Theorie werden als Grenzfall vom Modell erfaßt, Abweichungen davon werden quantitativ genau vorhergesagt.
- Das Modell ist erweiterbar auf rotierende schwarze Löcher und andere physikalische Phänomene, mit genau der richtigen Anzahl freier Parameter.
- Die Eigenschaften des Modells sind stabil unter kleinen Störungen und erlauben eine Erweiterung auf dynamische Fragestellungen.
- Das Modell stellt eine tiefe Beziehung her zu grundlegenden geometrischen Konzepten von Raum und Zeit und bildet eine Schnittstelle zwischen grundlegenden Objekten der Geometrie, Analysis und der Physik.

Zum Schluß eine etwas provozierende These: Die Geometrie der Schwarzschildlösung als ein Modell für schwarze Löcher wird für immer in unserem Wissen verankert bleiben, solange wir über Geometrie und Gravitationsphänomene nachdenken – genauso wie die Kegelschnitte des Apollonius, die Keplerbahnen und das Newton-Potential. Auch in neuen, fortgeschrittenen Modellen der Gravitation wird die Schwarzschildgeometrie ihren Platz finden, so wie die Keplerbahnen ihren Platz in der allgemeinen Relativitätstheorie haben: Es handelt sich um Wissen, das nicht mehr verlorengeht.

Gerd Gigerenzer

Einfache Heuristiken für komplexe Entscheidungen

Meine Damen und Herren, wie treffen Sie Entscheidungen? Wenn Sie ein Lehrbuch über rationales Urteilen, Denken oder Verhalten öffnen, werden Sie wahrscheinlich folgendes lesen: Gute Entscheidungen folgen den Regeln der Logik, den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie oder der Maximierung des erwarteten Nutzens. Wenn Ihr Denken davon abweicht, stehen Sie im Verdacht, irrational zu urteilen. Diese und verwandte Ideale prägen das Bild vom vernünftigen Menschen in Bereichen der Ökonomie, Philosophie, Risikoforschung, kognitiven Psychologie, Politikwissenschaft – bis hin zu utilitaristischen Moraltheorien.

Wirkliche Menschen scheinen nicht diesen idealen Bildern zu gleichen, in denen man von möglichst vollständigem Wissen, perfektem Gedächtnis und rechnerischen Fähigkeiten ausgeht. Nebenbei bemerkt, selbst unsere heutigen Computer können diesem Anspruch nicht immer gerecht werden. Menschen folgen oft Gewohnheiten, Daumenregeln oder verlassen sich auf das Urteil anderer.

Nun, wie treffen Sie Entscheidungen? Sehen Sie sich jede Alternative genau an, denken Sie über alle möglichen Konsequenzen nach und schätzen Sie deren Wahrscheinlichkeiten und Nutzen sorgfältig ab? Beispielsweise haben Ökonomen bemängelt, daß viele von uns bei besonders wichtigen Entscheidungen – wie einen Ehepartner zu finden – nach besonders wenig Information suchen. Nach den vorliegenden Statistiken haben etwa 75 % aller heute 50- bis 60jährigen Amerikaner die erste (!) Frau ihres Lebens geheiratet. Bei den 40- bis 50jährigen sind es immer noch 50 % und bei den 30- bis 40jährigen 33 %. Wäre es denn rational, mehr potentielle Partner zu testen? So viele wie möglich? Der Astronom Johannes Kepler – so wird berichtet – soll rational in diesem Sinne vorgegangen sein, als er nach einer unglücklichen ersten Ehe eine zweite Frau suchte. Er hat sich ein bis zwei Jahre Zeit genommen, um etwa ein Dutzend Frauen genauer zu studieren. Freunde haben ihm geraten, Nummer vier zu heiraten, aber er folgte dem Rat nicht, da er der Ansicht war, mehr Informationen zu benötigen. Die Legende sagt, daß der rationale Umgang Keplers mit zwischenmenschlichen Beziehungen von dieser Dame als unwürdig und verletzend empfunden wurde und sie sich daher aus seinem „choice set“ verabschiedet habe. Trotzdem scheint Kepler eine glückliche zweite Ehe geführt zu haben. Der Punkt ist: Was als rationales Verhalten erscheint – mehr ist immer besser –, kann mit moralischen Werten unverträglich sein.

Für das andere Extrem steht die frühere Präsidentengattin Barbara Bush. Sie erklärte einmal: „I married the first man I ever kissed". Ist weniger Suche, weniger Information besser, und falls ja, in welchen Situationen? Ist der deutsche Wald von Steuergesetzen besser als ein einfaches, transparentes System, wie bis heute vergeblich vorgeschlagen? Hier könnte durch Einfachheit Transparenz erzeugt werden und damit wiederum das Vertrauen der Bürger. Sollte man auf komplexe Probleme besser mit komplexen Lösungsversuchen reagieren, oder sind einfache genauso gut, und können diese auch besser sein? Diese Fragen sind Teil der Forschung zur „begrenzten Rationalität". Ich werde heute anhand von Beispielen in diese Forschung einführen, wobei ich mich auf einfache Heuristiken beschränke. Diese Forschung entwickelt die Arbeiten der beiden Nobelpreisträger Herbert A. Simon und Reinhard Selten weiter und kann in mehr formaler Fassung und Detail bei Gigerenzer und Selten[1] nachgelesen werden. Heute kann ich Ihnen nur eine kleine Einführung in Form von zwei Thesen geben.

Einfache Heuristiken

Die erste These lautet: *Einfache Heuristiken können Probleme oft schneller und besser lösen als komplexe Strategien.*

Beginnen wir mit Sport. Wie fängt man einen Ball? Einen Ball, der hoch hereinkommt – wie einen „flyball" im Baseball oder Kricket. Wie machen Sie das? Wenn man Spieler befragt, können diese es meist nicht erklären und antworten, sie tun dies intuitiv und ohne nachzudenken. Aber wie? In seinem Buch „The Selfish Gene" gibt Richard Dawkins eine Antwort[2]:

> When a man throws a ball high in the air and catches it again, he behaves as if he had solved a set of differential equations. In predicting the trajectory of the ball, at some subconscious level something functionally equivalent to the mathematical calculation is going on.

---

1 Vgl. Gigerenzer, G. & R. Selten: Bounded Rationality: The Adaptive Toolbox, Cambridge MA 2001; Gigerenzer, G. et al.: Simple heuristics that make us smart, New York 1999.

2 Dawkins, R.: The Selfish Gene, Oxford 1976, S. 96.

Dawkins führt dies als ein Beispiel für ein so genanntes 'Als-Ob-Modell' ('as-if-model') an. Ein solches Modell hat nicht den Anspruch, den Prozeß der Problemlösung zu modellieren, sondern nur das resultierende Verhalten. Der Spieler verhält sich so, als ob er die Flugbahn berechnen würde. Wir haben viele Als-Ob-Theorien in den Sozialwissenschaften und als Konsequenz in diesen Fällen relativ wenig Interesse an den psychologischen Prozessen. Mich interessiert, was diese kognitiven, motorischen oder sozialen Prozesse sind. Wie fängt man einen Ball? Eine Reihe von experimentellen Studien weist darauf hin, daß Menschen die Flugbahn nicht berechnen, weder bewußt noch unbewußt. Das technische Problem dabei ist nicht nur die Berechnung der komplexen Bahn, sondern zuallererst die Schätzung der relevanten Variablen in der Kürze der Zeit. Theoretisch hat die Flugbahn die Form einer Parabel. Um diese Parabel zu berechnen, müßten Sie die ursprüngliche Distanz zu dem Punkt, von dem aus der Ball geschossen oder geworfen worden ist, schätzen, dann den ursprünglichen Winkel und die ursprüngliche Geschwindigkeit. Aber in der wirklichen Welt folgt die Flugbahn nicht einer Parabel. Da gibt es Luftwiderstand und Wind. Also müßten Sie sensorische Instrumente haben, welche die Richtung des Windes und die Geschwindigkeit zu jedem Punkt der Flugbahn abschätzen. Das reicht aber auch noch nicht, denn es gibt Spin und andere Variablen, welche die Bahn beeinflussen. Kurz, wir kennen keine Intelligenz – natürlich oder künstlich –, welche die Flugbahn so schnell berechnen kann, daß Zeit zum Handeln bleibt. Nochmals: Was machen Menschen, wenn sie solche Berechnungen nicht durchführen können?

Gibt es eine einfache Heuristik, die das Problem löst? Eine Heuristik ist eine Strategie, welche mit nur wenig Information arbeitet und den Rest ignoriert. Eine Möglichkeit, Heuristiken zu entdecken, besteht darin, erfahrene Spieler zu beobachten. Experimentelle Studien haben gezeigt, daß Spieler eine Reihe solcher Heuristiken anwenden. Hier ist die einfachste, die aber nur funktioniert, wenn der Ball bereits hoch in der Luft ist, die 'Blickheuristik':

Fixiere den Ball, beginne zu laufen und passe die Laufgeschwindigkeit so an, daß der Blickwinkel konstant bleibt.

Der Blickwinkel ist der Winkel zwischen Auge und Ball im Verhältnis zum Boden. Ein Spieler, der diese Heuristik nutzt, braucht weder Wind, Luftwiderstand und Spin noch die anderen Größen zu messen. Er kann alle kausalen Variablen ignorieren, die man zur Berechnung der Flugbahn bräuchte. Alles was notwendig ist, ist in einer einzigen Variablen enthalten: dem Blickwinkel. Beachten Sie, daß ein Spieler den Punkt, an dem der

Ball landen wird, mit dieser Heuristik nicht berechnen kann. Aber sie wird ihn dorthin bringen, wo der Ball landet.

Die Blickheuristik ist eine schnelle und sparsame Heuristik („fast and frugal heuristic"[3]). Sie ist schnell, weil sie das Problem innerhalb weniger Sekunden lösen kann, und sie ist sparsam, weil sie mit minimaler Information auskommt. Sie illustriert, wie das Gehirn ein komplexes Problem mit einer einfachen Strategie zu lösen versucht statt mit einer komplexen Flugbahn-Berechnung.

Eine Heuristik kann man als Regel formulieren, die folgende drei Eigenschaften aufweist. Die ersten beiden erklären, warum und wann einfache Strategien erfolgreich sind:

1. *Heuristiken nutzen erworbene Fähigkeiten*. Eine Heuristik ist *einfach*, weil sie die im Laufe der Evolution erworbenen und individuell erlernten Fähigkeiten eines Organismus einsetzt. So ist es für Menschen einfach, mit den Augen Objekte zu verfolgen, die sich vor einem diffusen Hintergrund bewegen; dazu sind bereits wenige Monate alte Babys in der Lage.[4] Roboter haben dagegen Mühe, Objekte in Bewegung zu verfolgen. Bis heute gibt es kein Computerprogramm, das dieses Problem genauso gut wie das menschliche Gehirn bewältigen kann. Ebenso können Menschen – im Unterschied zu Robotern – laufen. Diese komplexen Fähigkeiten, die weitgehend automatisch ablaufen, machen die Blickheuristik für Menschen einfach; ihre Abwesenheit impliziert, daß dies nicht für heutige Roboter gilt. Heuristiken nutzen also intuitive oder erlernte kognitive bzw. motorische Prozesse. Die mathematische Berechnung der Flugbahn dagegen ignoriert diese Fähigkeiten – wie auch die klassische Entscheidungstheorie –, was alternative und schnellere Lösungen nicht sichtbar werden läßt.

2. *Heuristiken nutzen Umweltstrukturen*. Die Rationalität von Heuristiken ist nicht logisch, sondern ökologisch. Ökologische Rationalität impliziert, daß eine Heuristik nicht an sich gut oder schlecht, rational oder irrational ist, sondern nur in bezug auf eine bestimmte Umwelt. Sie kann sich bestimmte Strukturen einer Umwelt zunutze machen oder eine Umwelt verändern. So transformiert die Blickheuristik etwa die komplexe Flugbahn, die der Ball in der Umwelt beschreibt, in eine gerade Linie. Alle Heuristiken sind zu einem gewissen Grad bereichsspezifisch; sie sind darauf ausgerichtet, eine spezifische Klasse von Problemen zu lösen. Die Blickheuristik kann Probleme lösen, die mit der Kollision

---

[3] Gigerenzer, G.: Fast and frugal heuristics: The tools of bonded rationality. In: Koehler, D. J. & N. Harvey (Hg.), Blackwell handbook of judgement and decision making, Oxford UK: Blackwell, 2004, S. 62–88, hier S. 63.

[4] Vgl. Rosander, K. & C. von Hofsten: Development of gaze tracking of small and large objects. In: Experimental Brain Research 146 (2002), S. 157–264.

von sich bewegenden Objekten zu tun haben. Wenn Sie Flugstunden nehmen, werden Sie eine Variante der Blickheuristik kennenlernen: Nähert sich ein anderes Flugzeug und fürchten Sie einen Zusammenstoß, so schauen Sie auf einen Kratzer in Ihrer Windschutzscheibe und kontrollieren, ob das andere Flugzeug sich relativ zu diesem Kratzer bewegt. Ist das nicht der Fall, dann nichts wie abtauchen! Das Ziel des Piloten ist es, eine Kollision zu vermeiden, während der Baseballspieler ein Zusammentreffen herbeiführen will. Aber die Natur der Heuristik ist die gleiche. Kurz: Im Lauf der Evolution entstandene und individuell gelernte Fähigkeiten machen eine Heuristik einfach, Umweltstrukturen können sie intelligent machen. Eine Heuristik ist also sowohl im menschlichen Gehirn als auch in der Umwelt verankert.

3. *Heuristiken können anderes Verhalten vorhersagen als 'Als-Ob-Modelle'*. Die Blickheuristik veranschaulicht, daß sich die Logik einer Heuristik in erstaunlichem Maße von Als-Ob-Modellen unterscheiden kann. Das bietet einen Vorteil. Mit einem guten heuristischen Modell kann man Vorhersagen ableiten, die Als-Ob nicht gestattet. Beispielsweise müßte man annehmen, daß Personen, die sich so verhalten, als ob sie die Flugbahn berechneten, so schnell wie möglich zu dem Punkt laufen würden, wo der Ball aufschlagen wird, um gegebenenfalls die Position noch etwas zu korrigieren. Die Blickheuristik sagt dagegen voraus, daß die Spieler den Ball im Laufen fangen. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß sie sich bewegen müssen, um den Blickwinkel konstant zu halten. Darüber hinaus diktiert die Heuristik die Geschwindigkeit, mit der ein Spieler läuft, sowie den Wechsel der Geschwindigkeit. Aus verwandten Heuristiken kann man Situationen voraussagen, in denen ein Spieler einen leichten Bogen laufen wird, wie man es auch tatsächlich bei Baseballspielern beobachten kann. Das gleiche Phänomen kann man auch bei Hunden, die einen Frisbee fangen, beobachten.[5]

Eine gesunde Portion Ignoranz kann nützlich sein

Hier nun meine zweite These: *Ignoranz kann nützlich sein*.

Genau genommen spreche ich, wie wir sehen werden, von *partieller* Ignoranz. Theorien der Rationalität halten wenig von Ignoranz. Man unterstellt, je mehr Wissen, desto besser, oder zumindest: mehr Wissen kann nicht schaden, wenn es nichts kostet. Wirkliche

[5] Vgl. Shaffer, D. M. & M. K. McBeath: Baseball outfielders maintain a linear optical trajectory when tracking uncatchable fly balls. In: Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance 28 (2002), S. 335–348.

Menschen sind dagegen ständig mit ihrer partiellen Ignoranz konfrontiert, und wir untersuchen, wie Menschen aus dieser Ignoranz nützliche Information extrahieren.

Stellen Sie sich vor, Sie wären Kandidat in einer Fernsehshow und stünden vor der 1.000.000-Euro-Frage:

Welche Stadt hat mehr Einwohner: San Diego oder San Antonio?

Was antworten Sie? Wenn Sie Amerikaner sind, haben Sie gute Chancen, die richtige Antwort – San Diego – zu geben. Daniel Goldstein und ich befragten Studierende an der University of Chicago, und etwa zwei Drittel von ihnen gaben die richtige Antwort.[6] Wenn Sie aber Deutscher sind, scheinen Ihre Chancen schlecht, denn die meisten Deutschen wissen wenig über San Diego, und von San Antonio haben viele noch nie gehört. Welcher Prozentsatz der Deutschen, die wir befragten, beantwortete die Frage richtig? 100 % – obwohl sie so wenig wußten. Wie kann dies sein? Die Antwort ist, daß die Deutschen eine schnelle Heuristik, die Rekognitionsheuristik benutzten: Wenn man von einer Stadt gehört hat, von der anderen aber nicht, dann wird die erste Stadt wahrscheinlich die größere Einwohnerzahl haben.

Beachten Sie, daß die amerikanischen Studenten diese Heuristik *nicht* anwenden konnten, da sie beide Städte kannten. Sie wußten zu viel. Man braucht partielle Ignoranz, um die Rekognitionsheuristik anwenden zu können. Wie alle Heuristiken ist sie nicht in allen Situationen nützlich; sie ist es dann, wenn eine starke Korrelation zwischen Wiedererkennen und Kriterium besteht. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß diese Korrelation positiv ist. Für Probleme, bei denen man zwischen zwei Alternativen wählen kann (Paarvergleiche), läßt sich die Rekognitionsheuristik folgendermaßen formulieren:

Wenn der Name eines von zwei Objekten erkannt wird, der andere aber nicht, dann schließe daraus, daß das erste Objekt den höheren Wert im Kriterium hat.

In Wettbewerbssituationen kann Namenserkennung erfolgreich sein. Wenn Sie die Wahl zwischen der University of Michigan und der University of West Alabama haben, dann wissen Sie, wohin Sie gehen. Der Umstand, daß viele Menschen jene Produkte lieber kaufen, deren Namen sie kennen, wird von der Werbeindustrie aufgegriffen, und es gibt Werbung, die Ihnen keine Information über das Produkt gibt, sondern nur darum bemüht ist, den Namen des Produkts tief im Gedächtnis der Bevölkerung zu verankern.

[6] Vgl. Goldstein, D. G. & G. Gigerenzer: Models of ecological rationality: The recognition heuristic. In: Psychological Review 109 (2002), S. 75–90.

Eine Reihe von Studien haben die Bedingungen untersucht, unter denen partielle Ignoranz, kombiniert mit der Rekognitionsheuristik, mit dem besten Expertenwissen konkurrieren kann. Bei der Vorhersage der Ergebnisse der Herren-Einzelspiele in Wimbledon 2003 erreichten die Ranglisten der Association of Tennis Professionals (ATP) und jene der Wimbledon-Experten bis zu 69 % korrekte Vorhersagen. Deutsche Amateur-Tennisspieler, die von vielen der Teilnehmer noch nie gehört hatten, konnten mit Hilfe der Rekognitionsheuristik jedoch bis zu 72 % korrekte Vorhersagen machen.[7] In einer anderen Studie wurden Laien in Deutschland und den USA danach befragt, von welchen von insgesamt 798 Aktien sie schon einmal gehört hatten. Die Aktien mit der höchsten Namenserkennung durch partiell ignorante Laien schnitten genauso gut und besser ab als der Markt (Dow und Dax), zufällig gewählte Aktien und Blue-Chip Fonds.[8]

Die Bedingungen, unter denen die Rekognitionsheuristik zu richtigen Entscheidungen führt und zu welchem Anteil, sind zum Teil bekannt und formalisiert.[9]

Weniger kann mehr sein

Damit beende ich meine kurze, illustrative Einführung in die Forschung zu einfachen, schnellen Heuristiken. Diese Forschung beschäftigt sich mit drei Fragen: Die erste ist deskriptiv und versucht, die Heuristiken, welche Menschen verwenden, durch Modelle wie die Rekognitionsheuristik abzubilden. Ihr Ziel ist, den Inhalt und die Entwicklung der 'adaptive toolbox' zu dokumentieren. Die zweite Frage ist normativ: In welchen Umweltstrukturen wird eine bestimmte Heuristik erfolgreich sein? Dies ist die Frage nach der 'ecological rationality' einer Heuristik. Rationalität wird nicht logisch (durch interne Regeln der Konsistenz), sondern als eine Adaptation von Heuristik und Umwelt verstanden, also eine zweistellige, interne-externe Relation. Die dritte Fragestellung betrifft die Anwendung

---

7 Vgl. Serwe, S. & C. Frings: Wer gewinnt Wimbledon 2003? Ein Test der ökologischen Rationalität der recognition heuristic. Poster auf der 46. Tagung der experimentell arbeitenden Psychologen, Gießen, 5.–7. April 2004.

8 Vgl. Borges, B., Goldstein, D. G., Ortmann, A. & G. Gigerenzer: Can ignorance beat the stock market? In: Gigerenzer, G., Todd, P. M. & the ABC Research Group (Hg.), Simple heuristics that make us smart, New York: Oxford University Press 1999, S. 59–72.

9 Vgl. Goldstein, D. G. & G. Gigerenzer: Models of ecological rationality: The recognition heuristic. In: Psychological Review 109 (2002), S. 75–90.

dieser Erkenntnisse zur Entwicklung von „künstlichen Systemen“ wie etwa Diagnosesystemen im medizinischen Bereich. Einfache Heuristiken haben gegenüber klassischen Expertensystemen den Vorteil der Transparenz, Robustheit und höheren Akzeptanz durch Ärzte und andere Experten.[10]

[10] Vgl. Elwyn, G. J. et al.: Decision analysis in patient care. In: The Lancet 358 (2001), S. 571–574; Green, L. A. & D. R. Mehr: What alters physicians’ decisions to admit to the coronary care unit? In: The Journal of Family Practice 45 (1997), S. 219–226.

Manfred Bierwisch

Linguistik und die Möglichkeit der Mathematisierung des Geistes

1 Geist als Aspekt der Natur

Das Rahmenthema „Mathematisierung der Natur" betrifft die Geisteswissenschaften selbstverständlich nur, wenn und insoweit der Geist als etwas angesehen wird, das der Natur angehört. Das will ich hier voraussetzen.

Natürlich hätte man über Geist und Mathematik auch dann zu reden, wenn der Geist gerade nicht als Teil der Natur, sondern als der separate Bereich der *res cogitans* anzusehen wäre, der im Sinn der Cartesianer der *res extensa* gegenübersteht. Denn die Mathematik ist in jedem Fall eine Sache des Geistes. Dann ginge es allerdings nicht um die Mathematisierung des Geistes, sondern um Geist als Mathematik oder Mathematik als Form des Geistes. Das ist zweifellos ein faszinierendes Thema, das aber gerade nicht die Frage betrifft, ob und in welchem Sinn die Mathematik der Natur – unter Einschluß des Geistes – inhärent ist oder auf sie projiziert wird.

Direkter hat mit unserem Thema eine Bemerkung von Nils Bohr über das Verhältnis von Physik und Linguistik zu tun, die Roman Jakobson kolportiert: Die Linguisten haben es gut, meint Niels Bohr, weil ihr Gegenstand von Hause aus diskret und abstrakt ist, während die Physiker ihre Gegenstände erst abstrakt und diskret machen müssen.

Auch mit der Voraussetzung, daß der Geist zur Natur gehört, fragt sich aber, ob Mathematisierung, wenn man sie nicht als bloß methodisches Instrumentarium auffaßt, sondern als Zugang zur Struktur der Sache, in den Geisteswissenschaften wirklich etwas zu suchen hat.

Daß und in welcher Weise diese Frage zu bejahen ist, soll hier vor allem am Beispiel der Sprache erörtert werden. Dabei darf es als ein von alters her gegebener Konsens gelten, daß die Sprache nicht nur ein zufälliger, womöglich epiphänomenaler Sonderbereich des Geistes ist, der allenfalls günstig für die Argumentation erscheint, sondern eine zentrale und konstitutive Rolle für weite Bereiche des Geistigen spielt – selbst dann, wenn man die Sprache nicht als *conditio sine qua non* des Geistes ansieht und eine nonverbale Intelligenz für denkbar hält.

Als erster, notwendiger Schritt zur Charakterisierung des damit angedeuteten Bereichs der Natur ist zunächst die Feststellung zu machen, daß eine natürliche Sprache wie das Französische oder Japanische ein Kenntnissystem ist, das jeweils bestimmten Signalen festgelegte Bedeutungen zuordnet. Diese Zuordnung hat mehrere Schritte oder Ebenen, die sich in erster Näherung so schematisieren lassen:

(1) $$\text{Signal} \quad <=====> \quad \underbrace{\underbrace{\text{AS} \longleftrightarrow \text{BS}}_{\text{Sprache}}}_{\text{Mentale Systeme}} \quad <=====> \quad \text{Umwelt}$$

Signale sind bei gesprochener Sprache akustische Ereignisse eines bestimmten Frequenzbereichs, mit Umwelt ist der gesamte äußere und innere Erfahrungsbereich gemeint, über den in einer natürlichen Sprache geredet werden kann. Signale werden vom Sprecher erzeugt und vom Hörer identifiziert durch das artikulatorisch-auditive System AS, die Verarbeitung und Beeinflussung der Umwelt leistet das begrifflich-intentionale System BS. Sowohl AS wie BS sind in Wahrheit Komplexe von interagierenden mentalen Systemen oder Modulen, die die verschiedenen Sinnesmodalitäten und Verhaltensbereiche kontrollieren. Die Sprache stellt nun zwischen diesen beiden Komplexen, genauer, zwischen den durch sie ermöglichten internen Repräsentationen eine systematische Beziehung her. Das heißt, die Kenntnis einer Sprache S determiniert Ausdrücke (α, β) mit α aus AS und β aus BS, vereinfacht: Paare aus Laut und Bedeutung.

Dieses Grundschema ist durch zwei Feststellungen zu ergänzen:

Erstens ist festzustellen, daß AS und BS Repräsentationssysteme mit essentiell verschiedenen formalen Eigenschaften sind. Repräsentationen von AS sind primär linear entsprechend der Zeitachse organisiert, eine Bedingung, die auch in allen optischen Realisierungen natürlicher Sprachen (Schriftsysteme, Gebärdensprache) eingehalten wird und die vermutlich zu den Grundbedingungen der menschlichen Sprachfähigkeit gehört. Repräsentationen in BS sind dagegen auf keine bestimmte Dimensionalität festgelegt, die Repräsentationen sind hierarchisch und nicht linear organisiert. Das heißt, daß die Ausdrücke (α, β) nicht auf Analogie oder Ähnlichkeit zwischen α und β beruhen können. Die Ausdrücke natürlicher Sprachen sind daher notwendigerweise symbolischer, nicht ikonischer Natur.

Zweitens besteht ein entscheidendes Charakteristikum der natürlichen Sprache des Menschen darin, daß diese Zuordnung – im Unterschied zu allen anderen Signal- oder

Zeichensystemen – für eine offene, potentiell unendliche Menge von Paaren aus Laut und Bedeutung gilt. Das ist die Basis dafür, daß jede natürliche Sprache S im Prinzip vollständig ist in folgendem Sinn:

(2) Wenn β und β' voneinander verschiedene Repräsentationen in BS sind und in S gibt es einen Ausdruck (α, β) mit einer Repräsentation α in AS, dann gibt es in S auch einen Ausdruck (α', β'), wobei α' verschieden ist von α.

Mit anderen Worten, es können alle konzeptuell möglichen Unterschiede sprachlich wiedergegeben werden. Damit kann S keine abgeschlossene, endliche Menge von Ausdrücken sein, sondern muß die Zuordnung von AS und BS über einen offenen, potentiell unendlichen Bereich bestimmen. Das heißt aber, daß natürliche Sprachen Erzeugungssysteme sein müssen, die über ein generatives Verfahren verfügen, das neue Ausdrücke kombinatorisch zu berechnen gestattet.

Aus diesen beiden Gegebenheiten – der Strukturverschiedenheit von Laut und Bedeutung und der kombinatorischen Struktur der Ausdrücke – läßt sich der oben erwähnte diskrete Charakter der Sprache im strikten Sinne ableiten: Die systematische Kombination von symbolischen Einheiten, deren Laut- und Bedeutungseigenschaften sich aus denen ihrer Teile ergeben müssen, ist nur möglich, wenn sie auf Grundeinheiten mit diskretem Charakter beruhen, die algebraischen Operationen zugänglich sind.

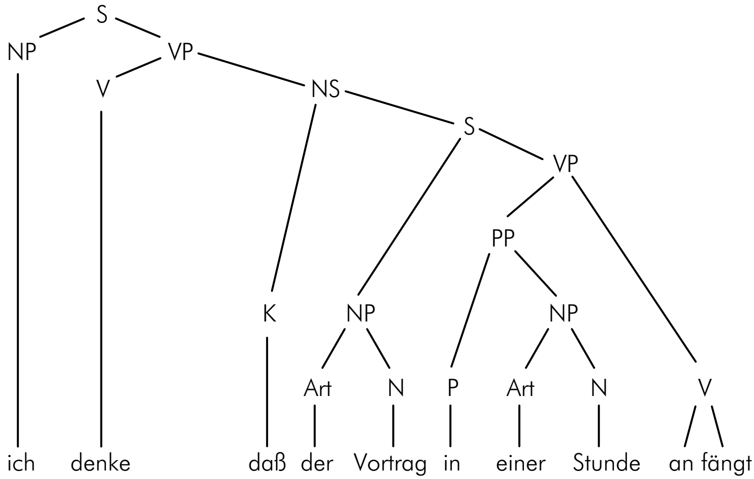
Überdies sind offensichtlich die Signaleigenschaften weitgehend und die begrifflich zu repräsentierenden Umweltgegebenheiten in unbestimmtem Maße kontinuierlicher und nicht diskreter Natur. Folglich müssen die Repräsentationen, auf die sich die Sprache und ihre Kombinatorik beziehen, abstraktere Strukturen sein, Schnittstellen, die die Signal- und Begriffsstrukturen der sprachlichen Berechnungsstruktur anpassen. Wenn man diese Verarbeitungsstufe mit AF für das System der Artikulatorischen Form und SF für die Semantische Form der Bedeutungen abkürzt, dann ist das Schema (1) so zu ergänzen:

(3) $$\text{Signal} \quad \text{<====>} \quad \underbrace{\underbrace{\text{AS} \Leftrightarrow \text{AF} \longleftrightarrow \text{SF} \Leftrightarrow \text{BS}}_{\text{Sprache}}}_{\text{Mentale Systeme}} \quad \text{<====>} \quad \text{Umwelt}$$

Die Laut-Bedeutungs-Paare sind damit Einheiten der Schnittstellensysteme AF und SF, die die Abstraktion von den kontinuierlichen Signal- und Umweltbedingungen voraussetzen.

Auf diesem Hintergrund ist nach den Eigenschaften der Algebra zu fragen, auf der die Symbolkombinatorik beruht. Grundbedingung ist die Möglichkeit rekursiver Operationen, die hierarchische Strukturen folgender Art ermöglichen:

(4)



Die grammatischen Kategorien – abgekürzt durch S (für Satz), V (für Verb) etc. – repräsentieren kombinatorische Bedingungen, die hier nicht betrachtet werden müssen. Entscheidend ist, daß Strukturen dieses Typs mindestens die Eigenschaften von Kellerautomaten oder äquivalenten Systemen aufweisen müssen. Systeme dieser Art sind im Rahmen der mathematischen Linguistik ausführlich untersucht worden. Einen repräsentativen Überblick gibt Chomsky.[1] Zwei Bedingungen sind in bezug auf die oben skizzierte Grundstruktur natürlicher Sprachen wesentlich: Systeme dieser Art sind rekursiv, erzeugen potentiell unbegrenzte Mengen von Ausdrücken und determinieren Abhängigkeiten, die lineare zu hierarchischen Strukturen in Beziehung setzen können, wie es das vereinfachte Beispiel (4) andeutet.

Über die lineare Struktur mit hierarchischen Abhängigkeiten hinaus weisen die Ausdrücke natürlicher Sprachen aber elementare Eigenschaften auf, die in diesem Rahmen

---

1 Vgl. Chomsky, N.: Formal Properties of Grammars. In: Luce, R. D., Bush, R. R. & E. Galanter (eds.), Handbook of Mathematical Psychology, Vol. II, New York: Willey and Sons, 1963, S. 323–418.

nicht zu erfassen sind. Am Beispiel (4) läßt sich das zeigen, indem man die Konjunktion *daß* wegläßt, die den Nebensatzcharakter des untergeordneten Satzes bedingt. Der Satz (4), in dem die durch den Kellerautomaten definierte Hierarchie durch Klammerungen anstelle der Baumstruktur angegeben ist, verändert sich dann wie folgt:

(5) [Ich denke [daß [[der Vortrag] [[in [einer Stunde]] [an fängt]]]]]
(6) [Ich denke [ø [[der Vortrag] [fängt [in [einer Stunde]] [an]]]]]

Die Lücke, die die weggelassene Konjunktion hinterläßt, ist durch ø angedeutet. Der dadurch entstehende untergeordnete Hauptsatz verlangt nun eine für das Deutsche charakteristische Umstellung des Verbs, genauer, des finiten Teils. Dadurch wird das Verb *anfängt* aufgespalten in die grammatisch separat funktionierenden Teile *an* und *fängt*, die aber nur zusammen die Bedeutung von *beginnt* haben. Der Verbstamm *fängt* wird gewissermaßen an zwei Positionen wirksam, die in (6) miteinander verbunden sind. Solche Umstellungen sind eine typische Struktureigenschaft natürlicher Sprachen, im Beispiel (7b) treten zwei solcher 'Versetzungen' in einem einfachen Satz auf, wie man im Vergleich zu (7a) sieht:

(7) (a) [wenn [ihr [ihn [einstellt]]]]
(b) [wen [stellt [ihr [[ein]]]]]

Die Eigenschaften solcher Konstruktionen beruhen auf Transformationsoperationen, für die Chomsky einen systematischen Rahmen entwickelt hat.[2] Ihre formalen Eigenschaften führen über die Kapazität von Kellerautomaten wesentlich hinaus, sie entsprechen universellen Turing-Maschinen und ihren Äquivalenten. Die damit verbundene Frage ist nun, welche formale Kapazität mindestens und höchstens notwendig ist, um die Berechnungsstruktur natürlicher Sprachen zu erfassen, mit anderen Worten die Frage, welche Art algebraischer Kapazität Basis der menschlichen Sprachfähigkeit ist.

2 Vgl. Chomsky, N.: The Logical Structure of Linguistic Theory, New York: Plenum Press, 1975.

4 Lernbarkeit

Diese Frage ist aus verschiedenen Gründen von Interesse. Zentral ist das Problem der formalen Bedingungen des Spracherwerbs, das heißt der Ausbildung eines Kenntnissystems mit den oben schematisierten Eigenschaften auf der Basis begrenzter und unvollständiger Eingabeinformationen. Schematisch geht es dabei um folgenden Zusammenhang:

(8) Daten ====> LAD ====> Sprache

Mit LAD (Language Acquisition Device) ist dabei der systeminterne, biologisch fixierte Verarbeitungsmechanismus abgekürzt, aufgrund dessen jedes normale Individuum der Spezies in einem begrenzten Zeitraum aufgrund mehr oder weniger zufälliger Daten seine Muttersprache erwirbt. Das Problem des Spracherwerbs kann dann so formuliert werden:

(9) Welche formalen Charakteristika muß LAD aufweisen, um aufgrund einer Menge D von Daten das D zugrundeliegende Erzeugungssystem S zu identifizieren, wobei reale Bedingungen für die in D verfügbaren Informationen gelten sollen?

Formal läuft diese Frage auf Probleme der Lernbarkeitstheorie hinaus, die die Möglichkeit der Systemidentifizierung bei jeweils gegebenen Eingabeinformationen untersucht. Dieses Problem kann eingegrenzt werden, einerseits in bezug auf die Eigenschaften, die LAD für die Klasse möglicher Sprachsysteme zuläßt, und andererseits hinsichtlich der Eigenschaften, die in D gegeben sein müssen. Dabei gilt offensichtlich: Je stärker beschränkt die Klasse möglicher Sprachen ist, desto eher ist bei gegebenem Input D die Identifizierung von S, also der Erwerb der zu D gehörenden Sprache, möglich. Das sogenannte logische Problem des Spracherwerbs, das mit der Frage (9) formuliert ist, betrifft also sowohl die formalen Eigenschaften sprachlicher Erzeugungssysteme als auch die Klärung der empirischen Gegebenheiten, denen normale Eingabeinformationen unterliegen. Einen Überblick über die beiden Aspekte des Problems findet man bei Baker und McCarthy.[3]

Das weder triviale noch unumstrittene Ergebnis bisheriger Analysen lautet: Natürliche Sprachen sind nur lernbar, wenn und weil die Ausstattung des Organismus eine hinreichend starke Anfangsstruktur aufweist. Der genaue Inhalt dieser Anfangsstruktur, auf die

---

3 Vgl. Baker, C. L. & J. J. McCarthy (eds.): The Logical Problem of Language Acquisition, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1981.

mit dem Titel Universalgrammatik UG Bezug genommen wird, ist Gegenstand empirischer Untersuchungen unter der Annahme, daß UG zur genetisch fixierten Ausstattung des Organismus gehört.

Die Mathematik der natürlichen Sprache stellt sich damit als eine Komponente der Bedingungen dar, die die biologische Grundlage des Geistes ausmachen.

5 Optimalität und Evolution

Eine weitergehende, spekulative, aber mit Blick auf andere Wissenschaften durchaus sinnvolle Frage, die auf dieser Basis gestellt werden kann, lautet:

(10) Wieso hat UG die Eigenschaften, die wir offenbar konstatieren müssen?

Diese Frage wird inhaltlich und formal sinnvoll, wenn Phänomene, wie die in den Beispielen (6) und (7) illustrierten Positionsketten, neben oder zusammen mit anderen Komponenten des Berechnungssystems, insbesondere grammatischen Kennzeichnungen wie Kasus, Genus, Numerus usw. bei der sprachlich determinierten Korrespondenz zwischen AF und SF eine Rolle spielen. Wenn UG mehrere Lösungen für das Problem der Korrespondenz zwischen Lautstruktur und semantischer Struktur ermöglicht, ist dann der damit gegebene Spielraum überschüssig, oder ist er optimal im Hinblick auf die wechselnden Randbedingungen, zwischen denen einzelsprachliche Systeme wählen können? Das führt zu der etwas modifizierten Frage:

(11) Wie weit weichen die aufgrund von UG möglichen Abbildungen von SF auf AF von der optimalen Lösung ab?

Diese Frage könnte Bedingungen der Phylogenese identifizieren, die sich auf adaptive Selektion nicht wirklich zurückführen lassen, vorausgesetzt, nicht nur die Mathematik von UG, sondern auch die Charakteristik der Randbedingungen ist formulierbar. Daß das möglich ist, wird damit nicht unterstellt, sondern nur der Ort des Problems angegeben.

Ob und wieweit adaptive Selektion die Entstehung der Sprachfähigkeit und die Struktur von UG erklären kann, ist umstritten. Während etwa Pinker[4] die Sprachfähigkeit als Ergebnis einer Folge von im Prinzip adaptiven Evolutionsschritten ansieht, legen Überlegun-

[4] Vgl. Pinker, S.: The Language Instinct, New York: William Morrow, 1994.

gen von Chomsky[5] die Annahme nahe, daß im wesentlichen ein Schritt die evolutionäre Basis der Sprachfähigkeit bildet. Kern dieses Schrittes ist die Entstehung der Möglichkeit rekursiver Operationen über Symbolen. Dieser Schritt könnte adaptiv sein hinsichtlich der symbolischen Repräsentation der Umwelterfahrung, die mit einem Vorteil in der Verhaltensorganisation verbunden wäre. Im Gegensatz zu verbreiteten Auffassungen wäre er aber nicht adaptiv im Hinblick auf die Kommunikation. Die Wirkung der symbolvermittelten Kommunikation würde ja die Existenz eines Symbolsystems bereits voraussetzen, das aber nur aufgrund der erst entstehenden Fähigkeit möglich ist. Mit anderen Worten: In bezug auf die Kommunikation ist die Entstehung der Sprachfähigkeit nicht adaptiv, sondern exaptiv. Adaptiv könnte sich dagegen die Möglichkeit kognitiver Operationen auswirken.

In einer entscheidenden Hinsicht ist aber auch für die Kognition eine eher exaptive, nachträglich entstehende Funktionalität anzunehmen. Das bezieht sich auf die Tatsache, daß zum Gesamtbereich BS im Prinzip auch die Existenz und Verwendung von Symbolen gehört. Das heißt, mit dem Prinzip der Vollständigkeit natürlicher Sprachen ist auch die Möglichkeit der Metasprache und insgesamt der Reflexion, das heißt der mentalen Repräsentation mentaler Inhalte, gegeben. Diese Möglichkeit wird funktional wirksam in dem Maße, in dem symbolische Repräsentationen existieren, die aber erst auf der Basis von Erfahrung und Konvention entstehen.

6 Sprachfähigkeit und Kreativität

Die formalen Eigenschaften von UG und den darauf beruhenden Einzelsprachen dürfen nicht einfach als die Mathematik des Geistes ausgegeben werden. Wenn man die freie, kreative, situationsgemäße, aber nicht situationsdeterminierte Ausübung der Sprachfähigkeit als eine konkrete Form des Geistes versteht, dann ist die Sprache im bisher diskutierten Sinne zwar unabdingbare Voraussetzung dafür – es wäre aber eine Verwechslung, deren formale Charakterisierung bereits als die abgeschlossene Mathematisierung des Geistes zu verstehen. Ob und auf welche Weise letzteres ein verstehbares und lösbares Problem ist, liegt jenseits der Grenze, die hier mit dem Titel „Mathematisierung des Geistes" angedeutet werden sollte. Es soll also auch nicht unterstellt werden, daß der Rahmen, in dem die Sprache als Berechnungsstruktur verstanden werden kann, im Prinzip

---

5 Vgl. Chomsky, N.: On Nature and Language, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

auch die Erklärung der freien, kreativen Sprachausübung ermöglicht. Der Charakter dieses Problems entspricht vom Typ her vielmehr der Kontroverse über die Möglichkeit freier Willensentscheidung.

Die gleiche Unterscheidung zwischen der rekursiven Struktur von Kenntnissystemen, die offene Möglichkeiten erzeugen, und ihrer kreativen Nutzung oder auch Erweiterung ist entsprechend auch für die im folgenden noch betrachteten Bereiche geistiger Phänomene zu machen.

7 Sprechen und Zählen

In der formalen Struktur der natürlichen Sprache als System der rekursiven Symbolkombination ist nicht nur die Möglichkeit der Metasprache und damit der Reflexion verankert, sondern auch die Fähigkeit des Zählens und damit die Basis der Arithmetik. Es liegt daher nahe, zusammen mit der Mathematisierung der Sprache auch die Mathematisierung der Mathematik als einer geistigen Fähigkeit ins Auge zu fassen. Zumindest die Arithmetik ist insofern an die gleichen Grundlagen gebunden wie die Sprache, als zwei Systeme – Zahlennamen als Signale und Zahlen als begriffliche Größen – aufeinander abzubilden sind. Drei Varianten, die gleiche Zahl in einem System von Zahlsymbolen zu repräsentieren, machen das deutlich:

(12) sechshundertfünfundsiebzig tausend (und) einundzwanzig
sixhundred seventyfive thousend (and) twenty one
6 7 5 0 2 1

Die natürlichen Zahlen und alle davon abgeleiteten Systeme beruhen auf zwei Bedingungen. Die erste, grundlegende Bedingung ist die Rekursivität der Nachfolgeroperation, die zweite, gleichermaßen unabdingbar, ist die Verfügung über Symbole, die Zahlen repräsentieren. Der minimale Symbolvorrat ist demnach ein Grundelement und die iterative Verknüpfung das zweite. Nicht zufällig aber gehören Grundzahlwörter, die die Symbolisierung effektiver machen, zum zentralen lexikalischen Bestand aller natürlichen Sprachen. Die Beispiele in (12) zeigen darüber hinaus, daß die Kombinatorik der Symbole weit komplexere und einzelsprachlich unterschiedliche Operationen einschließt als die bloß lineare Verknüpfung. Sprache und Arithmetik beruhen damit gleichermaßen auf rekursiver Symbolkombinatorik, sind insoweit durch die gleichen formalen Randbedingungen gekennzeichnet und möglicherweise auch Ergebnis des gleichen phylogenetischen Entwicklungssprungs. Zugleich ist aber erkennbar, daß das generative System der Zahlennamen von Bedingungen Gebrauch macht, die erst durch die Erzeugung von Zahlen möglich werden. Dazu gehören vorab Addition und Multiplikation, die in die Bedeutung von Zahlennamen wie *dreizehn* vs. *dreißig* eingehen. Insofern muß die formale Charakterisierung der Zahlfähigkeit auch einer tiefgreifenden Verschiedenheit in der Implementierung der gleichen Operationen in der Sprache und in der Mathematik Rechnung tragen, wie etwa Wiese zeigt.[6] Im übrigen sind die Bedingungen der weiteren Elaborierung der Zahlentheorie natürlich nicht auf die Erzeugung der Zahlennamen zu reduzieren. Die Mathematikfähigkeit als Gattungseigenschaft des Menschen und ihre formalen Charakteristika sind insofern ein eigenes Thema.

8 Mathematik der Musik

Schließlich hat die Mathematisierung des Geistes noch ein ganz anderes Terrain im Bereich der Musik in Betracht zu ziehen. Deren Struktur ist vereinfacht und etwas fragwürdig als Mathematik der Emotionen bezeichnet worden. Um diese griffige Formulierung vertretbar zu machen, ist zunächst folgendes zu klären:

Sprache und Arithmetik und übrigens auch die Grundlagen der Logik haben die gleiche Basis: die rekursive Kombinatorik von Symbolen. Für die Musik dagegen ist zunächst festzuhalten, daß die unzweifelhaft kombinatorische Struktur mit Iteration und Komplexbildung sich nicht auf Symbole bezieht. Es ist in der Musiktheorie heftig gestritten worden, ob, und wenn ja, in welchem Sinn, Musik eine Bedeutung hat. Abgesehen von sekundären Epiphänomenen, wie Signalen der Jagd oder des Militärs, ist so viel unstrittig: Musikalische Strukturen haben keine symbolische Bedeutung, weder in bezug auf Grundelemente, wie Themen oder Motive, die insofern gerade nicht Wörtern oder Phrasen der Sprache entsprechen, noch in deren Kombinatorik oder Abwandlung. Was die Musik – gegenüber sinn- oder bedeutungslosen Schallereignissen – vermitteln kann und soll, sind Einstellungen, Emotionen, Affekte. Dabei ist entscheidend, daß die Signalstrukturen – etwa zeitliche Gliederung, Tempo, Intensität, Repetition – mit Bedeutung verbunden sind durch Analogie, das heißt durch strukturelle Ähnlichkeit. Sofern bei musikalischen Strukturen von Bedeutung die Rede sein kann, geht es um ikonische, nicht um symbolische Zeichen. Im Kontrast zur semantischen Form sprachlicher Bedeutung habe ich daher vorgeschlagen[7],

---

[6] Vgl. Wiese, H.: Zahl und Numerale, Berlin: Akademie Verlag, 1997.

[7] Vgl. Bierwisch, M.: Musik und Sprache. In: Jahrbuch Peters, Aufsätze zu Musik, Leipzig: Peters, 1980, S. 9–102.

von gestischer Form als Bedeutung der Musik zu sprechen. Die Konsequenzen sind mannigfacher Natur und hier nicht zu verfolgen. Zwei Hinweise machen die Differenz der Musik zu symbolischen Systemen deutlich. Zum einen ist die Negation – also eine Operation, durch die etwa *es schneit* zu *es schneit nicht* wird – musikalisch unmöglich. Wie immer ein Thema verändert oder erweitert wird, es kann nicht negiert werden, auch nicht durch Verstummen. Zum anderen ist in der Musik jede Kombination von Signalen – etwa die Wiederholung von Themen oder Motiven – notwendig mit der gleichartigen Kombination des Gemeinten verbunden. Die unterschiedliche Kombination in Laut und Bedeutung, die den Unterschied von *hundertfünf* gegenüber *fünfhundert* ausmacht, ist in der Musik nicht möglich. Die Umkehrung eines Themas oder Intervalls ist seine Umkehrung, nichts sonst.

Nach dieser Klarstellung ist nun aber zu sagen, daß die Musik aufgrund ihres ikonischen Charakters und ihrer ebenfalls kombinatorischen, algebraischen Struktur zwar auf anderem Wege, aber deshalb nicht weniger ein konstitutives Moment des Geistes ist. Schließlich wird man einer Bachschen Fuge oder einem Streichquartett von Schönberg nicht weniger spirituelle Bedeutsamkeit zusprechen wollen als einer Hymne von Hölderlin oder dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Für die Mathematisierung der Musik sind nun zwei ganz unterschiedliche Aspekte zu unterscheiden, die hier wenigstens skizziert werden sollen.

Der erste betrifft die akustische Struktur des Signals und hat keine vergleichbare Parallele in der Sprache. Die Beschäftigung mit diesem Aspekt hat eine große Tradition, die in die Antike bis zu den Pythagoreern zurückreicht. Die Mathematik der musikalischen Intervalle, der Oktav-, Quint-, Terzverhältnisse und der instrumentellen Mittel, sie zu erzeugen, hat lange als zentrales Moment der musikalischen Struktur gegolten. Die Metapher von der Sphärenmusik und der *harmonia mundi* orientiert sich an der in den Tonskalen manifesten Mathematik. Daß einfache Zahlenverhältnisse mit positiver Bewertung der auditiven Verarbeitungsresultate korrelieren, ist zweifellos eine nicht triviale, musikästhetische Tatsache.

Die Mathematik dieses Aspekts hat mit der des zweiten nur insofern zu tun, als sie Grundbedingungen und Eckpunkte der Signalstruktur auszeichnet, Tonartverhältnisse etwa oder den Stellenwert von Tonika, Dominante etc. in der Abfolge von Themengruppen und Strukturkomplexen. Der eigentliche Bereich des zweiten Aspekts ist die Kombinatorik im sequentiellen Aufbau musikalischer Strukturen, die zunächst vergleichbar ist mit der Kombinatorik in der Signalstruktur sprachlicher Zeichen, also dem, was in Schema (3) als Artikulatorische Form AF angegeben ist. Auch AF beruht auf der linearen, an der

Zeitachse orientierten Kombination von Elementen und Einheiten, die für die Musik konstitutiv ist. Auch in AF gibt es Gruppierungen – Silben, Wörter, Intonationsgruppen – und die Möglichkeit der Repetition, im Vergleich zur Musik allerdings extrem begrenzt. Die damit angedeutete Parallelität wird unmittelbar wirksam in der gesungenen Sprache, im Lied oder in der Arie. Im Gesang werden musikalische und sprachliche Lautstruktur aufeinander abgebildet und jede bringt ihre spezielle Art der Bedeutung mit.

Während aber die artikulatorische Form der Sprache der grammatisch organisierten Bedeutung zugeordnet ist, gibt es diesen Aspekt aus den genannten Gründen in der Musik nicht. Rekursivität erzeugt daher in der Musik nur Strukturen, die in der Signalform selbst etablierte Einheiten betreffen. Hauptmoment dieser Form der Rekursivität ist daher die lineare Reihung von Elementen oder von größeren Komplexen, prinzipiell also die Wiederholung. Dabei kann die Repetition selbst das Moment sein, das als solches Bedeutung vermittelt.

Neben der damit angedeuteten Einschränkung der musikalischen gegenüber der sprachlichen Kombinatorik gibt es aber essentiell andere, zusätzliche Möglichkeiten, die in der Musik, aber nicht in der Sprache möglich sind. Abwandlung von Motiven, Wiederholung unter Transposition, Umkehrung von Themen sind Möglichkeiten, für die die Lautstruktur natürlicher Sprachen keinen Platz hat. Ein weiteres, für die musikalische Strukturbildung entscheidendes und in sehr unterschiedlicher Weise genutztes Moment ist die Parallelität von Strukturen, also die Gleichzeitigkeit mehrerer, jeweils in sich zusammenhängender Strukturen. Auf dieser Möglichkeit beruht die Mehrstimmigkeit, die Kontrapunktik und ein großer Bereich musikalischer Komplexbildung. Diese Form der Kombinatorik ist in der Sprache grundsätzlich ausgeschlossen, übrigens auch dann, wenn sie – etwa in der Schrift oder in der Gebärdensprache der Gehörlosen – im Prinzip möglich wäre.

Alle diese Einschränkungen und zusätzlichen Möglichkeiten beruhen auf algebraisch charakterisierbaren Operationen. Das bedeutet, daß die Mathematik der Musik sich in interessanter Weise von der der Sprache unterscheidet. Lehrdal und Jackendoff haben diesen Aspekt der Musik analysiert und interessante Prinzipien seiner Struktur formuliert.[8] Man darf erwarten, daß die Differenz und die Gemeinsamkeiten von Musik und Sprache wie auch von anderen Bereichen des Geistes durch die Klärung ihrer jeweiligen Mathematik besser, auf jeden Fall aber präziser verständlich werden als durch hermeneutische Paraphrasen.

---

[8] Vgl. Lerdahl, F. & R. Jackendoff: A Generative Theory of Tonal Music, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1983.

Diskussion I

Jochen Brüning, der die Debatte leitet, eröffnet die Diskussion:

Angela Friederici: Ich würde gern das, was Manfred Bierwisch gesagt hat, ergänzen und vielleicht eine Brücke schlagen wollen zu dem, was Herr Gigerenzer gesagt hat. Mathematik und Sprache sind beide Produkte des Geistes. Ich denke, Sprache ist deshalb auch – oder vielleicht gerade deshalb – sehr gut mathematisch abbildbar und viceversa. Die These, daß die menschliche Fähigkeit eine ganz besondere ist, ist ja vor einiger Zeit wieder diskutiert worden, und man hat versucht, zu beanspruchen, daß diese menschliche Fähigkeit eigentlich zurückzuführen ist auf die Fähigkeit, rekursive Strukturen zu verarbeiten. Und solche rekursiven Strukturen finden wir natürlich in der Sprache, in der Mathematik, evtl. sogar in der Musik. Das kreative Handeln aber, denke ich, kann natürlich nicht durch dieses Regelsystem beschrieben werden, also in mathematischen Termini. Ich glaube, beim kreativen Handeln könnte es sein, daß Heuristiken ins Spiel kommen, die es erlauben vorauszusagen, wann und unter welchen Bedingungen bestimmte Äußerungen getätigt werden.

Heinz Duddeck: Wenn ich ein bißchen naiv fragen darf: Eigentlich, dachte ich, werden wir erfahren, ob die Mathematik in der Natur steckt oder ob die Mathematiker sie erst in die Welt hineinbrachten. Vor mehr als hundert Jahren (1883) stritten die Mathematiker, u. a. Cantor, Hilbert und Kronecker darüber, was Gott gemacht und was die Mathematik hinzugetan hatte. Und Kronecker hätte gesagt: „Gott schuf nur die ganzen Zahlen, alles andere ist Menschenwerk." Selbst die Zahl π sei Erfindung der Mathematiker. Schon Galilei prägte so wunderschöne Sätze wie: „Mathematik, das ist die Grammatik des von Gott verfaßten Buches der Natur." Meine Frage: Findet man die Mathematik als Teil der Natur vor – also gefunden – oder ist sie erfunden? Ich will gar nicht weiterfragen: Warum eigentlich ist Naturverhalten mathematisierbar? In naiver Diktion also: War es Gott? Steckt es in der Physik? Oder interpretiert der Mensch Mathematik in etwas hinein, was im Grunde gar nicht mathematisch ist?

Reinhold Kliegl: Ich wollte ein kurze Anmerkung oder Ergänzung zu Herrn Gigerenzer machen. Man sollte sein Beispiel über das Fangen des Balls ja nicht so verstehen, daß wir nicht in der Lage wären, die Parabel eines Aufschlagpunktes eines Balles zu berechnen. In der Tat gibt es hierzu sehr erstaunliche Beispiele. Versetzen Sie sich in die Rolle eines Kricketspielers, der einen Ball treffen möchte, der auf ihn zugeworfen wird. Der Ball trifft bereits zwei, drei Meter vor dem Schläger auf den Boden und springt von dort auf den Schläger zu. Um den Ball zu treffen, muß er den Ball beim Abwurf für ganz kurze Zeit mit den Augen verfolgen, dann aber sehr schnell mit den Augen auf den antizipierten Auftreffpunkt gehen, weil er nur so genügend Zeit bekommt, den Schläger so auszurichten, daß der Ball getroffen werden kann. Und jetzt kann man vermuten: Ja, solche Leistungen sind uns angeboren. Es ist aber leider komplizierter, denn man kann zeigen, daß die Geschwindigkeit, mit der Sie den Blick von der Trajektorie des Balls auf den antizipierten Aufschlagpunkt bringen, abhängt von Ihrem Können im Kricketspielen. Das heißt, daß die Experten-Kricketspieler ihren Blick sehr viel schneller auf diesen antizipierten Aufschlagpunkt wenden und dadurch mehr Zeit zur Verfügung haben, den Schläger in die richtige Stellung zu bringen. Das bedeutet, daß es auch darauf ankommt herauszufinden, unter welchen Bedingungen welche Heuristiken angemessen sind. Das ist nur eine Ergänzung, nicht ein Widerspruch zu dem, was Herr Gigerenzer vorgetragen hat.

Peter Deuflhard: Ich habe Mühe, kein Gegenreferat zu dem Referat von Herrn Lucas zu halten, werde mich aber kurz fassen und im Vorbeigehen Ihre Frage beantworten: Was war denn nun zuerst, die Natur (und ihre modellhafte Beschreibung) oder die Mathematik? Wenn Sie mich fragen, ich denke mir Mathematik – wie alles, was Menschenwerk ist – als historisch gewachsenes Gebilde. Ich kann Ihnen Beispiele an den Fingern jeder Hand aufzählen, wo die Mathematik vor der physikalischen Beschreibung der Natur da war – und genauso viele, wo es umgekehrt war. Nehmen Sie das Beispiel von Herrn Huisken: Da war zunächst Riemann mit seiner Geometrie; erst anschließend hat Einstein uns die Physik dazu gelehrt. Allerdings sollte man auch nicht vergessen, daß Einstein in Princeton zwei Mathematik-Assistenten hatte, die ihm regelmäßig die mathematischen Fehler herausgezogen haben. Im Fall der Relativitätstheorie ging sicher die Mathematik der Physik voraus. Nehmen Sie ein anderes Beispiel für die Umkehrung: Dirac-Impulse. Der Physiker Dirac hat Spektren untersucht und hat dabei intuitiv etwas entwickelt, was wir heute Dirac-Maße nennen, oder auch Dirac-Distributionen. Da kamen die Mathematiker erst nachher, weil sie festgestellt haben, das ist ein interessantes, reiches Feld, und heute kann man dieses Objekt mathematisch sicher beherrschen. Ich will diese Linie jetzt nicht weiter führen, sondern meine These, daß Mathematik ein historisches Gebilde ist, mit einem dritten Beispiel veranschaulichen. Die wunderbare Graphik, die uns Herr Brüning am Anfang gezeigt hat, deckt trotz ihres Detailreichtums nur einen ganz kleinen

Teil ab. Zur Erläuterung meines Arguments lassen Sie mich jetzt mal einen Hut als Chinese aufsetzen: Als Chinese fühle ich mich nicht als ein individuelles Gegenüber der Natur, die Natur als Objekt betrachtend. Vielmehr ist die ganze Sprache, in der ich denke und in der ich spreche, in der ich nicht zuletzt schreibe, eine untrennbare Verknüpfung von mir und der Natur. In dieser gewählten Sichtweise habe ich größte Schwierigkeiten, die Natur als Objekt zu betrachten. Und deswegen finde ich mich dann in dieser wunderschönen und an sich schon so reichen Graphik trotzdem nirgends wieder. Ich glaube, wir haben ein Beispiel dazu in dem Vortrag von Herrn Gigerenzer gehört: Da kamen wir genau an diese Schwelle heran, wo plötzlich das Individuum als Teil der Natur erscheint – es ist kein Wunder, daß wir bei den Beispielen zur Partnerwahl alle gelacht haben. Hierzu hätte ich noch eine weitere mathematisch interessante Heuristik von meinem Vater beizutragen. Er hat mir einmal gesagt: Wenn du heiratest, dann schau dir die Frau gut an und überleg's dir gut; aber wenn du dir das im konkreten Fall erst gut überlegen mußt, dann laß es lieber. Sie sehen, wir kommen ins Paradox, und zwar in dem Moment, wo wir gezwungen sind, die gewohnte Trennung von Subjekt und Objekt aufzuheben und anfangen, in einer Sprachwelt zu denken, die diese Trennung nicht enthält. Zur Rolle der Mathematik in den Technikwissenschaften könnte ich mich umfangreicher äußern, was jedoch in diesem engen Diskussionsrahmen nicht geht. Ich fasse mich also kurz: Ich habe schon in sehr, sehr vielen Disziplinen der Technik als Mathematiker gearbeitet und dort immer wieder die Erfahrung gemacht, daß am Anfang der Untersuchung zu einem ingenieurwissenschaftlichen Problem die bewundernswerte Intuition des Ingenieurs steht; sie führt zum Fortschritt, aber dann hapert es im Detail. Allerdings kann das Detail auch ziemlich zentral sein. Nehmen Sie als Beispiel dieses große Kraftwerk, das uns Herr Lucas gezeigt hat, mit allen technischen Bausteinen, mit allen Simulationsmodulen. Auch hier geht es nicht ohne Systematisierung, ohne sehr, sehr saubere mathematische Modellierung. Dazu würde ich am liebsten sehr viel mehr sagen, weil ich auf diesem Gebiet intensiv über viele Jahre gearbeitet habe. Aber bevor ich nun doch noch in ein Korreferat verfalle, mache ich erstmal an dieser Stelle Schluß.

Martin Quack: Ja, die Beispiele von Herrn Gigerenzer sind sehr anregend, aber sie sind eigentlich genau das Gegenteil von dem, was wir besprechen, denn einen Ball fangen oder auch ein Stück Fleisch, das ihm zugeworfen wird, kann ein Hund auch. Dazu braucht man kein Mensch zu sein, auch keinen menschlichen Geist zu haben. Ein Stück Brot wird von einer Möwe sehr erfolgreich in der Luft gefangen – offenbar können die das. Ehepartnerwahl gibt es auch im Tierreich, das gehört wahrscheinlich auch in diese

Klasse von Vorgängen, die mit Mathematik nichts zu tun haben, wie wahrscheinlich auch Aktienkursschätzungen. Jetzt zur Frage: Wie kommt es, daß die Menschen einen Weg gefunden haben – den die Tiere eben nicht gefunden haben –, die Natur mathematisch zu beschreiben. Das ist etwas, das finden wir nur im menschlichen Bereich und nicht bei den Tieren. Und die Mathematik kann natürlich etwas, was richtige Lösungen bringt. Denn die Fragen über San Antonio und San Diego, die hatten natürlich eine richtige Lösung: Ich gehe zum Lexikon und schaue nach. Ein rationaler Mensch würde sich gar nicht auf das Schätzen einlassen. Wenn er es nicht weiß, sagt er: Ich weiß es nicht. Und wenn ich es wissen will, dann schau ich es nach, ich prüfe es nach. Die Mathematik erlaubt uns, Raketen auf den Mond zu schicken. Da wird nicht geschätzt, auf jeden Fall sollte man nicht versuchen, sich dem dann anzuvertrauen. Und jetzt kommt die Frage: Wie kommt es zu diesem besonderen Verhältnis des Menschen zur Natur mit der Mathematik? Ich denke, die Mathematik ist eine besondere Sprache, eine besondere Abbildung der Natur. Dies betrifft alle Bereiche – die Tiere und die Menschen, die versuchen die Natur irgendwie abzubilden, um mit dieser Methode der Abbildung etwas zu machen, letztlich: zu überleben. Und die Menschen haben eine Abbildung gefunden in der Mathematik, eine abstrakte Abbildung sehr hoher Präzision, die uns erlaubt, die Natur so abzubilden, daß das, was herauskommt, erstaunlich richtig ist. Das ist vielleicht das Bemerkenswerte. Und dann kommt man zur Frage: Was heißt das? Ist das jetzt eine Erfindung des menschlichen Geistes? Haben wir einen Weg gefunden? – Eigentlich ist das gar keine Trennung. Ich glaube, wenn wir das finden, dieses Bild als etwas von uns „Erfundenes“ und nicht „Entdecktes“, was schon vorher in der Natur vorhanden ist, dann müssen wir bedenken: das Bild ist immer gleichzeitig auch etwas, was ein Teil der Realität selbst ist. Ich glaube nicht, daß man wirklich sagen kann, ob man etwas entdeckt, wenn man mathematisiert oder ob man es erfindet. Ich glaube, die beiden gehören zusammen, nicht? Die abstrakte Abbildung ist ja selbst wieder ein Teil der Realität.

Eberhard Heinrich Knobloch: Ich möchte erst einmal auf Herrn Duddecks Frage antworten, und zwar mit der Antwort eines berühmten Mitgliedes dieser Akademie: Albert Einstein. Er hat 1921 über Geometrie und Erfahrung gesprochen und gesagt: Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und sofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit. Ich denke, an der Stelle haben wir doch keine Zweifel mehr, daß die Mathematik ein Erzeugnis des menschlichen Geistes ist. Ich würde gern, Herr Brüning, auf Ihre einleitenden Worte kurz mit vier Aspekten zu sprechen kommen, nämlich erstens: Mathematisierungen können auf verschiedene

Weisen vorgenommen werden. Ich finde, es ist ein sehr wichtiger Aspekt, wer oder was, welche Kriterien denn die Mathematisierung steuern? Das sind eben durchaus außermathematische Kriterien. Wenn wir in der Antike bleiben, die Sie ja herangezogen haben, da war man der Meinung, daß die erkennbar sich bewegenden Wandelsterne göttliche Körper sein müssen. Das wiederum bedeutet, daß ihnen nur göttliche Eigenschaften zukommen. Ungleichförmigkeit kann ihnen also zum Beispiel nicht zukommen. Demnach war klar, daß man nur kreisförmige Bahnen annehmen kann. Mit anderen Worten: Man hat von vornherein eine Einschränkung der mathematischen Möglichkeiten. Dies betrifft auch den großen Einstein, der sich bekanntlich mit der Stochastik der Quantenmechanik nie anfreunden konnte, so daß er an dieser Stelle hoffnungslos hinter der Entwicklung der modernen Physik zurückgeblieben ist. Und mit diesen steuernden Kriterien hängt zweitens zusammen, was sie „Rettung der Phänomene" nannten. Ich möchte lediglich daran erinnern, daß es vielleicht besser ist, zunächst einmal von Wiedergabe – 'apodidonai' steht ja bei Aristoteles – zu sprechen und nicht von Retten. Retten ist erst nötig, wenn der empirische Befund von der Erwartung offensichtlich abweicht. Die Planeten halten an, sie bewegen sich unterschiedlich schnell – da muß man also etwas machen. Und drittens hängt damit natürlich das Verhältnis zwischen Wirklichkeit und Modell zusammen. Die Frage ist also: Was leistet denn die Mathematik? Wenn wir verschiedene Modelle haben, dann sagen sie nicht unmittelbar etwas über die Natur aus. Das soll bedeuten: die Mathematik ist das eine, die kosmologische Aussage ist das andere. Und dies wurde auch sauber getrennt. In der Wirklichkeit kann nur eine Möglichkeit realisiert sein. Wenn wir verschiedene mathematische Modelle haben, dann heißt das eben nur, daß sie äquivalent sind oder verschiedene Vorzüge untereinander haben. Eine solche Situation ist für Kepler nicht denkbar, der hier zu Recht genannt wurde. Übrigens hat er seine zweite Ehe sehr erfolgreich durchgeführt. Dies ist eine Erfolgsgeschichte, nicht? Man darf also auch etwas wissen, und siehe da: Er war beliebig glücklich mit der zweiten Frau. Kepler ist also derjenige, der die Mathematik und Physik verschmolzen hat: Sein Modell bildet die Wirklichkeit ab. Viertens gibt es die Frage der Vereinfachung. Wir hatten das ja schon einmal angesprochen. Folgendes bezieht sich auf Herrn Gigerenzer: Was unmittelbar einleuchtet, ist, daß Ignoranz schöpferisch sein kann. Erst in der Beschränkung zeigt sich der Meister. Wir müssen vereinfachen, weil die Natur um ein unendliches zu kompliziert ist. Das führt zur Frage, wo wir vereinfachen und was das Wesentliche ist, was wir beibehalten müssen. Darin zeigt sich das gute Modell: Es behält das Entscheidende bei und läßt alle möglichen nebensächlichen Dinge beiseite.

Manfred Bierwisch: Ich möchte auch noch einmal auf die Frage von Herrn Duddeck zurückkommen. Sie ist ja die Grundfrage unserer ganzen Diskussion: Finden wir die Mathematik in der Natur vor oder tragen wir sie in die Natur hinein? Ich denke, daß es mit der Mathematik ähnlich ist wie mit vielen anderen Bereichen der Umwelterfahrung, etwa den Farben: Wir wissen ja, daß in der Natur keine Farben sind, daß elektromagnetische Wellen erst im visuellen System des Organismus zu den Farben werden, die wir auf die Natur projizieren. Und das ist möglich, weil in der Natur das gegeben ist, woraus der Organismus die Farben macht. In ähnlichem Sinn läßt sich sagen, daß wir in der Natur mathematische Strukturen entdecken, weil wir die Fähigkeit haben, solche Strukturen mental zu erzeugen und auf die Natur zu projizieren. Zwischen der Flugbahn eines Balles und der Differenzialgleichung, die diese Bahn beschreibt, besteht eine Beziehung, die der zwischen einem bestimmten Ausschnitt des elektromagnetischen Spektrums und der Farbwahrnehmung analog ist. Für die Mathematik kommt zu diesem Verhältnis allerdings etwas Entscheidendes hinzu. Was der Organismus aus der Fähigkeit der Farbwahrnehmung machen kann, ist mit dieser Fähigkeit selbst weitgehend festgelegt. Die Farben liefert gewissermaßen die Biologie. Nicht so im Fall der Mathematik. Aus den Grundoperationen des Zählens und Vergleichens entstehen – neben den raffiniert vereinfachenden „Berechnungen", die Herr Gigerenzer uns als direkte Basis der Verhaltenssteuerung beschrieben hat, – komplexere, eigenständige algebraische und geometrische Kenntnissysteme. Was wir aus der Fähigkeit zur rekursiven Strukturbildung und Deduktion machen, ist damit sowohl für das Individuum wie für die Gruppe und die gesamte Spezies, anders als bei den Farben, eine Sache des Lernens und der Tradition. Mathematische Theorien sind folglich in anderer Weise mentale Gebilde als Farbsysteme. Das führt zu einem in dieser Art für Farben oder für Töne nicht bestehenden Unterschied zwischen den Gegebenheiten in der Umwelt einerseits und den mentalen Systemen, die ihnen mehr oder weniger genau entsprechen, andererseits. Mathematische Theorien sind, wie hier mehrfach gesagt wurde, Kulturprodukte. Sie sind lernabhängig, aber sie beruhen auf der im Menschen verankerten Fähigkeit zum Umgang mit solchen Systemen, und sind auch auf verschiedene Weise in die Verhaltenssteuerung einbezogen. Das Spektakuläre und Erstaunliche ist aber, daß mit diesen Kenntnissystemen auch da, wo sie ganz unabhängig von direkter Umwelterfahrung sind, doch Gegebenheiten der Natur erfaßt werden können. Die Struktur unserer Farbwahrnehmung ist erfolgreich, weil ihr ein bestimmter Aspekt der Umwelt entspricht. Offenbar gilt das nun auch für mathematische Strukturen. Wir können sie erfinden, weil die Biologie uns dazu befähigt, und zwar weit über die unmittelbare Erfahrung hinaus. Daß sie aber der Realität entsprechen, ist nur möglich, soweit die von diesen Strukturen erfaßten Zusammenhänge in der Realität gegeben sind. Als besonderes Problem kommt schließlich der Umstand hinzu, daß die Möglichkeit von Kenntnissystemen selbst ein Phänomen der Natur ist. Das führt dann zu der weiteren intrikaten Frage, in welcher Weise mathematische Theorien ihre eigene Grundlage darstellen können.

Jürgen Ehlers: Ich möchte gern auf eine Frage hinweisen, die vielleicht bei einer Fortsetzung diskutiert werden könnte, nämlich: Wie kommt die Abbildung des symbolisch-mathematischen Teils einer Theorie auf das zustande, was wir die Wirklichkeit nennen. In der Art, wie man eine Wissenschaft lernt, geschieht das sozusagen durch eine Art Diffusionsprozeß. Man macht sich nie explizit klar, wieweit diese Zuordnung eigentlich auf Begriffe gebracht werden kann. Soweit ich das verfolgt habe, gibt es nur wenige Versuche von Physikern, den Begriff der Theorie so zu beschreiben, daß die Referenz, also der Wirklichkeitsbezug, ausdrücklich mitproblematisiert wird. Es gibt auch Versuche von Seiten der Wissenschaftstheorie, zum Beispiel von Reichenbach, Putnam, Stegmüller, Mühlhölzer u. a., aber alle diese Versuche bleiben im Vagen stecken. Ich würde gern erfahren, ob es in diesem Kreis Kollegen gibt, die eine genauere Fassung kennen, oder ob wir uns damit abfinden müssen, daß die Beziehung des Symbolischen zu dem sogenannten Wirklichen immer in einem erheblichen Umfang vage bleibt.

Hermann Lübbe: Ich würde gerne an Herrn Gigerenzer die Frage stellen, ob das, was er uns vorgetragen hat, nicht genutzt werden könnte zur Erklärung des in der Tat auffälligen politischen Faktums, daß in allen hoch entwickelten Gesellschaften der Anteil der politischen Entscheidungen zunimmt, die gerade nicht auf der Basis des den politischen Entscheidungsinstanzen zugelieferten wissenschaftlichen Fachwissens, also auf der Grundlage der Arbeit wissenschaftlicher Politikberater, getroffen werden, sondern durch Volksabstimmungen. Das funktioniert ja tatsächlich, und es funktioniert von Kalifornien bis hin nach Zürich ausgezeichnet.

Mitchell Ash: Zwei Punkte hätte ich ganz kurz und knapp – hoffentlich nicht allzu sehr im Telegrammstil – geltend zu machen. Der erste betrifft die allererste Frage, die gestellt wurde, die als naive Frage designiert wurde: Ob die Mathematik in der Natur schon stecke oder erst vom Menschen gefunden werde. Die Antwort darauf, die von einem Kollegen aus derselben Klasse gekommen war, oder aus der naturwissenschaftlichen Klasse, teile ich: daß es sich nämlich um Kulturleistungen handelt, die allesamt historischen Charakter haben. Aber das ist nicht der Punkt, den ich jetzt geltend machen will, vielmehr möchte ich sagen: Wenn man diese Antwort ernst nimmt – und ich tue dies gern –, dann hat das Folgen für die erste Fragestellung. Es ergibt sich daraus nämlich nicht ihre Sinnlosigkeit, aber vielleicht ihre Gegenstandslosigkeit in einem gewissen Sinn. Was meine ich damit? Ich meine, daß jede neue Mathematisierung der Natur auf ihre Gültigkeit hin überprüft werden kann, aber immer nach den gegenwärtigen Gesichtspunkten dessen, was jeweils eine gültige Antwort ist. Wenn man das konsequent historisiert, dann muß man dies so betrachten. Wenn die Sache so ist, dann ist die erste Frage ja nicht gegenstandslos geworden; es gibt natürlich eine Außenwelt, es gibt natürlich eine Natur, auf die diese Antworten sich immer richten. Aber das, was für Natur gehalten wird, ändert sich auch, so daß es praktisch unmöglich wird, die Frage zu beantworten, die Sie gestellt haben, weil die Antworten, die vor 1.000 Jahren existiert haben, nach anderen Kriterien überprüft und für richtig befunden worden sind. Wenn man also konsequent historisiert, ergibt sich auch eine Historisierung des Gegenstands, auf den diese Antworten gerichtet werden. Das wäre der erste Punkt. Der zweite richtet sich auf das Wort Abbild, das von Herrn Quack gewählt wurde. Ich würde eher dafür plädieren, den Titel „Mathematisierung" ernst zu nehmen. Das bezieht sich wieder auf den ersten Punkt: Es handelt sich um einen Prozeß. Und da müßte man dann fragen: Was heißt denn hier Abbild? Ist es nicht eher so, daß das, was Abbild heißt, sich im Laufe der Zeit auch gewandelt hat? Wenn ich zum Beispiel Herrn Huiskens Ausführungen in Betracht ziehe, dann würde ich gern fragen, welche Teile der Modelle, die er vorgetragen hat, jeweils als Abbild zu sehen sind und welche nicht. Ich denke hierbei an Hilbert und seine berühmten Ausführungen um die Jahrhundertwende, in denen er sich ganz bewußt vom Ideal der Abbildfunktion mathematischer Theoriebildungen verabschieden wollte, und sagte: Man kann ein Modell in Bezug setzen zur Natur, aber das ist etwas anderes, als diese abzubilden.

Bernd Hillemeier: Ich habe mich extra sehr spät gemeldet, weil ich die Diskussion nicht unterbrechen wollte, aber Herr Brüning, Sie haben ganz zu Anfang etwas gesagt, was so nicht unwidersprochen stehen bleiben soll. Sie meinten: „Wer ein Haus baut, der braucht keine Mathematik". Sie implizieren damit, daß die gebauten Strukturen so robust sind, daß sie keiner mathematischen Behandlung bedürfen. Die Dome und die Kathedralen, die wir heute noch bewundern können, sind nur die, die nicht zusammengestürzt sind. Und Konrad Zuse, ein Bauingenieur, hat erkannt und hat darunter gelitten, daß wir noch sehr viel mehr rechnen müssen. Er hat im Grunde die Mathematik des Mathematikers Gauß zum Leben erweckt: die Matrizenrechnung, und hat damit für die vielen statisch

Unbekannten durch die Erfindung des Computers das Lösen großer Gleichungssysteme ermöglicht. Heute können Flugzeuge in Wolkenkratzer rasen, und diese kippen dabei nicht um. Wir Bauingenieure rechnen weiter, damit die Bauwerke auch noch die Brände aushalten.

Jochen Brüning: Ja, ich gebe es zu, jedenfalls wenn der Bereich natürlicher Kunstlehren verlassen wird.

Kurt-Victor Selge: Ich wollte nur eine Frage zu einer Randbemerkung am Schluß von Herrn Bierwischs Beitrag stellen. Wann beginnt Musik mathematisiert zu werden? Ist das erst ein höheres Produkt, oder würden Sie sagen, daß Wolfsgeheul in der Nacht oder das Hundegeheul, das sich am Mundharmonikaspiel entzündet, nicht schon etwas mit Musik zu tun haben. Es hat doch den Charakter des Gesanges oder der Lautbildung. Meinen Sie, daß da ein Zusammenhang besteht mit Dingen, die schon mathematisierbar sind? Sie sind in der Wirklichkeit sozusagen einer Natur, die vorsprachlich ist, aber nicht unähnlich der Sprache.

Angela Friederici: Wenn Sie die Frage direkt ansprechen, inwieweit Sprache und Musik zusammenhängen, sollte ich etwas dazu sagen: Ich kann das natürlich nur von einem neurophysiologischen Standpunkt aus ein bißchen erhellen. Wir haben Untersuchungen gemacht, bei denen wir uns Hirnaktivitäten anschauen, wenn Personen Sprache verstehen oder Musik hören. Hierbei haben wir festgestellt, daß die Hirnareale, die bei diesen beiden Funktionen aktiv sind, zum größten Teil überlappen. Interessant ist dabei, daß auch sogenannte Nichtexperten, also keine ausgebildeten Musiker, diese Aktivierungen zeigen. Die Tatsache, daß wir ganz bestimmte Musikstrukturen schon erkennen können, ohne Experten zu sein, deutet wiederum darauf hin, daß Teile dieser Fähigkeit vielleicht auch angeboren sind.

Gerd Gigerenzer: Ich wollte zwei Punkte anmerken, den ersten zu Herrn Bierwisch. Ich denke, daß bestimmte heuristische Prinzipien auch bei der Sprachentwicklung eine Rolle spielen, beispielsweise Prinzipien von Einfachheit der Information und der Begrenzung des Gedächtnisses. Es gibt hierzu Experimente und Simulationen, zum Beispiel von Jeff Elman. Er versucht zu zeigen – mit Computern, die Sprache lernen –, wenn ein Kind eine Sprache lernen muß, dann ist es wichtig, daß dieses Gehirn ein kleines Gedächtnis hat und nicht ein voll entwickeltes Gedächtnis, und zweitens, daß die Information von einfa-

cher Form ist. Das ist, was wir instinktiv tun, nämlich Baby-Talk. Denn sonst, so argumentiert er, kann sich eine Sprache nicht entwickeln. Das heißt, wenn Sie Ihrem Kleinkind Habermas vorlesen, dann werden Sie vielleicht die Sprachentwicklung hemmen. Das ist kein Argument gegen Habermas. All diese Prinzipien sind ja höchst domain-spezifisch. Man muß lernen, wo man was anwendet. Es gibt ähnliche Prinzipien in der Biologie – Herr Menzel könnte wahrscheinlich etwas dazu sagen – , es gibt zum Beispiel Experimente, bei denen man Kücken, die sich noch im Ei befinden, zu viele Informationen gibt, was dazu führt, daß sie sich nicht richtig entwickeln.
Nun zur Frage über Politik. Ich habe Ihre Frage so verstanden, wie kann man in idealer Weise eine informierte Politik schaffen, die versucht – genau wie wir es in der Medizin jetzt versuchen – Entscheidungen aufgrund der Evidenz zu treffen, anstatt aufgrund anderer Strategien: zum Beispiel danach, wen man kennt und in welcher Partei man ist. Ein Beispiel möchte ich nennen: Ab 2005 wird in unserer Republik ein flächendeckendes Mammographiescreening eingeführt. Die Bevölkerung hat bis heute kaum verständliche Informationen von unserer Regierung erhalten, was die Vor- und die Nachteile sind. Die – ich fasse es nur kurz zusammen – medizinische Forschung über Mammographiescreening hat bis heute etwa 500.000 Frauen in sogenannten randomisierten Experimenten untersucht. Das Ergebnis ist ziemlich klar: von je 1.000 Frauen, die am Screening teilnehmen, sterben etwa drei in zehn Jahren an Brustkrebs, und von 1.000, die nicht teilnehmen, sind es vier. Also eine in Tausend stirbt weniger an Brustkrebs. Zugleich wird kein Leben gerettet, da in beiden Gruppen gleich viele sterben (an allen Todesursachen). Das wurde von unserer Bundesregierung als eine 25 %ige Sterblichkeitsreduktion an die Öffentlichkeit weitergegeben, so zum Beispiel in Pressemitteilungen. 25 % – das kling gut, oder? Von vier nach drei in Tausend, aber es ist lediglich 1 in 1.000. Zugleich gibt es auch nur begrenzt Informationen über die Nachteile, die ich jetzt nicht erwähnen kann. Ich habe einen Staatssekretär gefragt, wie diese Entscheidung denn zustande kam, soviel Geld in eine Sache zu investieren, von der man nur einen minimalen Nutzen – wenn überhaupt – erwarten kann, aber eine Kostenexplosion aufgrund mangelnder Information. Die Antwort war: Eine Ministerin hatte gerade eine Brustkrebs-Diagnose bekommen, weitere kannten Fälle in ihrem Bekanntenkreis, und dann entstand eine emotionale Stimmung, welche die wissenschaftliche Evidenz einfach überrollte und man Millionen nicht in nützliche Medizin investiert, sondern dort, wo man kaum oder keinen Erfolg hat. Mangels klarer Informationen glauben viele, ihr Leben sei gerettet worden. Hier könnte der Stand der medizinischen Forschung, wenn er Ärzten wie Patienten bekannt wäre, viel Leid und Kosten ersparen.

Jochen Brüning: Zu diesem Punkt darf ich vielleicht ergänzen, daß in Japan die Konzerne dezidiert die Mathematik nicht unterstützen, weil sie sagen: Für die Entscheidungen, die wir zu fällen haben, brauchen wir keine Mathematik. Das ist einfach eine Feststellung.

Horst Bredekamp: Ich kann direkt an diesen Einwurf anschließen. Ich habe die Diskussion in der Schroffheit der gegeneinander stehenden Positionen einerseits als außerordentlich beeindruckend empfunden. Die Frage, die entscheidende Frage: Holt die Mathematik etwas aus der Natur, was sich in der Natur befindet, oder konstruiert sie diese hinein – diese beiden Positionen wurden seit der Antike von unterschiedlichen Seiten privilegiert, und es ist keine Versöhnung in Sicht. Genau diese Frage wird von der Kunsttheorie und der Musiktheorie seit 2.500 Jahren diskutiert und in genau dieser Polarisierung hin- und heroszilliert. Die Pythagoräer haben argumentiert, ein Wunder liege darin, daß man Musiktöne in Längenverhältnissen beschreiben kann, also in Zahlen. Dies sei das Wunder des Kosmos. Die Skeptiker dagegen haben gesagt: Nein, diese Gewißheit ist in die Natur hineinprojiziert. Es gibt Architektendarstellungen, die genau diese beiden Positionen bestimmen. Der geniale Bramante stellt sich dar mit dem Zirkel, der in den Himmel gerichtet ist: Ich hole meine Harmonien vom Himmel, aus der Natur, aus der Schöpfung; Gott ist der Baumeister. Der nicht weniger geniale Vignola zeigt sich als Handwerker; der Zirkel geht nach unten, auf die Erde. Diese beiden Bestimmungen oszillieren, wie gesagt, durch die gesamte Kunst- und Musiktheorie – unentschieden. Und vielleicht soll man dieses akzeptieren und eine andere Frage stellen, die im 17. Jahrhundert geäußert wurde. In jener Phase, in der die Mathesis universalis durchgesetzt wurde, entschied Ludwig XIV.: Hinter diesem Bild, daß die Natur selbst Regeln besitzt, die herausgeholt werden sollen, verbirgt sich ein unerhörter Machtanspruch der Mathematiker, den es zu begrenzen gilt. Und aus diesem Grund hat Ludwig XIV. den Perspektiviker Abraham Bosse aus der Akademie entlassen, Berufsverbot quasi, weil dieser verlangte, daß jede Darstellung perspektivisch zu gestalten sei. Ludwig XIV. hat entschieden: Ich selber, als absolute Macht, bin nicht mathematisch darzustellen, weil ich über der Mathematik stehe. Dieses Beispiel zeigt, daß in der Frage, ob die Mathematik in der Natur steckt, oder ob der Mensch qua Souveränität die Mathematik selbst konstruiert, nicht allein Probleme der Natur, sondern sozialer und istitutioneller Ansprüche mitschwingen. Damit stellt sich die Frage, welche Metaphoriken sich hinter der einen oder der anderen Position verbergen? Zeigen sich hier erkenntnistheoretische oder – wie Ludwig XIV. argumentierte – machtbezogene Ansprüche?

Jochen Brüning: Auch das wird offen bleiben.

Gerhard Huisken: Ich möchte gerne die Frage beantworten, die mir gestellt wurde, wie die Abbildung zwischen dem Modell und der Wirklichkeit aussieht. Wenn ich höre, welcher Machtanspruch den Mathematikern hier unterstellt wird, möchte ich gern eine ganz bescheidene und pragmatische Antwort aus meiner Sicht geben: Man orientiert sich ganz pragmatisch an den Problemen und an den Phänomenen, die man beschreiben möchte. Und das hängt dann natürlich mit dem historischen Kontext zusammen. Wenn ich beispielsweise innerhalb des GPS-Systems Ortsbestimmungen auf zwei oder drei Meter genau vornehmen möchte, muß ich die allgemeine Relativitätstheorie mit in Betracht ziehen, aber dann reicht das Schwarzschildmodell aus. Das Modell, das ich Ihnen gezeigt habe, ist in der Lage, diese Abweichungen von dem normalen Gravitationsfeld der Erde zu bestimmen. Ich würde also dieses sehr einfache Modell nehmen und kein komplizierteres Modell der allgemeinen Relativitätstheorie. Wenn ich Gravitationswellen finden will, dann reicht das Schwarzschildmodell nicht mehr aus, dann brauche ich sehr viel kompliziertere, nichtlineare Lösungen der Einsteingleichungen, und nur dann habe ich eine Chance, Gravitationswellen zu modellieren. Das heißt, mein Zugang ist sehr pragmatisch. Das nimmt aber den Charakter des „Wunders" aus diesem Modell nicht heraus; daß es überhaupt möglich ist, mit solch hoher Genauigkeit mit diesem geometrischen Modell eine noch höhere Genauigkeit in der Vorhersage zu erreichen, zum Beispiel bei Gravitationswellen, das bleibt rätselhaft.

Mitchell Ash: Sie haben in gewissem Sinne die Frage mit dem Wort 'Vorhersage' schon beantwortet. Eine Vorhersage ist kein Abbild. Ich habe nur fragen wollen, welche dieser Gleichungsreihen, die Sie angeführt haben, ein Abbild wovon sind. Das war also eine andere Frage. Eine Vorhersage ist eine In-Beziehung-Setzung zur Natur, muß aber kein Abbild davon sein. Das war mein Punkt. Ganz konkret also: Die Partialdifferentialgleichungen, mit denen man jetzt bevorzugt Newton darstellt, obwohl er sie selber so in seinen Büchern nicht verwendet hat – sind das Abbilder? Sind die Gleichungen, die Sie jetzt im Schwarzschildmodell verwenden, Abbilder?

Gerhard Huisken: Gleich direkt dazu. Ich will mich nicht auf das Wort 'Abbildung' festlegen. Vielleicht ein anderes Wort: Es sind Rezepte, wie ich gewisse Effekte in der Natur vorhersagen und dann überprüfen kann, ob meine Vorhersage stimmt.

Jochen Brüning: Es ist vor allen Dingen auch eine Frage des Meßprozesses. Den können Sie variieren, aber Sie müssen ihn festlegen, ehe Sie eine Voraussage überhaupt formulieren können.

Mitchell Ash: Also sind es funktionale Wege zu einem Ergebnis, aber keine Abbilder.

Martin Quack: Da besteht doch noch ein Mißverständnis. Es gibt ja gar keinen Zweifel, daß unsere Art, die Natur mathematisch zu beschreiben, historisch gewachsen und ein kulturelles Phänomen ist. Alles, was wir als Menschen tun, erschaffen, beschreiben, ist eine menschliche Eigenschaft, aber die Frage war ja: Warum ist diese präzise Art – ich würde immer noch sagen: der Abbildung oder der Beschreibung der Natur – warum ist sie so erfolgreich? Und dann kommt eben diese Frage: Steckt das in der Natur schon drin, also die Schrödingergleichung, mit der ich eine Spektrallinie berechne, mit der ich die Atomuhr bauen kann, die auf 10^{14} genau funktioniert, oder ist das nur etwas, was wir hinein erfinden? Und ich glaube, diese Frage ist eigentlich eine Scheinfrage. Machen wir eine Photographie von einem Objekt, und die Photographie von dem Objekt bildet die Längenverhältnisse möglichst genau ab. Dann stelle ich die Frage: Sind diese Längenverhältnisse eine Eigenschaft der Photographie oder des Objektes? Natürlich von beidem. Wenn die Photographie, wenn das Abbild ein treues Abbild ist, dann ist das, was es abbildet, auch schon in dem Objekt drin gewesen. Und in diesem Sinne meine ich, ist die Mathematik natürlich auch in der Natur drin. Das ist gar keine Frage. Deshalb ist sie so erfolgreich. Und das zweite Mißverständnis: Wir haben zwei ganz verschiedene Dinge besprochen hier. Dieser zweite Aspekt gehört tatsächlich zur Frage unseres Themas. Der andere, erste Aspekt, wie wir intuitive Entscheidungen fällen, und ob wir diese richtig fällen oder falsch, ob wir sie demokratisch oder undemokratisch fällen – das hat eigentlich mit Mathematik gar nichts zu tun. Da gehen ganz andere Dinge hinein. Ich würde sagen: Das Bemerkenswerte an dieser Art von Entscheidungen ist ja, wie unsicher sie sind. Auch die besten Schätzungen, die Herr Gigerenzer vorgestellt hat, sind extrem unsicher. Und ich würde mich in kein Flugzeug setzen, das mit 80 %iger Wahrscheinlichkeit durchkommt und mit 20 %iger Wahrscheinlichkeit abstürzt. Das ist eine sehr schlechte Sache.

Ob des Zeitplanes wird die Diskussion an dieser Stelle beendet.

Aufgrund des übergroßen Interesses an der Thematik, des Wunsches nach Vertiefung des Diskussionsstandes und angesichts des sichtbar gewordenen Bedarfs an notwendiger Begriffsklärung, beschließt die Versammlung auf Vorschlag des Präsidenten, Dieter Simon, die Fortsetzung der Debatte zur Mathematisierung der Natur in der Dezembersitzung der Versammlung.

Mathematisierung der Natur

Teil II

Jochen Brüning

Einleitung

Ich möchte einleitend an den ersten Teil unserer Debatte erinnern, an den wir heute anknüpfen wollen. Um die Diskussion zu strukturieren, hatte ich als Arbeitshypothese einen Mathematisierungsbegriff vorgeschlagen, der in kurzer Zusammenfassung etwa wie folgt wiedergegeben werden kann: Eine Mathematisierung ist die Verbindung eines formalen Systems mit einem technischen System durch einen Modellierungsprozeß mit dem Ziel, Phänomene der realen Welt in ihrer zeitlichen Entwicklung vorauszusagen; damit sollen Überlebensvorteile gesichert oder Überlebensnachteile abgewendet werden. Die formalen Systeme habe ich im wesentlichen als mathematische Theorien beschrieben, während das technische System gedacht werden sollte als ein algorithmisch definierter technischer Ablauf. Schwieriger zu definieren ist der Modellierungsvorgang, dem eine vorausgegangene Debatte gewidmet war, so daß zu hoffen wäre, daß diese Debatte auch für die heutige Diskussion fruchtbar gemacht werden kann, um den hier betrachteten spezielleren Modellierungsbegriff genauer zu fassen. Die Phänomene schließlich sind die Ergebnisse von Meßprozessen, durch die sie letztendlich definiert werden, was insbesondere nur solche Ereignisse zur Konkurrenz zuläßt, die gesetzmäßiges Verhalten zeigen. Als Kernprobleme für unsere Diskussion hatte ich folgende Fragen apostrophiert:

- Welches Wissen und welche Wissenschaften sind dem Mathematisierungsprozeß zugänglich, und für welche Phänomene ist das unter Umständen aus fundamentalen Gründen nicht der Fall?
- Welche Weiterentwicklungen des Mathematisierungsprozesses oder seiner Komponenten erscheinen wünschenswert oder aussichtsreich, um seine Leistungsfähigkeit zu erweitern oder zu verbessern?

Im ersten Teil unserer Diskussion bestand breiter Konsens in der Feststellung, daß Mathematisierung im oben beschriebenen Sinne das Ergebnis eines historischen Prozesses ist, der sich im Rahmen der kulturellen Evolution vollzieht. Die funktionale Natur meiner Definition provozierte offenbar die vieldiskutierte Frage nach dem Wesen, insbesondere der „Natürlichkeit“ der Mathematik, woran sich zwangsläufig die Frage anschließt, warum

Mathematisierungen überhaupt gelingen können. Die Debatte hat wohl gezeigt, daß dafür bislang keine überzeugende Erklärung gegeben werden kann.

Die Debatte berührte auch das Wesen der Modellierung, allerdings zumeist eher als Frage denn als Antwort, weil ein großer Teil der Diskussionsbeiträge – offenbar angeregt durch den Vortrag von Herrn Gigerenzer – der Frage gewidmet war, wie sich „natürliches" Handeln, das auf Heuristiken beruht und deshalb mit höchst unvollständiger Information arbeiten muß, zu dem beschriebenen Prozeß der Mathematisierung verhält. Insbesondere wurde betont, daß Führungshandeln unter heutigen Bedingungen als eher irrational einzustufen ist, das heißt Regeln folgt, die mit der durch Mathematisierungsprozesse erzielten Rationalität kaum in Einklang zu bringen sind.

Diese sehr breit angelegte und, wie ich meine, hochinteressante Diskussion hat allerdings die spezifischer gemeinte Fragestellung der Debatte etwas in den Hintergrund treten lassen. Sie hat aber andererseits eine ganze Reihe neuer Statements angeregt, quer durch alle Klassen, die sich überwiegend dem Nutzen der Mathematisierung für die einzelnen Wissenschaftsfelder widmen werden. Ich freue mich sehr darauf und möchte nun Herrn Diederich bitten, mit dem ersten Beitrag zu beginnen.

François Diederich

Gibt es Phänomenbereiche, die mit großer Wahrscheinlichkeit nicht in der skizzierten Weise mathematisiert werden können?

Mein Klassensekretar Joachim Sauer bat mich, die organische Synthese aus dem Licht der Fragestellung dieser Auseinandersetzung zu beleuchten, weil er sich davon auch erwartet hat, daß sie ein Beispiel für das Nichtgelingen der Mathematisierung liefert. Das hat mich dazu geführt, Ihnen drei Beispiele zu schildern, wovon eines effektiv aus dem heutigen Sichtwinkel auf eine Nichtmathematisierbarkeit, wegen mangelnder Effizienz im Vergleich zur intuitiv-chemischen Handlungsweise, hinführt. Der Einfluß der Mathematisierung auf die chemische Synthese unterscheidet sich mit deren Zielsetzung, wie die drei aufgeführten Beispiele zeigen werden.

Das ist erstens die Totalsynthese von komplexen Naturstoffen, die hier am Beispiel von Brevetoxin gezeigt wird. Dieser Stoff weist neun annelierte Ringe auf. Diese Verbindung hat durchaus eine Bedeutung; von Zeit zu Zeit kommt es im Golf von Mexiko, aber auch in Kalifornien – Baja California –, wenn das Meer ruht, zur roten Algenflut. Sie sollten dann besser draußen bleiben und vor allem auch keine Muscheln und Meerestiere essen, denn was Sie hier sehen, ist das Toxin – Brevetoxin – der roten Algenflut. Nach ein paar Tagen oder auch manchmal Wochen verschwindet die rote Algenflut wieder. Dieses Toxin wurde von der Gruppe von Professor K. C. Nicolaou am Scripps Research Institute synthetisiert. Die Synthese geht über 60 Stufen. Wie fängt man an, ein solches Molekül auseinanderzunehmen? An welchem Ring fängt man an? – Für die Einzelschritte gibt es Datenbanken. Man kann heutzutage auf die ganze Literatur zurückgreifen. Welche Bedingungen man für einen Einzelschritt beim Aufbau dieser Synthese verwendet, wird heute stark von informatikgestützter Information geprägt. Aber hinsichtlich der Idee, wie man das ganze Molekül zusammenbringt, retrosynthetisch, ob man fünf der Ringe mit vier der anderen oder drei und drei und drei verknüpft – in diesem Punkt haben mathematische Modelle, die auch durchaus entwickelt wurden, bisher versagt, oder sie sind nicht zu einem ausreichenden Niveau hin entwickelt worden. Es gab und gibt weiterhin Versuche in den Gruppen von Professor Elias J. Corey in Harvard oder Professor William Jorgensen in

Yale; sie haben mathematische Programme für die sogenannte Retrosynthese entwikkelt, wie man ein solches Molekül in Bausteine unterteilen kann. Diese Programme haben jedoch keine Akzeptanz gefunden. Die Entwicklung war am stärksten in den 70er und 80er Jahren, als diese Programme rasch vorangetrieben wurden. Die Akzeptanz der chemischen Gemeinde ist jedoch bei Null geblieben. Somit hat sich eine mathematisierte Voraussage gegenüber dem intuitiv-chemischen Denken in diesem Teil der Synthese, der organischen Totalsynthese komplexer Naturstoffe, nicht bewahrheitet.

Es gibt aber in der organischen Synthese auch andere Themen. Ein großes Thema ist die sogenannte „target"-orientierte Synthese, das heißt, wo man eine Fusion von Synthese mit einer angestrebten Funktion herstellt. Hier möchte ich ein Beispiel aus unserer Gruppe anführen, bei dem zumindest die Funktionen und auch die Struktur des Moleküls, das man herstellen will, mittels mathematik-gestützter Methoden vorausgesagt werden. Wenn ich in einem Forschungsantrag die Herstellung eines Moleküls vorschlagen will, das ich zwischen zwei, bistabilen Zuständen mit lateralen Abmessungen von sieben Ångström und 70 Ångström (sieben Nanometer) schalten möchte, ist es wirklich so, daß ich die Gutachter schon allein davon überzeugen muß, daß diese Struktur existieren kann, überhaupt synthetisierbar ist und diese Schaltung auch strukturell ermöglichen kann. Wenn ich diesen Schaltprozeß noch mit einem Fluoreszenz-Energietransfer von einem Chromophor zu einem anderen nachweisen soll, dann muß ich den Gutachter auch davon überzeugen, daß der Konformationsraum, der Beweglichkeitsraum dieses Moleküls, sehr eingeschränkt ist – ist er das nicht, dann klappt es nicht. Hier benutzt der organische Synthetiker ganz klar die Mathematik und das in recht fortgeschrittenem Sinne. Die Molekülstruktur wird vorberechnet in den beiden Zuständen. Weiterhin erlaubt es die Förster-Theorie vorauszusagen, wie wir dieses System aufbauen sollen, damit ein wirksamer Unterschied im Energietransfer zwischen den beiden Zuständen auftreten wird.

Das dritte und letzte Beispiel bezieht sich auf das Gebiet, auf dem sich die Mathematisierung und die Synthese wohl am besten treffen, und zwar in der Medizinalchemie und dort vor allem im rationellen Wirkstoff, in der rationellen Wirkstoffentwicklung. Letztere beruht darauf, daß man die Strukturinformationen eines aktiven Zentrums – hier die Serinproteinase Faktor 10a aus der Blutgerinnungskaskade – kennt und Moleküle entwickelt, zum Teil durch Programme mit Docking-Funktionen, aber auch durch die chemische Strukturintuition (die Intuition, ob ein Molekül ein guter Hemmer sein wird oder nicht) und diese dann synthetisiert. Die Voraussage beruht auf der Röntgenstruktur oder NMR-Struktur, Docking-Programmen, zunehmend auch auf Berechnungen und Datenbankanalysen. Wenn man dann das Molekül erhalten hat – das heißt man löst die Röntgenstrukturanalyse – und spezifische Wechselwirkungen sieht, in diesem Fall eine Kation-Pi-Wechselwirkung, die recht unerforscht ist, dann kann man in einem weiteren Optimierungszyklus einem anwendbaren Wirkstoff rasch näher kommen. Hier wird sich noch einiges in nächster Zukunft tun, dank erhöhter Schnelligkeit und höherer Speicherkapazität der Computer. Freie Energieberechnungen in voll solvatisierter Umgebung (über 1.000 Wassermoleküle) für den Wechsel von einem Zustand A (freie Bindungspartner) nach B (Komplex) werden somit zunehmend zugänglich. Damit wird sich Bindungsfähigkeit nicht nur akkurat modellieren und voraussagen lassen, sondern auch das Verständnis von Wechselwirkungen, wie die zwischen einem Kation und einem pi-System, stark verbessert.

Ich glaube, daß ich Ihnen anhand der drei Beispiele den unterschiedlichen Stand der Mathematisierung in der Organischen Synthese gezeigt habe – ausgehend vom ersten Beispiel, bei dem ein sehr geringer Anteil der Mathematisierung besteht, über ein zweites, bei dem Vorhersage von Struktur und Funktion betrieben wird, bis hin zu einem dritten Komplex, in dem es, getrieben durch die vielen Gelder, die in die pharmazeutische Forschung hineinfließen, am meisten Fortschritt bei der Anwendung mathematisierter Methoden geben wird.

Stefan Müller

Mathematatik und Materialwissenschaften

Multiskalenprobleme und die Suche nach dem Wesentlichen

Wir haben bei der letzten, sehr anregenden Diskussion schon gesehen, daß die Mathematik und die Physik eng miteinander verwoben sind und sich schon lange gegenseitig befruchtet haben. Der Beitrag von Herrn Huisken zur allgemeinen Relativitätstheorie hat dies eindrucksvoll illustriert. Niemand würde heute ernsthaft eine große neue physikalische Theorie vertreten, die nicht mathematisch formuliert ist.

Wir haben aber auch gehört – und wir sehen das auch täglich –, daß die Mathematik zunehmend auch in andere Natur- und Ingenieurwissenschaften eindringt. Welche Rolle kann sie dabei spielen? Wenn wir jetzt 50 Jahre weiter denken: Wird dann die Mathematik in der Chemie, in der Biologie oder in den Materialwissenschaften die gleiche zentrale Rolle spielen, die sie heute in der Physik einnimmt, oder sind diese Naturwissenschaften – von den Sozial- und Geisteswissenschaften will ich gar nicht reden – schon so anders, daß es im Grunde keine tiefe Interaktion mit der Mathematik geben wird, sondern nur Hilfestellung für viele konkrete Fragen? Zu diesem großen Komplex möchte ich nur einige kleine, persönliche Bemerkungen machen, sozusagen aus Sicht eines Mathematikers mit einem gewissen Interesse an den Materialwissenschaften. Einige Gedanken sind möglicherweise auch relevant für die Interaktion von Mathematik und Biologie, aber da werden wir von Herrn Reich in seinem Vortrag „Mathematisierung des Lebens“[1] im Rahmen der Akademievorlesung eine viel ausführlichere und tiefgründigere Darstellung hören.

Ein genereller Trend in allen Naturwissenschaften ist, daß wir die elementaren Prozesse immer besser verstehen und auflösen können. In der Biologie werden immer mehr Genome komplett erschlossen und – was vielleicht noch wichtiger ist – immer mehr Signalketten. Wir können zum Teil die Funktion einzelner Biomoleküle quasi mechanisch nachvollziehen. In den Materialwissenschaften läßt sich inzwischen Materie auf der Ebene einzelner Atome manipulieren. Es gibt auch zunehmend bessere theoretische Modelle,

---

[1] Vgl. Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften (Hg.), Berichte und Abhandlungen, Band 11, Berlin: Akademie Verlag (in Vorbereitung).

die das Verhalten einzelner Atome oder kleinerer Gruppen von Atomen schon mit hoher Präzision vorhersagen können. Wenn man das im Hinterkopf hat, könnte man sich vielleicht zunächst zu zwei radikalen Thesen hingerissen fühlen:

These 1: Wenn die elementaren Prozesse verstanden sind, ist die Erklärung komplexen Materialverhaltens *im Prinzip* nur ein Frage mathematischer Deduktion.

These 2: Wenn die elementaren Prozesse verstanden sind, braucht man gar keine Mathematik mehr, sondern nur einen hinreichend großen Computer.

Ich denke, beide Thesen haben einen gewissen Charme, aber persönlich halte ich sie für völlig falsch. Was die erste These betrifft, so ist das entscheidende Wort „im Prinzip“. Schon ein einfacher Gegenstand des alltäglichen Lebens, wie beispielsweise die Kaffeetasse vor Ihnen, enthält größenordnungsmäßig die enorme Zahl von 10^{23} Atomen. Das Verhalten jedes einzelnen Atoms zu verstehen, ist nicht nur quantitativ völlig unmöglich, es ist auch gar nicht erstrebenswert, da wir in einem Datenmüll ertrinken würden.

Historisch war es auch ganz anders. Wir haben ein sehr gutes Verständnis des elastischen Verhaltens von Materialien gehabt, lange bevor überhaupt die atomare Theorie bewiesen war. Dieses Verständnis begann mit einer mathematischen Fiktion, dem Kontinuum. Reale Materie ist sicherlich nicht kontinuierlich, aber sehr viele Prozesse und Fragen der praktischen Ingenieurwissenschaften ließen sich mit der Kontinuumsvorstellung hervorragend verstehen, und auch viele fundamentale, strukturelle Erkenntnisse sind damit möglich geworden, weil die mächtigen Methoden der Infinitesimalrechnung auf kontinuierliche Systeme angewendet werden können. Leonhard Euler, der ja mit dieser Akademie aufs engste verbunden ist, war hier ein Pionier.

Jetzt könnten Sie einwenden, daß es zumindest für die numerische Berechnung, die heute zunehmend an Bedeutung gewinnt, gut wäre, von einem diskreten Modell auszugehen. Dieses Modell ist zwar möglicherweise sehr groß, aber zumindest endlich. Auch das halte ich für falsch, denn hier ist ebenfalls häufig das Kontinuum der bessere Ausgangspunkt. Wenn ich mich nämlich von der ursprünglichen diskreten atomaren Vorstellung einmal gelöst habe, dann steht mir wieder völlig frei, wie ich dieses Kontinuum durch die endliche Zahl von Freiheitsgraden, die ich zur Verfügung habe, beschreiben kann. Herr Deuflhard kann sicherlich viele Beispiele nennen, bei denen es viel besser ist, eine künstliche Approximation des Systems zu betrachten, die über ein unendlichdimensionales Modell als Zwischenschritt geht, anstatt mit einem scheinbar natürlichen endlichdimensionalen Modell zu beginnen. Dieser Umweg über ein idealisiertes unendlichdimensionales Modell ist oft überhaupt erst der Schlüssel zur effizienten Berechnung.

Das Kontinuum reicht aber letztlich nicht. Wenn Sie Ihre Kaffeetasse fallen lassen, dann wird sie zersplittern. Ein Stahlbecher dagegen wird vielleicht eine kleine Beule davontragen, aber nicht zersplittern. Dieser Unterschied läßt sich in der rein elastischen, idealen Kontinuumswelt nicht mehr so einfach verstehen. Wir könnten das Modell durch weitere Parameter erweitern, aber der entscheidende Punkt ist, daß Keramiken anders sind als Metalle. Wenn man das etwas genauer studiert, zeigt sich, daß neben der kleinsten Skala der einzelnen Atome und der ganz großen Skala, auf der wir beobachten, intermediäre Skalen eine entscheidende Rolle spielen. Es gibt Versetzungen, es gibt Einschlüsse, Korngrenzen, Phasengrenzen usw. Dies führt zu einer Hierarchie von Skalen, auf denen interessante Phänomene passieren.

These 3: Die große Herausforderung ist, solche *Multiskalenprobleme* zu verstehen.

Hier hat übrigens Einstein einen wesentlichen Beitrag geleistet – eine der drei großen Arbeiten, die wir dieses Jahr feiern, ist die Arbeit zur Brownschen Bewegung. Dabei geht es genau darum, wie die winzigen thermischen Bewegungen sehr vieler kleiner Teilchen die Bewegung eines viel größeren Testteilchens beeinflussen. Diese Bewegung ist scheinbar erratisch, aber in ihrem statistischen Verhalten sehr präzise vorhersagbar.

Bis jetzt habe ich hauptsächlich von großen Systemen gesprochen – Systemen mit sehr vielen Komponenten –, aber wir wissen durch Poincarés Arbeiten zur Himmelsmechanik und durch das, was man heute Chaostheorie nennt, daß selbst schon sehr kleine Systeme ein sehr komplexes und in einem wohldefinierten Sinne chaotisches Verhalten zeigen. Das heißt, auch von diesen Systemen können wir überhaupt nicht erwarten, daß sie eine vollständige Vorhersage zulassen. Das bringt mich zu meiner letzten These.

These 4: Eine zentrale Rolle der Mathematik ist es, zu identifizieren, welche Phänomene robust vorhersagbar sind.

In diesem Sinne beschränkt sich die Mathematik nicht auf die Erklärung von Beobachtungen, sondern sie hilft uns zu erkennen, was sich sinnvoll beobachten und vorhersagen läßt. Ein Beispiel mag dies verdeutlichen. Heutzutage kann man leicht große Computersimulationen durchführen und entsprechend komplizierte Bilder erzeugen. Die Frage ist: Was an dem Bild ist eine interessante Vorhersage und was ein rein zufälliger Teil, der sich unter kleinsten Veränderungen der Parameter oder der Berechnungsmethode völlig verändert und den man gar nicht mit der Realität vergleichen sollte. Die Mathematik hat schon wichtige Beiträge in dieser Richtung geleistet, zum Beispiel mit dem Ito-Kalkül für zufällige Prozesse, der unter anderem Grundlage der Berechnung von Derivaten an den

Finanzmärkten ist. Die meiste Arbeit liegt aber sicher noch vor uns, und mathematische Strukturen, die uns bei komplexen Problemen die relevante Information, das Wesentliche extrahieren, sind zum großen Teil erst noch zu schaffen.

Olaf Dössel

Mathematische Modelle vom Herzen

Wir beschäftigen uns in meinem Institut mit innovativer Medizintechnik, und zwar insbesondere mit neuen Techniken, mit denen wir Herzkranken vielleicht in Zukunft besser helfen können. Bei unseren Arbeiten sind wir auf ein neues Fachgebiet gestoßen: Es ist die Mathematische Physiologie, *Mathematical Physiology*. Momentan sprießen auf diesem Gebiet an vielen Stellen auf der Welt bunte neue Blumen. Letztlich wollen wir mit mathematischen Methoden den Menschen – insbesondere den Patienten – vorhersagbar machen. Wir wollen die Therapie der Herzkrankheiten in Zukunft mit Methoden der Mathematik besser planbar machen.

Für die Anwendungen der mathematischen Modellierung in der Kardiologie müssen wir verstehen, was beim Schlagen des Herzens genau passiert, wie das EKG und die Kontraktion des Herzmuskels entstehen. Wenn wir diese Vorgänge quantitativ beschreiben wollen, dann stoßen wir auf Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen, die ziemlich komplex sind und – wie die Mathematiker seit langem wissen – auch vielfältige Lösungen haben: stabile Lösungen, instabile Lösungen, oszillierende Lösungen. Wir sind also in einem faszinierenden Bereich der Mathematik gelandet. Wir können tatsächlich mit Differentialgleichungen alle Vorgänge im Herzen schon sehr genau beschreiben: bei den Ionenkanälen, also bei den Proteinen angefangen, über einzelne Herzmuskelzellen, die aufgrund einer elektrischen Depolarisation kontrahieren, bis hin zum Gesamtorgan und zum gesamten Kreislauf.

Wir haben es hier auch mit einem Multiskalensystem zu tun, so wie es Herr Müller im vorigen Beitrag vorgestellt hat. Wir müssen versuchen, mit neuen mathematischen Methoden diese vielen Skalen zu überwinden: von dem Protein im Nanometerbereich über die Zelle im Mikrometerbereich bis hin zum Organ im Zentimeterbereich und zum ganzen Körper im Meterbereich. Bei jedem Schritt zu einer größeren Skala müssen wir Größen zusammenfassen und neue Parameter wählen, mit denen die Vorgänge beschrieben werden können. Diesen Weg müssen wir gemeinsam mit Mathematikern gehen, die heute systematische Methoden zur Überbrückung stark unterschiedlicher Skalen entwickeln.

Die komplexen gekoppelten Differentialgleichungen und die Multiskalen-Problematik führen dazu, daß viele Dinge nicht mehr exakt vorhersagbar sind. Wir stoßen auf Probleme der Chaos-Theorie. Das Schlagen eines Schmetterlingsflügels in der Karibik kann das Wetter in Europa beeinflussen. Auch bei der mathematischen Beschreibung des Herzens ergeben sich Systeme, bei denen eine minimale Veränderung in den Parametern einiger Herzmuskelzellen plötzlich zu ganz anderen Lösungen, zum Beispiel zu Arrhythmien führt. Wir kommen also in Bereiche, in denen wir mit unsicherem Wissen umgehen müssen, wo mit Wahrscheinlichkeiten gerechnet werden muß.

Ich hatte beim Lesen anderer Beiträge zu diesem Thema manchmal den Eindruck, daß in dem Moment, wo wir es nicht mehr mit klassischer Logik, sondern mit „Fuzzy Logic" zu tun haben, und in dem Moment, wo wir es nicht mehr mit exaktem Wissen, sondern mit Wahrscheinlichkeiten zu tun haben, der eine oder andere denkt, das wäre dann keine Mathematik mehr. Ich glaube, ich spreche den Mathematikern aus der Seele, wenn ich sage, daß gerade „Fuzzy Logic" und der Umgang mit unsicherem Wissen ein wesentlicher Bereich der zukünftigen Mathematik ist, wo gerade heute ganz neue und faszinierende Erkenntnisse zu erwarten sind.

Wenn wir uns also das ganze System „Herz" am Ende anschauen, dann sehen wir, daß das Herz durch die Evolution so und nicht anders entstanden sein muß. Letztlich haben wir es ja mit einem Baukasten aus Proteinen zu tun, deren Mischung die Eigenschaften von Zellen bestimmt. Und wenn wir versuchen, aus diesem Baukastensystem eine bestmögliche Blut-Pumpe zu bauen, dann kommt man beim Herzen heraus. Der Weg der Evolution wird nachvollziehbar mit Hilfe der mathematischen Ansätze, zum Beispiel der Differentialgleichungen. Damit ist für mich die mathematische Beschreibung am Ende nicht etwas, was die Ratio des Menschen dem Herzen aufgedrückt hat, sondern etwas, was die Natur inhärent eingebaut hat. Wenn wir also überhaupt an die Wirklichkeit dieser Natur glauben, dann ist an dieser Stelle die Mathematik einfach unauflösbar verzahnt mit der Evolution und dem Suchen nach der bestmöglichen Lösung.

Wenn ich das Herz mathematisiere, wird vielleicht der eine oder andere, beispielsweise ein Geisteswissenschaftler, aufschreien und sagen: Hier wird ein Organ, welches in der Literatur ja eine ganz herausragende Rolle für die Seele und den Sitz der Emotion spielt, mathematisiert – ist das nicht schrecklich! Ich kann Ihnen versichern, daß ich natürlich diese seelische Komponente aus dem Herzen nicht herausnehmen möchte, sie fasziniert mich auch. Und sie ist im Grunde darauf zurückzuführen, daß es sich um ein so komplexes System handelt, welches wir selbst nicht rational steuern können. Es fasziniert auch mich immer noch, wie sich unser Herzschlag beschleunigt, wenn wir in Aufregung geraten.

Am Ende sehen wir aber: Die Mathematisierung ist keine Entzauberung dieses Organs, sondern sie ist eine Offenbarung. Sie ist eine Offenbarung der Schönheit der Natur und der faszinierenden Arbeit, die die Evolution über viele Jahre geleistet hat. Sie ist eine Einsicht, die mit Hilfe der Mathematik erst möglich wird.

Hans-Günther Wagemann

Die Schrödinger-Gleichung als Wegweiser zum besseren Halbleiter-Werkstoff

Ich möchte etwas sagen zur physikalischen Modellbildung in der Technik mit den Argumenten der Mathematik und über ihre Handhabung zum Zwecke der Veränderung und der technischen Nutzung von Werkstoffen.

Dazu werde ich Ihnen ein Beispiel nennen, das aus dem Kern der theoretischen Festkörperphysik stammt, bis heute die Technik immer wieder unterstützt und neue technische Produkte auf den Weg bringt. Dabei werden einige Begriffe verwendet, die vielleicht zum Teil aufgrund der kurzen verfügbaren Zeit unerklärt bleiben.

Die moderne Festkörperphysik fängt mit der Schrödinger-Gleichung und ihrer Lösung für Kristallgitter an. Jeder Physikstudent lernt, daß ihre geschlossenen Lösungen beim eindimensionalen Kristallgitter aufhören. Sowie es dreidimensional wird, gibt es lediglich numerische Lösungen. In den frühen 30er Jahren bereits haben Forscher festgestellt: Es passiert Unerwartetes, wenn man bei den theoretischen Betrachtungen über unendlich ausgedehnte Kristalle auf begrenzte Gitter übergeht. Es existieren dann „energetische Oberflächenzustände" der unabgesättigten Elektronen-Valenzen in der obersten Atomlage, die verhindern, daß an den Oberflächen überhaupt Ladungstransport stattfinden kann.

Als man zum ersten Mal experimentell testete, ob das stimmt, stellte man fest: Es gibt den Voraussagen zum Trotz doch Ladungstransport an den Kristalloberflächen. Zunächst wußte man aber nicht wie; die Rechnungen waren eindeutig. Durch weitere Experimente stellte man fest: Fremdstoffe lagern sich an die obersten Atome an und schirmen die Oberflächenzustände ab. Die Schrödinger-Gleichung mit ihrer Lösung bleibt gültig. Man muß ihre Ansätze nur etwas modifizieren. Man wußte zunächst nicht, welche Fremdstoffe dabei eine Rolle spielen. Experimentell ergab sich: Es sind vorwiegend Wasserstoff und Sauerstoff, die sich anlagern und den Ladungstransport längs der Oberfläche ermöglichen. Mit dieser Erkenntnis wurden in den 60er Jahren die MOS-Bauelemente entwickelt (MOS ≈ *metal* **o***xide* **s***emiconductor*). Das Silizium wird dazu oxidiert; dies führt zu einer dünnen dielektrischen SiO_2-Schicht. Darunter wird Ladungstransport an der Oberfläche des Siliziums möglich, wenn alle Elektronen der Silizium-Atome durch Sauerstoff-Atome terminiert sind und die Oberflächenzustände sich nicht auswirken. Die Technologen verstanden, daß man zu diesem Zweck das Siliziumdioxid sehr sauber herstellen muß. Dann wird der Ladungstransport nicht beeinträchtigt. Alle Computer-Schaltkreise werden heute in dieser MOS-Technologie erfolgreich hergestellt.

Die Wissenschaftler, die dann als erste terrestrische Solarzellen aus multikristallinem Silizium in den 70er Jahren beschrieben haben, sagten: die MOS-Technologie paßt doch auch genau auf unsere Probleme: Wir haben kleine Kristallite aus Silizium, die in die Matrix eines multikristallinen Kristalls eingelagert sind und deren Oberflächen „innen" liegen. Auf die inneren Oberflächen angewendet, lieferte die Schrödinger-Gleichung das bekannte Ergebnis. Aber nun kannte man schon die Vorgehensweise. In diesem Falle stabilisiert eine Wasserstoff-Behandlung die inneren Oberflächen der Kristallite. Inzwischen werden mehr als 90 % aller Solarzellen aus multikristallinem Silizium gefertigt.

Auf dieser Basis ging es weiter. Wenn man den Halbleiter ganz ungeordnet vor sich hat als dünne Schicht aus amorphem Silizium, dann gibt es sozusagen nur noch unabgeschlossene Oberflächen. Und die Schrödinger-Gleichung ergab auch hier wieder bekannte Lösungen. Man erfaßte dabei ganz neue Wechselwirkungen zwischen den irregulär aufgebauten Mikro-Netzwerken aus Silizium und eingelagerten Fremdatomen wie Wasserstoff. Experimentell hat es dann noch längere Zeit gedauert, ehe man in der Lage war, die Wasserstoff-Atome an die Stellen zu bringen, wo es für den Ladungstransport kritisch wird. Aber auch dieses Problem ist erfolgreich gelöst worden.

Die Schrödinger-Gleichung sagt dabei voraus, daß Silizium in dieser amorphen Phase nicht mehr so bindungsstark gegenüber dem Wasserstoff ist wie in der kristallinen oder in der multikristallinen Phase. Und prompt beobachtet man bei den Solarzellen aus amorphem Silizium, was die Theoretiker erwartet hatten und den Praktikern Kopfzerbrechen bereitete. Kaum setzt man diese Solarzellen dem Sonnenlicht aus, reicht dessen Energie, den atomar gebundenen Wasserstoff wieder freizusetzen aus der Bindung ans Silizium. Es verbinden sich anschließend zwei Wasserstoffatome und diffundieren als H_2-Molekül langsam heraus. Und der Wirkungsgrad der Solarzelle aus amorphem Silizium wird dabei immer schlechter. Die Theoretiker wissen zwar Rat und sagen: Ihr müßt da noch etwas zusätzlich hineinbringen, was den Wasserstoff noch besser bindet. Leider hat man die perfekte Lösung bis heute nicht gefunden.

Ich betrachte hier die technische Handhabbarkeit des Halbleiter-Werkstoffes auf der Basis mathematisch-physikalischer Erwägungen. Die Aufgabe der künftigen Jahre wird sein – wenn ich diese Linie weiterverfolge –, daß man für die Verbesserung von Solarzellen Mischphasen bildet, die im Silizium nicht nur den Wasserstoff als Mittel zur Passivierung der inneren Oberflächen festhalten, sondern mit noch anderen Fremdstoffen inhomogene Mischphasen von neuen Halbleiter-Werkstoffen bilden, die in ihren Absorptionseigenschaften dem Sonnenlicht noch besser entsprechen als Silizium. Dafür gibt es wieder klare Erwartungen der Theorie, den gegenwärtig recht geringen Wirkungsgrad der allerbesten Solarzellen zum Beispiel aus III/V-Halbleitern wie AlGaAsP von 30 % auf 60 %, ja auf 70 % zu steigern. Die Theoretiker sagen sogar: Entsprechend dem Carnot-Wirkungsgrad η liegt die Grenze der photovoltaischen Energiewandlung bei $\eta = 96$ % !

Ich fasse meine These zusammen: Die technische Handhabbarkeit von Halbleiter-Werkstoffen gelingt seit langem erfolgreich unter den Gesichtspunkten der immer neu angepaßten Modellbildung der Festkörpertheorie.

Jens Reich

Die Rolle der Mathematik in der Biologie des genomischen Zeitalters

Ich habe mir zu der Frage Gedanken gemacht, ob Biologie mathematisierbar ist. Rein empirisch denke ich sofort: Nein! Vor allem, wenn mir einfällt, daß ein Drittel der Abiturienten in die Biologie oder Medizin geht, weil sie für den Rest ihres Lebens genug von Mathematik haben und hoffen, damit nicht weiter behelligt zu werden. Wenn man sich die Grundlagen dieser beiden Fächer näher ansieht, sind doch Begriffswelt, Denkweise und Gesetzlichkeit fundamental verschieden. Die Axiomatik und Deduktivität der Mathematik, ihr reduktionistischer, ja minimalistischer Ansatz, die völlig verschiedenen Charaktere von Beweisbegriff und Beweisstruktur zwischen diesen beiden Fächern – nein, eigentlich sind sie inkompatibel. Das ist meine These. Aber andererseits habe ich nun auch schon viele Jahre, sogar Jahrzehnte Spaß gehabt, als Biomediziner immer wieder einmal auf Mathematik zu stoßen. Hierzu mußte ich eine Reihe von Gebieten der Mathematik erlernen, die strategische Bedeutung in unserem Fach, in unserer Forschung wie in unserer Praxis hatten. Also vor allem selbstverständlich die mathematische Statistik, ihre Basis: die Probabilistik und die Stochastik – das sind Gebiete der Mathematik, deren Entwicklung zum Teil von der Biologie direkt bestellt worden ist. Denken Sie nur an die Varianzanalyse als mathematische Disziplin, die ausdrücklich für biologische Sachverhalte erfunden worden ist. Oder denken Sie an die Koaleszenztheorie, mit der man heute versucht, den gegenwärtigen Zustand von genetischen Populationen zurückzuverfolgen, um unter gewissen, wiederum minimalistischen Grundannahmen den wahrscheinlichen Verlauf der Evolution zu rekonstruieren. Oder an die Theorie dynamischer Systeme, die räumlichen und zeitlichen hierarchischen Systeme, die man mit ihr erzeugen und analysieren kann, einschließlich Multistabilität und Chaotik. Hinzu kommt alles, was mit Systemtheorie von Wechselwirkungen zu tun hat, Graphentheorie, Netzwerktheorie, Steuerungstheorien und dann schließlich die ganzen Entwürfe, die Systemtheorie des Zellstoffwechsels oder die Kinetik und Thermodynamik biochemischer Reaktionen. Das alles muß man lernen, wenn man theoretisch in der Biologie und Medizin arbeitet. Es ist ganz erstaunlich, in welchem Maße die Rolle der Mathematik sich in den Jahrzehnten, die ich überblicke, von einem mehr oder weniger freundlich akzeptierten Status als Hilfsdienst, als Magd der biologischen oder medizinischen Forschungspraxis zur Inhaberin einer strategischen Position gemausert hat. Die moderne Genomforschung etwa ist nicht nur vom Einsatz von Computern, sondern auch vom Einsatz mathematischer Begriffe und Sätze und von Methoden abhängig. Nur ein Beispiel: Alle Welt, die in der Genomforschung arbeitet, kennt das Verb „Blasten". Das ist ein Suchverfahren, mit dem man in einer unübersehbaren Menge von DNS oder Eiweißstrukturen homologe, das heißt ihrer Herkunft nach verwandte Strukturen herausfindet. Die Methode, mit der das möglich ist, ist im Grunde genommen eine erweiterte Form eines ganz primitiven, wahrscheinlichkeitstheoretischen Problems, nämlich: Wenn ich sehr oft eine Münze hochwerfe und Kopf und Zahl registriere – wie häufig ist es da, oder wann ist es zu erwarten, oder wie überraschend ist es, wenn eine ununterbrochene Folge von Köpfen herauskommt. Zehn oder fünfzehn Mal ist wohl das äußerste, wenn die Münze nicht einseitig beklebt ist oder irgendwie sonst unfair geworfen wird. Und die ganze Theorie, die dazu gehört, ist von Erdös und Renyi in dieser einfachen Form ausgearbeitet worden und von Samuel Karlin erweitert worden für Gensequenzen, von denen wir ja Millionen und bald auch Milliarden haben und immer mehr bekommen. Dann hat der US-amerikanische Mathematiker Karlin eine Theorie zufälliger Sequenzähnlichkeit entwickelt, schließlich noch ein Tool, mit dem heute Sequenzanalyse auf dem Computer durchgeführt wird, und das für die Zuverlässigkeit und Genauigkeit und den heuristische Wert solcher Analysen unabdingbar, von strategischer Bedeutung ist. Dabei ist interessant, daß der Ansatz nicht aus einer Reduktion des Lebendigen folgt, aus einer physikochemischen Theorie der Evolution, sondern ein rein heuristischer Ansatz ist, bei dem die Probabilistik direkt ein Modell liefert, wie man einen in zahllosen Daten versteckten Sachverhalt aufklären kann.

Die These ist also, daß Mathematik und Biologie gar nicht vereinbar sind, obwohl sie praktisch unabdingbar miteinander strategisch verbunden sind. Ein zweites Paradoxon: Die meisten mathematischen Anwendungen, die ich in unserem Fach sehe, sind eigentlich physikalisch-chemische Modelle – zum Beispiel eine Nervenzelle mit ihren ionen-elektrischen Zuständen, oder in einem chemischem System etwa die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion. Und dort trifft man dann natürlich soviel Mathematik, wie in Physik und Chemie bereits als Grundlage vorhanden sind. Ähnlich ist es mit der Kristallographie von Proteinen. Aber erheblich zugenommen hat ein anderer Zugang, nämlich die direkte Heuristik, die über Simulation großer Systeme erfolgt. Simulationsmodelle können ganz phänomenologisch aufgebaut sein, was nicht unbedingt auf irgendwelche fundamentalen Gleichungen zurückführbar sein muß. Auch das sogenannte *data mining* in großen Datenbanken gehört hierher. Das sind mathematische Methoden, um aus einer riesigen Zahl von Literaturstellen die passenden herauszusortieren, ohne daß die wichtige Information in einem Müllberg von irrelevanten Treffern versinkt. Auch die diskrete Mathematik und speziell Kombinatorik gehen ohne Umweg über Physikochemie in die Analyse genetischer Systeme von Populationen ein. Ich habe den Eindruck, daß diese direkte Ehe zwischen angewandten mathematischen Disziplinen und der Biologie stark zunimmt.

Gerhard Roth

Ist das menschliche Gehirn mathematisierbar?

Wir Menschen sind besonders stolz auf die Größe unseres Gehirns. Häufig heißt es, der Mensch habe das größte und komplizierteste Gehirn. Ob es das komplizierteste ist, das wissen wir nicht – das größte ist es bei weitem nicht. Es wiegt 1,2 bis 1,4 Kilogramm; das ist relativ viel, und der Mensch liegt durchaus in der Spitzengruppe, aber es gibt Tiere mit 10 Kilogramm Gehirngewicht. Was diese Tiere damit machen, ist eine andere Frage.

Eine weitere gängige Behauptung lautet, der Mensch besitze im Vergleich zu seinem Körper das größte Gehirn (relative Hirngröße). Wenn man die Gehirne verschiedener Gruppen von Wirbeltieren (Knorpel- und Knochenfische, Amphibien, Reptilien, Säugetiere, Vögel) vergleicht, kommt man auf eine einfache Beziehung, die seit langem bekannt ist: Die Gehirngröße bzw. das Gehirngewicht wird im wesentlichen bestimmt von der Körpergröße bzw. dem Körpergewicht: Kleine Tiere haben kleine, große Tiere große Gehirne. Trägt man die Gehirngrößen (Ordinate) der verschiedensten Wirbeltiergruppen gegen deren jeweilige Körpergröße (Abszisse) in doppeltlogarithmischer Weise auf, dann erhält man eine Punktwolke, die sich um eine Regressionsgerade verteilt, die eine Steigung von ungefähr 0,6 hat. Wäre die Steigung der Geraden 1, so hieße dies, daß die Gehirngröße bzw. das Gehirngewicht in demselben Maße zunimmt wie die Körpergröße bzw. das Körpergewicht. Dies würde man *isometrisches* Wachstum nennen. Das ist aber nicht der Fall, sondern die Gehirngröße nimmt langsamer zu als die Körpergröße. Dies nennt man *negativ allometrisches* Wachstum. Es bedeutet, daß das Gehirn an Größe/Gewicht zwar absolut zunimmt, relativ zur Körpergröße bzw. zum Körpergewicht aber abnimmt. Während bei sehr kleinen Tieren (z. B. Spitzmäusen) das Gehirn 10 % des Körpervolumens ausmacht, stellt es bei sehr großen Säugetieren wie den Walen 0,01 % dar. Beim Menschen beträgt der Wert rund 2 %.

Man erkennt in unserer imaginierten Darstellung auch, daß die Gehirngrößen der verschiedenen Wirbeltiergruppen Punktwolken bilden, die sich parallel zu dieser Regressionsgeraden erstrecken. Dies bedeutet, daß bei allen Wirbeltieren die Gehirngröße mit der Körpergröße in ungefähr demselben Maße zunimmt. Allerdings liegen diese Punktwolken unterhalb, auf oder oberhalb der Regressionsgeraden, was heißt, daß die unterschiedlichen Wirbeltiergruppen grundlegend unterschiedliche Körpergewicht-Hirngewicht-Beziehungen haben, was sich in unterschiedlichen Schnittpunkten der jeweiligen Regressionsgeraden durch diese einzelnen Punktwolken mit der y-Achse ausdrückt. Säuger und Vögel haben grundsätzlich größere Gehirne relativ zur Körpergröße, Fische, Amphibien und Reptilien grundsätzlich kleinere. Der Mensch hat also schon deshalb ein relativ großes Gehirn, weil er ein Säugetier ist. Zeichnet man ein entsprechendes Diagramm nur für Säugergehirne, so zeigt sich dieselbe Situation. Die Regressionsgerade hat eine Steigung von ca. 0,6, und einige Gehirne liegen unterhalb, andere oberhalb der Geraden und einige liegen genau darauf, haben also ein unter- oder überdurchschnittlich oder durchschnittlich großes relatives Gehirngewicht. Der Mensch liegt deutlich über der Geraden, zusammen mit anderen Menschenaffen (Schimpanse, Gorilla, Orang Utan) und Delphinen. Wale und das Nilpferd liegen darunter, und Hund, Pferd und der afrikanische Elefant liegen genau darauf.

Irgendetwas Besonderes ist also doch mit dem menschlichen Gehirn, das es aber mit den anderen Menschenaffen und den Delphinen teilt. Sie haben alle Gehirne, die wesentlich größer sind, als man allein von der Körpergröße her erwarten würde. Beim Menschen ist das Gehirn fast achtmal, beim Delphin fünfmal und beim Schimpansen immerhin noch zweieinhalbmal so groß wie im Säugerdurchschnitt. In allen Fällen kann man zeigen, daß während der Evolution dieser Tiergruppen die Gehirne an Größe bzw. Gewicht schneller zugenommen haben als der Körper. Innerhalb weniger Millionen Jahre ist das menschliche Gehirn von 450 Gramm auf rund 1.300 Gramm gewachsen.

Man weiß oder ahnt inzwischen auch, woran das liegt, nämlich an einer Verjugendlichung des menschlichen Bauplans – Pädomorphismus genannt –, in deren Rahmen beim Gehirnwachstum ein paar Zellteilungszyklen dazugekommen sind, und das führt zu einer sehr raschen Größenzunahme in fast allen Teilen des Gehirns. Die Hirnrinde als Sitz des Bewußtseins oder das Stirnhirn als Sitz von Vernunft und Verstand sind dabei zwar noch etwas größer geworden, aber auch dies unterliegt allgemeinen Wachstumsgesetzen, denn es findet sich auch bei den anderen Tieren mit sehr großen Gehirnen. Wir stellen also fest, daß die Größe unseres menschlichen Gehirns und auch der Teile, auf die wir besonders stolz sind wie die Großhirnrinde und insbesondere das Stirnhirn, ziemlich klaren Wachstumsgesetzen unterliegen, die gut mathematisierbar sind. Das menschliche Gehirn liegt „im Trend“ und zeigt hierbei nirgendwo spektakuläre Ausreißer.

Nun kommt es sicher nicht nur auf die Gehirngröße an, sondern vornehmlich darauf, „was drin ist“. Gehirne bestehen bekanntlich aus Nervenzellen (wir sehen von den Gliazellen als Stütz- und Versorgungszellen einmal ab). Wenn die Großhirnrinde (Cortex) Sitz von Bewußtsein, Verstand, Intelligenz und Sprache ist, dann ist zu erwarten, daß die Leistungsfähigkeit in diesem Bereich mit der Zahl der Nervenzellen (Neurone) zusammenhängt. Wenn man dies ausrechnet, so kommt man beim Menschen auf eine Zahl von rund 12 Milliarden Cortex-Neuronen. Allerdings haben Elefanten und Wale nur etwas weniger, nämlich 11 bzw. 10 Milliarden.

Drei Fragen ergeben sich in diesem Zusammenhang. Die erste Frage lautet, warum es beim Menschen nicht mehr sind, wenn doch der Mensch in seinen geistigen Leistungen den Elefanten und auch den Walen bzw. Delphinen deutlich überlegen ist, was man aufgrund sehr vieler Untersuchungen und ohne ein Mensch-Chauvinist zu sein, zugeben muß. Die zweite Frage lautet, warum der Mensch immerhin mehr, wenngleich nicht viel mehr Cortex-Neurone hat, wobei doch Elefanten und Wale viel größere Gehirne (4 – 10 kg) und auch Hirnrinden haben. Und die dritte Frage lautet, ob es denn wirklich im wesentlichen auf die Neuronenzahl ankommt.

Untersucht man die Großhirnrinden von Elefanten, Walen und Delphinen (die zoologisch gesehen Wale sind) und vergleicht sie mit der Hirnrinde des Menschen, so stellt man fest, daß der Mensch eine viel dickere Großhirnrinde hat und daß hierin noch die Zellpackungsdichte erheblich höher ist. Dies erklärt die höhere Zahl an Cortex-Neuronen beim Menschen. Aber können eine Milliarde Neurone mehr den großen intellektuellen Unterschied zwischen Mensch einerseits und Elefant und Walen/Delphinen, die ja durchaus als sehr klug gelten, erklären? Sofort fällt einem die Verknüpfungsdichte zwischen den Neuronen ein. Allerdings ist die bei all diesen Großhirnrinden mehr oder weniger gleich, soweit wir das wissen: Jedes Cortex-Neuron ist beim Menschen, Elefanten und Wal mit ca. 30.000 anderen über Kontaktpunkte, Synapsen genannt, verbunden. In Fall eines jeden Gehirns kommen wir auf eine astronomisch hohe Zahl von Verknüpfungen, die etwa eine halbe Trillion umfaßt.

Dennoch: Wie kann man sich den „intellektuellen" Unterschied zwischen Mensch einerseits und Elefant, Wal und Delphin (und natürlich auch den anderen Menschenaffen) andererseits erklären? Bei dem weiteren Studium fällt auf, daß die Fortsätze (Axone) der Neurone in der menschlichen Großhirnrinde eine viel höhere Leitungsgeschwindigkeit aufweisen als die des Elefanten und der Wale/Delphine, schätzungsweise eine dreimal höhere. Dies hängt unter anderem mit der viel dickeren Myelinscheide (der Isolationsschicht) der Axone zusammen. Hinzu kommt, daß wegen der geringeren Größe des menschlichen Cortex die Abstände zwischen den Nervenzellen viel kleiner sind. Dies bedeutet: Die menschliche Großhirnrinde kann sehr viel schneller arbeiten. Untersuchungen am Menschen haben übrigens ergeben, daß der Intelligenzquotient einer Person signifikant mit der Leitungsgeschwindigkeit seiner corticalen Axone korreliert, die übrigens interindividuell durchaus schwankt. Bei den gigantischen Neuronen-Netzwerken innerhalb der Großhirnrinde macht die bloße Verarbeitungsgeschwindigkeit schon sehr viel aus.

Wir sehen also, daß die Leistungsfähigkeit von Gehirnen einschließlich des menschlichen Gehirns von fundamentalen physikalischen und biologischen Prinzipien bestimmt wird, die ohne weiteres mathematisierbar sind. Können wir diese Überlegungen weiter treiben? Bekanntlich kann man heutzutage mit Hilfe der sogenannten funktionellen Kernspintomographie die Aktivität des menschlichen – und natürlich auch tierischen – Gehirns messen. Was man dabei mißt, ist die Stoffwechselaktivität und die damit verbundene Veränderung des Blutflusses im Gehirn. Dabei gilt folgende höchst bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit: Eine erhöhte geistig-psychische Tätigkeit (Aufmerksamkeit, Nachdenken, starke Gefühlsaufwallungen) hängt mehr oder weniger linear mit einer erhöhten Aktivität von Nervenzellen in bestimmten Hirnzentren zusammen. Diese wiederum hängt mehr oder weniger linear mit der Stoffwechselaktivität der Zellen und ihrer Bestandteile, vornehmlich mit ihrem Sauerstoff- und Zuckerverbrauch, zusammen, und diese Stoffwechselaktivität hängt wiederum mehr oder weniger linear mit der Erhöhung bzw. Erniedrigung des Blutflusses (über den Sauerstoff- und Zuckertransport) zusammen. Geist benötigt Energie, und dies läßt sich in relativ simplen Gleichungen der Physiologie und Chemie ausdrücken.

Ein weiterer überraschender Zusammenhang ist die große Parallelität der Hirnentwicklung in der organischen und psychischen Entwicklung des Kindes: Die Myelinisierung der Axone, die Ausreifung der Dendriten der Nervenzellen, besonders der feinverzweigenden sekundären und tertiären Dendriten, laufen aufs Engste parallel zu der Weise, wie Kinder sich psychisch entwickeln, wann sie bestimmte Bewußtseinsstufen, wann sie soziales Bewußtsein entwickeln. Hierzu gehört das erstaunliche Faktum, daß der über den Augen liegende Teil des Stirnhirns, der sogenannte orbitofrontale Cortex, bis zum 18. Lebensjahr hin ausreift, genau dann, wenn junge Menschen hoffentlich zu ein bißchen Verstand und Vernunft kommen. Ein weiteres Beispiel ist die Entwicklung der Sprache. Mit zweieinhalb Jahren beginnen Kinder, eine syntaktisch-grammatikalische Sprache zu entwickeln, und genau dann ist das sogenannte Broca-Areal im Stirnhirn halbwegs ausgereift, das die Grundlage unserer menschlichen syntaktisch-grammatikalischen Sprache bildet. Diese Sprache unterscheidet uns von den anderen Tieren, und ihre Evolution vor ca. 60.000 Jahren scheint die damals bereits vorhandenen geistigen Fähigkeiten des Menschen ungeahnt gesteigert zu haben, so wie es später die Erfindung der Schrift und die Erfindung des Computers taten: ein scheinbar kleiner Schritt mit großer Wirkung.

Alles zusammengefaßt: Niemand kann das Gehirn zur Zeit berechnen, aber es zeichnet sich in allem, was man immer subtiler untersucht, durch eine große Gesetzmäßigkeit aus, die bis in die höchsten, kompliziertesten Dinge hineingeht, das heißt in die Sphären des Geistes. Ob man jemals den Inhalt von Gedanken systematisch lesen wird, wissen wir nicht, aber ein früherer Mitarbeiter von mir, John Haynes, hat kürzlich zeigen können, daß man aufgrund der Kenntnis der aktuellen Aktivitätslage von Nervenzellen in den primären, unbewußt arbeitenden Sinnesarealen der Großhirnrinde vorhersagen kann, was eine Drittelsekunde später im Bewußtsein auftauchen wird. Das bedeutet, daß auch das Entstehen von Bewußtsein in bestimmtem Maße berechenbar ist. Das rückt unser Gehirn zumindest in die Nähe der Mathematik. Geist übersteigt nicht die Natur, sondern fügt sich in deren Gesetzmäßigkeiten ein – welch besondere Eigenschaften Geist auch immer haben mag.

Reinhold Kliegl

Multiple Zeitskalen in den Fixationsbewegungen der Augen

In den Sozialwissenschaften ist theoretischer Fortschritt ohne Mathematisierung der Natur nur schwerlich vorstellbar. Herr Müllers dritte These über die Herausforderung, *Multiskalenprobleme* zu verstehen, hat mich zu einem spontanen Statement ermutigt, in dem ich Ihnen dieses Konstrukt am Beispiel von Fixationsbewegungen der Augen erläutern möchte. Herr Müller hat uns das Konstrukt der multiplen Zeitskalen nahe gebracht, weil diesem in seinem Arbeitsgebiet eine aktuelle und bedeutende Rolle bei der Mathematisierung der Natur zukommt. Mein Statement ergänzt diese Einschätzung aus einer völlig anderen und vielleicht auch für manche unerwarteten Perspektive.

1 Vorbemerkung

Meine These ist, daß die moderne experimentalpsychologische Forschung, zu der Hermann von Helmholtz mit seinem *Handbuch der physiologischen Optik* (1866) und seiner *Lehre von den Tonempfindungen* (1863) grundlegende und nachhaltige Beiträge geliefert hat, zunehmend die Zusammenarbeit mit der Theoretischen Physik suchen wird – und umgekehrt. An der Universität Potsdam besteht eine solche Kooperation seit zehn Jahren. Wir verwenden in den Nichtlinearen Wissenschaften entwickelte Verfahren für die Beschreibung und Erklärung kognitiver Prozesse, die für die Steuerung von komplexem Verhalten, beispielsweise der Augen beim Lesen, verantwortlich sind (Engbert, Nuthmann, Richter & Kliegl, 2005). Warum ist das zeitgemäß? Der Gegenstand der Psychologie ist die Erklärung von Verhalten, und Verhalten entfaltet sich in der Zeit. Aus physikalischer Perspektive scheint es wenig plausibel, daß man Prozesse, die sich in der Zeit entfalten, ohne geeignete mathematische Verfahren, wie zum Beispiel Differentialgleichungen oder dynamische Feldtheorie, verstehen kann. Das „Problem" der Psychologie ist natürlich, daß sie für die meisten Verhaltensprozesse keine ausreichend hohe Datendichte für die effektive Verwendung dieser Verfahren hat. Es gibt aber auch Forschungsthemen, bei denen dies möglich ist. Wir messen zum Beispiel die Blickbewegungen beider Augen mit 500 Hz.

Der technische Fortschritt, zum Beispiel die Verfügbarkeit von Videokameras, mit denen 1.000 Bilder pro Sekunde aufgezeichnet werden, wird uns in Zukunft die Messung hochaufgelöster Zeitreihen auch in vielen anderen Bereichen menschlichen Verhaltens ermöglichen (z. B. die Mimik von Gesichtsbewegungen) und damit auch die Analyse von Verhalten mit den modernen Verfahren der Mathematik.

2 Fixationsbewegungen der Augen

Viele Menschen glauben, daß sich bei konzentrierter Fixation eines Punktes die Augen nicht bewegen. Das ist falsch. Die Augen sind immer in Bewegung; wir können die Augen nicht anhalten. In der Tat sind diese Fixationsbewegungen konstitutiv dafür, daß wir überhaupt etwas sehen! Befestigt man nämlich ein Bild so auf der Hornhaut, daß es jede Bewegung des Augapfels mitmacht, verschwindet dieses Bild nach ca. 10 bis 15 Sekunden; es bleibt nur die Farbe des Hintergrunds (Riggs, Ratliff, Cornsweet & Cornsweet, 1953). Grund dafür ist, daß sich die Sehsubstanz in den Rezeptoren durch die konstante Stimulation nicht mehr regeneriert. Wenn sich die Augen nicht ständig bewegen würden, liefen wir Gefahr, überhaupt nichts wahrzunehmen. Normalerweise gehen wir davon aus, daß die Wahrnehmung Grundlage unseres Verhaltens ist; bezogen auf das Sehvermögen ist es aber umgekehrt: Das Verhalten der Augen, das heißt die Fixationsbewegung, ist eine wichtige Voraussetzung für Wahrnehmung!

Was wissen wir über die Mathematik dieser Fixationsbewegungen? Es gab die Vermutung, daß sie sich als eine Brownsche Bewegung beschreiben lassen, daß es sich also um völlig zufällige Bewegungen (random walks) handelt. Das bedeutet, daß man aus der Kenntnis des bisherigen Verlaufs der Fixationsposition nicht vorhersagen kann, in welche Richtung sich diese Position im nächsten Augenblick verändern wird. Die Brownsche Bewegung geht auf die Beobachtung zurück, daß ruckartige Bewegungen von Pollen in einer Flüssigkeit die Folge von thermisch bedingten Molekularbewegungen der Flüssigkeit sind. Die Erklärung veröffentlichte Einstein in seinem dritten berühmten Artikel des Jahres 1905 über die zufälligen Bewegungen „von in ruhender Flüssigkeit suspendierten Teilchen", der die stochastische Physik begründete. Einsteins Erklärung beinhaltete auch die mathematische Ableitung, daß die Distanz zwischen zwei sich zufällig bewegenden Teilchen über die Zeit größer wird. Wenn sich die Augen also gemäß der Brownschen Bewegung verhielten, dann würden sie mit mathematischer Notwendigkeit auseinanderlaufen. Da wir in der Regel keine Doppelbilder erleben, verfügt unser Sehsystem offensichtlich über Möglichkeiten, diesem Auseinanderlaufen der Augen entgegen zu wirken.

Lassen Sie mich kurz die zwei Hypothesen zu möglichen Funktionen der Fixationsbewegungen der Augen zusammenfassen: Zum einen gibt es die Hypothese, daß die Fixationsbewegungen verhindern, daß unser retinales Bild verblaßt, daß also die Bewegung der Augen dazu führt, daß die Rezeptoren die Möglichkeiten haben, sich zu erneuern und dadurch im Prinzip die Wahrnehmung erst möglich wird. Zum anderen liegt die Hypothese nahe, daß Fixationsbewegungen das Auseinanderlaufen der Augen verhindern. Es gibt eine ansehnliche Forschungsliteratur, die diese Hypothesen punktuell bestätigt, aber immer wieder auch Befunde, die für die Fixationsbewegungen selbst die Angemessenheit der Brownschen Bewegung nahe legt (Carpenter, 1988). Es fehlte bislang ein einheitlicher theoretischer Rahmen.

3 Eine Erklärung mit Bezug auf multiple Zeitskalen

Mein Kollege Ralf Engbert und ich konnten nun vor kurzem zeigen, daß beide Funktionen sich direkt aus den Fixationsbewegungen ableiten lassen (Engbert & Kliegl, 2004). Allerdings müssen wir hierfür unterschiedliche Zeitskalen betrachten. Auf einer *kurzen Zeitskala*, das heißt, wenn wir vorhersagen, wo sich die Augen im Mittel in ca. 10 bis 15 Millisekunden befinden werden, ergibt sich ein positiver Zusammenhang, ein sogenanntes persistentes Verhalten: Die Augen „möchten" in die Richtung weiter gehen, in der sie sich gerade bewegen. Das bedeutet, daß die Augen dazu tendieren, sich von dem Ort zu entfernen, an dem sie gerade waren. Das ist natürlich genau das Verhalten, das einem Verblassen des retinalen Bildes entgegenwirkt.

Wenn man nun berechnet, wie sich die Augen auf einer *langen Zeitskala* verhalten, das heißt, wo sich die Augen im Mittel in ungefähr 100 Millisekunden befinden werden, findet man ein sogenanntes antipersistentes Verhalten, das heißt, die Augen haben eine Tendenz, in die Richtung zurückzugehen, wo sie vor 100 Millisekunden ungefähr waren. Und das ist natürlich ein Mechanismus, der möglicherweise dazu beiträgt, daß die Augen sich wieder synchronisieren. Die früheren Befunde, die für die Augen eine Brownsche Zufallsbewegung nahe legten, übersahen diese Überlagerung von persistentem und antipersistentem Verhalten auf verschiedenen Zeitskalen.

Die mathematische Grundlage von persistentem und antipersistentem Verhalten beruht auf einer Verallgemeinerung der Einsteinschen Formel, die von Mandelbrot und van Ness (1968) im Rahmen der fraktionierten Brownschen Bewegung gefunden wurde:

$$\langle(\Delta x)^2\rangle \propto \Delta t^{2H}$$

Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen Distanz und Zeit eines Teilchens oder eben der Fixationsbewegung eines Auges oder auch der Distanz zwischen zwei Augen. Der Exponent H, der sogenannte Hurst Exponent, regelt das Verhalten: Bei einem Wert von 0.5 ergibt sich die Einsteinsche Formel; Werte kleiner als 0.5 charakterisieren persistentes und Werte größer als 0.5 antipersistentes Verhalten.

Lassen sich die Funktionen der Fixationsbewegungen weiter differenzieren? Wenn man die Fixationsbewegungen im Detail betrachtet, dann lassen sich neben dem durch die Augenmuskeln verursachten Tremor ein eher langsames Gleiten (*drift*) und ruckartige Bewegungen von weniger als etwa 1° innerhalb einer Fixation unterscheiden. Diese ruckartigen Bewegungen heißen Mikrosakkaden; sie treten meistens, manche behaupten immer, koordiniert in beiden Augen auf. Mikrosakkaden bewegen das Auge von einem Ende eines betrachteten Buchstabens zum anderen. Wenn wir diese Mikrosakkaden aus der Trajektorie des Auges entfernen, dann verhalten sich die Augen nahezu gemäß der Brownschen Bewegung. Das heißt, daß es vor allem die Mikrosakkaden sind, über die persistentes und antipersistentes Verhalten der Augen gesteuert wird.

4 Schlußbemerkung

Bringen wir die Mathematik zur Natur oder entdecken wir die Mathematik in der Natur? Mein Statement hat sich offensichtlich wenig um die Beantwortung dieser Frage bemüht. Ich möchte aber mit einer kurzen Einschätzung der Relevanz der Mathematik für die experimentalpsychologische Theoriebildung schließen. Die Prinzipien psychologischer Theorien lassen sich häufig ohne Gleichungen formulieren. Zum Beispiel: „Die Dynamik der Fixationsbewegungen haben die zwei Funktionen, einerseits dem Verblassen des retinalen Bildes entgegen zu wirken und andererseits das Auseinanderlaufen der Augen zu Verhindern.“ Selbst die folgende Aussage ließe sich mit didaktischem Geschick ohne Mathematik vermitteln: „Die beiden Funktionen der Fixationsbewegungen sind auf verschiedenen Zeitskalen, einer kurzen und einer eher langen, verortet.“ Die Tatsache, daß es sich hier um einen neuen Befund handelt, legt aber nahe, daß wir ihn ohne die Mathematik nicht gefunden hätten. Dafür sind wir Psychologen den Physikern und Mathematikern sehr dankbar.

Literatur

Carpenter, R. H. S.: Movements of the eyes (2nd ed.), London: Pion, 1988.

Einstein, A.: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: Annalen der Physik 322 (2005), S. 549–560.

Engbert, R. & R. Kliegl: Microsaccades keep the eyes' balance during fixation. In: Psychological Science 15 (2004), S. 431–436.

Engbert, R., Nuthmann, A., Richter, E. & R. Kliegl: SWIFT: A dynamical model of saccade generation during reading. In: Psychological Review 112 (2005), S. 777–813.

Helmholtz, H. v.: Handbuch der physiologischen Optik, Leipzig: Voss, 1866.

Helmholtz, H. v.: Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik, Braunschweig: Vieweg, 1863.

Mandelbrot, B. B. & J. W. van Ness: Fractional brownian motions, fractional noises and applications. In: SIAM Reviews 10 (1968), S. 422–436.

Riggs, L. A., Ratliff, F., Cornsweet, J. C. & T. N. Cornsweet: The disappearance of steadily fixated tests objects. In: Journal of the Optical Society of America 43 (1953), S. 495–501.

Hubert Markl

Nicht das Gehirn erkennt Regeln: Die Regelhaftigkeit der Natur machte Gehirne erst möglich

Herrn Roths wunderschöner Beitrag hat mich provoziert, seine Argumente, die ich völlig teile, noch ein klein bißchen zu verlängern oder eigentlich umzukehren. Dagegen wird er, so vermute ich, in diesem Fall noch nicht einmal etwas haben.

Uns beschäftigt hier die Frage, ob Mathematik auf alle Wissenschaften paßt, oder ob sie notwendig ist für alle Wissenschaften. Herr Roth hat uns – jedenfalls für mich überzeugend – dargelegt, daß die Leistungen eines Gehirns nicht völlig algorithmisch berechenbar sind. Jedenfalls gibt es einen Grad an Komplexität, den wir zumindest heute nicht rechnerisch erfassen können; vielleicht wird das sogar niemals möglich sein. Ich stimme ihm darin vor allem deshalb zu, weil ich überzeugt bin, daß darauf zumindest ein Teil des Geheimnisses unserer Willensfreiheit beruht – wovon er natürlich gar nicht überzeugt ist.

Nun möchte ich die verlängerte Gegenthese vorbringen und behaupten, daß das Gehirn, daß unser Denken überhaupt nur aufgrund von „mathematischen" Fähigkeiten möglich ist – worunter ich für unsere Diskussion zunächst einmal vor allem die Fähigkeit, Regelhaftigkeiten in der Welt, die uns umgibt, zu erkennen, verstehen möchte. Ich will das begründen, indem ich bis in die frühesten Stadien der Entwicklung eines neuronalen Systems zurückgehe, also sagen wir bis zu den Quallen, jenen freischwimmenden Hohltieren (*Coelenterata*), bei denen das erstmals begann. Wenn wir uns nämlich überlegen, warum Quallen ein Nervensystem (ein wirkliches „Gehirn" besitzen sie noch nicht) entwickelt haben, dann kann man antworten: Sie müssen immerzu ihre Gallertglocke rhythmisch kontrahieren, damit sie nicht in die Tiefen des Meeres absinken, und dazu brauchen sie ein Koordinationssystem für ihre Muskelzellen, also ein Zentralnervensystem. Dem muß jedoch nicht so sein. Wir wissen, daß es bei anderen Tieren Muskelsysteme gibt, die auch ohne Nervensystem lebenslang rhythmische Kontraktionen ausführen, manche Herzen zum Beispiel. Aber: Wenn Tiere über ein Sinnesnervensystem, selbst in einfachster Weise, irgendwelche Informationen aus der Umwelt aufnehmen und berücksichtigen wollen, weil sie beweglich sind, also in ihr Verhalten einfließen lassen wollen, dann müssen sie vor allem zufällige Ereignisse von Regelhaftigkeiten unterscheiden können, das heißt, sie müssen quantifizieren. Man sagt jedoch eigentlich immer, daß dann, wenn quantifiziert wird und wenn Regelhaftigkeiten berücksichtigt werden, Logik und Mathematik beginnen – natürlich nur in allereinfachstem, fast schon urtierhaft metaphorischem Sinne.

Hierin gründet überhaupt der Beginn des Besitzes eines Nervensystems. Ich würde insofern sagen, auch wir Menschen besitzen nur ein Nervensystem, das schon aus unserer Evolution als Tiere stammt, weil wir es als „mathematisches" Organ, als quantifizierendes, als kausale Zusammenhänge oder jedenfalls Korrelationen erkennendes Organ brauchten. Erst später sind daraus dann die Fähigkeiten entstanden, – weil ja auch die Regelhaftigkeiten der Umwelt nicht so sind, daß sich immer alles regelmäßig wiederholt, sondern daß sie statistisch variant, also stochastisch überlagert, auftreten, – unter dem, was variabel daherkommt, das, was belangvoll ist, aus dem, was es nicht ist, herauszusortieren, also zu unterscheiden oder zu erkennen; zufällige Korrelationen müssen ja erst – durch empirische, also experimentelle Prüfung – von wirklichen Kausalbeziehungen unterschieden werden, damit aus post hoc propter hoc erkennbar wird; denn erkennen heißt ja vor allem unterscheiden können. Die ganze Lerntheorie findet hier in Kontingenz und Kontiguität ihre Wurzeln, so daß wir sagen können: Wir können nur denken – jetzt über die ganze evolutionäre Spanne hinwegbetrachtet –, weil wir in unserem Zentralnervensystem von den Ursprüngen an ein „mathematisches Organ" entwickelt haben. Keinesfalls sollten wir fragen: Paßt mathematisches Denken überhaupt auf unser Gehirn? Vielmehr scheint jedes Zentralnervensystem, also auch unser Gehirn, vom – evolutionären – Anfang an an eine Welt angepaßt, die von quantifizierbaren Regelhaftigkeiten geprägt ist.

Nun gibt es noch eine Ergänzung zu dieser ganzen, sicherlich höchst spekulativen Überlegung. Denn wenn das stimmt: *„de singularibus non est scientia"*, wie wir das schon aus der mittelalterlichen Philosophie gelernt haben, daß also alle wissenschaftliche Erkenntnis voraussetzt, daß sich irgendwas wiederholt und dadurch quantifizierbar – also mathematisierbar – wird, so müßten erst die Besonderheiten menschlichen Verhaltens solche Singularitäten ermöglichen, und zwar nur, wenn es Singularitäten sind, die die – durch Regeln vorgegebenen – Grenzen oder sozusagen den Erkenntnisbereich der Mathematik durchbrechen. Das wahrhaft kulturell Besondere des Menschen wäre dann, die Eingrenzung, die Fesselung durch die Normen der Mathematik abgeschüttelt zu haben und – vor allem in der spezifischen Erscheinungsform von Kunstwerken – Einzigartigkeiten hervorzubringen, auf die eben keine Mathematik mehr paßt. Oder einfacher gesagt: Erst durch seine höchsten Kulturleistungen gelänge es dem Menschen, über alle Mathematik hinauszuwachsen, indem er endgültig das Zentralnervensystem einer Qualle hinter sich läßt.

Horst Bredekamp

Leibniz' transmathematische Schau

Jochen Brüning hat mich gebeten, mein Buch über Leibniz zusammenzufassen, was ich sehr gern vornehme; einleitend möchte ich jedoch leise darauf verweisen, daß ich an diesem Buch über zehn Jahre gearbeitet und, weil ich der Überzeugung bin, daß Bücher heutzutage in einem Transatlantikflug zu lesen sein sollten, 800 auf 300 Seiten zusammengefaßt habe.[1] Nun liegen fünf Seiten vor mir.

Ich beschränke mich auf das zentrale Problem. Mein kritischer Ausgangspunkt waren Bertrand Russells *Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* und Louis Couturats *Logique de Leibniz* vom Beginn des 20. Jahrhunderts.[2] Die beiden brillanten Publikationen haben die Vorstellung durchgesetzt, daß Leibniz der Begründer der modernen Logik gewesen sei; in dieser Eigenschaft als Repräsentant einer neuen Variante der Mathesis universalis wurde er zu einem der intellektuellen Heroen des 20. Jahrhunderts.

Dieses Bild hat sich vor allem auf Leibniz' Dyadik bezogen, jenes Dualsystem, das alle Rechenoperationen durch die Zahlen 0 und 1 durchzuführen sucht. Im Hochgefühl seiner Entdeckung hat Leibniz in einem Brief an den Herzog Rudolf August zu Braunschweig im Mai 1696 betont, daß die Zahlen „gleichsam als in einem Spiegel die Schöpfung oder den Ursprung der Dinge aus Gott und sonst Nichts darstellen."[3] Die dem Schreiben beigefügte Schrift erläutert schon im Titel: „Wunderbarer Ursprung aller Zahlen aus 1 und 0, welcher ein schönes Vorbild des Geheimnisses der Schöpfung gibt, da alles von Gott und sonst aus Nichts, entsteht: *Essentiae Rerum sunt sicut Numeri*."[4] Die Zahlen sind folglich das Wesen der Dinge. Nicht besser, so Leibniz, könne die Allmacht der göttlichen Schöpfung dargestellt werden als durch den Ursprung der Zahlen von Null zu Eins: „da-

1 Bredekamp, H.: Die Fenster der Monade. Gottfried Wilhem Leibniz' Theater der Natur und Kunst, Berlin 2004.

2 Russel, B.: A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz, London 1900; Couturat, L.: La Logique de Leibniz, Paris 1901.

3 Leibniz an Herzog Rudolf August, 8.5.1696, in: Zacher, H. J., Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz, Frankfurt am Main 1973, S. 235.

4 Ebenda, S. 229.

her [habe] ich […] auf die entworfene Medaille gesetzt: IMAGO CREATIONIS."[5] Man könnte also in bezug auf die zentrale Frage unserer Debatte Leibniz als einen Vertreter jener These in Anspruch nehmen, daß die Mathematik der Natur vollendet eingewoben sei.

Es folgt aber ein Zusatz, der den Leibniz-Philologen Schwierigkeiten bedeutet hat, weil er nicht das Rechnen, sondern das Sehen betraf. Da das erwähnte Bild, so Leibniz, in seiner Schönheit auch die Schöpfung bekunde, müsse man es „mit Augen sehen."[6] Dieser Hinweis ist in der Regel als ein exoterischer Zusatz gedeutet worden, als Brückenschlag zum Feld der Ignoranten.

Diese Bewertung ist jedoch ein klamoroser Fehlschluß, der Leibniz um die Essenz seiner Gedankenführung bringt. Mein Gegenargument, für dessen Klärung ich sehr von den Diskussionen mit Eberhard Knobloch und seiner Arbeitsgruppe der BBAW profitiert habe, lautet, daß in dieser Überformung der Zahlen durch das Sehen keinesfalls eine Verwässerung entsteht, sondern die Mathematik in ihrer Größe und ihrer Begrenzung gefaßt ist: Sie steht für die ganze Schöpfung und hat doch etwas außer und über sich.

Das von Leibniz entworfene Bild der Dyadik ist in Rudolf August Noltes Darstellung von 1734 getreu übernommen worden (Abb. 1).[7] Leibniz selbst hat sich durch Pierre Le Moynes *L'art des Devises* des Jahres 1666 anregen lassen (Abb. 2), in dem jenes SVFFICIT VNVM, das Leibniz als Hauptaussage in großer Schrift im Himmel der Dyadik angebracht hatte, in Form der auf Ludwig XIV. gemünzten Zeile *Mihi sufficit unus* vorgeprägt war: *Mir genügt einer*.[8] Die Devise zeigt darin ihren Vorbildcharakter für Leibniz' Medaillenentwurf, daß ihr Rund vom Gegensatz der im oberen Feld strahlenden Sonne und der an ihrer Unterseite verschatteten Erde bestimmt ist, während die Inschrift jenseits des Kreises erscheint. Leibniz' Entwurf dehnt den Kreis auf diese untere Schriftzone aus, so daß sich dort der Sockel der IMAGO CREATIONIS ergibt. An Stelle der Erde erscheinen die Tafeln der Dyadik, und die Sonne ist durch den radialen Schriftzug überblendet, sendet aber ihre Strahlen auf ähnliche Weise aus. Der kompositionelle Bezug läßt im

5 Leibniz, G. W., Sämtliche Schriften und Briefe (Hg. von der Preußischen, später Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin), Berlin 1923ff. [= AA], I, 13, Nr. 75, S. 117, Z. 12–15.

6 AA, I, 13, Nr. 75, S. 117, Z. 16–19.

7 Nolte, R. A.: Leibnitz Mathemat. Beweis d. Erschaffung u. Ordnung d. Welt, Leipzig 1734.

8 Le Moyne, P.: De l'Art des Devises: Avec Divers Recueils de Devises du mesme Autheur, Paris 1666, S. 464; vgl. Petzet, M.: Claude Perrault und die Architektur des Sonnenkönigs. Der Louvre König Ludwigs XIV. und das Werk Claude Perraults, Berlin 2000, S. 343.

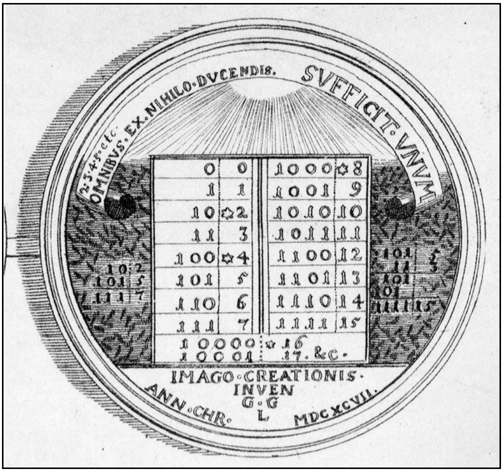


Abbildung 1
Rudolf August Nolte: Sinnbild der Dyadik, Stich, 1734,
nach dem Entwurf von G. W. Leibniz von 1699 (?), in: Nolte, 1734, Titelblatt.

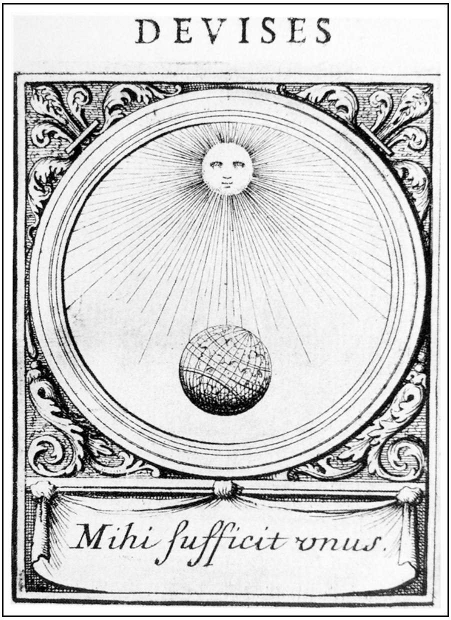


Abbildung 2
Pierre Le Moynes: Devise auf Ludwig XIV., Stich, 1666, in: Le Moyne, 1666, S. 464.

Verein mit dem fast gleichartigen Motto darauf schließen, daß Leibniz seine Anregung für die Inszenierung der heliozentrischen Dyadik im Klima jenes sonnenkultischen Paris erhielt, das ihn wie keine zweite Stadt geprägt hat.[9]

Mit diesem Rekurs auf die Emblematik des absolutistischen Staates geriet Leibniz in einem veritablen Streit um die Gültigkeit der Mathematik. Leibniz folgerte, daß die Zahlen der Dyadik das Höchste ausdrücken wollen, ohne dies zu können. Denn Zahlen lassen ihm zufolge aus sich selbst heraus weder ein System noch eine Folge erkennen, wohingegen seine Medaille auf den „innersten Grund und Urstand" der Zahlen blicken läßt und dadurch eine nicht mehr zu verbessernde, „wunderbar schöne Ordnung und Einstimmung" zu zeigen vermag.[10] Die *Visio* steht über den Zahlen, die ihre Regeln weniger durch sich selbst, als vielmehr im Bild ihrer selbst auszudrücken vermögen. Dies ist von fundamentaler Bedeutung. Leibniz' Aussage zielt zunächst nicht auf die Frage, wie das Verhältnis von Zahl und Natur bestimmt werden kann, sondern er behandelt mit dem Unendlichen ein Problem der inneren Natur der Mathematik. An dem Punkt, an welchem das Unendliche das Begreif- und Darstellbare übersteigt, setzt seine Überlegung an.

Den Zugang zur Lösung dieses Problems bietet die Schrift *Über die Freiheit* (*De libertate, contingentia et serie causarum, providentia*) von 1689, in der Leibniz eine Analogie zwischen den Wahrheiten und den reellen Zahlen entwickelt. Notwendige Wahrheiten sind ihm zufolge in endlich vielen Schritten zu beweisen, wie es die rationalen Zahlen darstellen, die sich als endlicher Dezimalbruch ausweisen lassen (1:4 = 0,25) oder deren unendlicher Dezimalbruch eine Gesetzmäßigkeit besitzt (z. B. 1:3 = 0,33333 Periode). Dem stehen die kontingenten Wahrheiten historischer Ereignisse wie etwa die Ermordung Cäsars gegenüber, deren Herleitung unendlich viele Elemente besitzt. Der Unabschließbarkeit der Suche nach Gründen stellt Leibniz jene Zahlen zur Seite, die, wie etwa die Wurzel aus 3 (1,7321…), eine so regellose wie unendliche Abfolge von Ziffern produzieren. Da es kein Ende der Ziffernfolge gibt, kann auch Gott das Ende der Kette nicht kennen.[11]

Soll die Schöpfung nicht in sich zusammenbrechen, muß Gott als Allmächtiger aber alles kennen. Leibniz folgert daher aus dem Umstand, daß die Mathematik des Unendlichen zwar nicht vorhersehbar ist, aber doch auf Beweisen beruht, „so unterliegen erst recht die zufälligen oder die unendlichen Wahrheiten dem Wissen Gottes und werden

---

9 Bredekamp (Anm.1), S. 96ff.
10 AA, I, 13, Nr. 75, S. 117, Z. 19–22.
11 AA, VI, 4, B, Nr. 326, S. 1655, Z. 15f.

von ihm zwar nicht durch einen Beweis […] aber doch durch ein unfehlbares Schauen erkannt."[12] Als Produkt dessen, daß die Regeln der mathematischen Logik in das Nicht-Beweisbare und Absehbare hinaustreiben, bietet die „unfehlbare Schau" die Erkenntnis von Zahlen, deren Ziffernfolge allein darin eine Regel haben, daß sie keinem Gesetz unterworfen sind. Übertragen auf die kontingenten Wahrheiten, die unendlich viele Elemente bergen, bilden auch diese eine Reihe, die allein für Gott „durchsichtig" ist.[13] Die Notwendigkeit der göttlichen Schau ist auch hier eine Folge der Unmöglichkeit, in Bereichen, die das Unendliche umfassen, zu Beweisen zu kommen. Analog zur Mathematik der irrational unendlichen Zahlen wird die kontingente Wahrheit in die „unfehlbare Schau" überführt.

Für diesen ungeheuren Gedanken hat sich Leibniz eine Art Trainingsprogramm ausgedacht, das er in einem seiner schönsten Texte, der *Drôle de Pensée*, furios entwickelt hat. Unter anderem fordert er ein Schattentheater, in dem die Figuren vor dieser Lichtquelle bewegt werden. In einer Darstellung Samuel Hoogstraatens (Abb. 3) ist zu imaginieren, was Leibniz vorschwebte.[14] Die Zuschauer, so erhoffte er sich, lernen, über die sich verändernden Schatten auf die sich verändernden Winkel und Positionen der hin und her bewegten Schattengebilde zurückzuschließen, so daß diese in einem Blick transmathematisch erfaßt werden könnten. Dies ist der über der Mathematik liegende *Coup d'œil* als Vorschein der göttlichen *Visio*, die mathematische Momente besitzt, aber transmathematisch operiert.

In dieser Phase, in der Leibniz seine Überlegungen anstellte, gab es in Paris einen scharfen Konflikt um Abraham Bosse, der die gesamte Natur und jede Darstellung auf die strikten Regeln der perspektivischen Mathematik zurückzuführen versuchte. Bosse kollidierte mit seinem Anspruch der politischen Theorie, daß Ludwig XIV. als Repräsentant der Souveränität über der Mathematik angesiedelt sein mußte, um wahrhaft souverän sein zu können. Aus diesem Grund wird Ludwig XIV. notorisch jenseits eines perspektivisch-mathematisch angedeuteten Raumes durch eine sfumatohafte, verschliffene Malweise,

---

12 „[…] ita multo magis veritates contingentes seu infinitae subeunt scientiam Dei, et ab eo non quidem demonstratione (quod implicat contradictionem), sed tamen infallibili visione cognoscuntur" (AA, VI, 4, B, Nr. 326, S. 1658, Z. 9–11; Übers. nach Leibniz, G. W., Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie (Übers.: A. Buchenau, Hg.: E. Cassirer), 2 Bde., Hamburg 1996, II, S. 659.

13 AA, VI, 4, B, Nr. 326, S. 1658, Z. 22–24, S. 1659, Z. 1; vgl. Leibniz, 1996 (Anm.11), II, S. 659.

14 Bredekamp (Anm.1), S. 71–73.

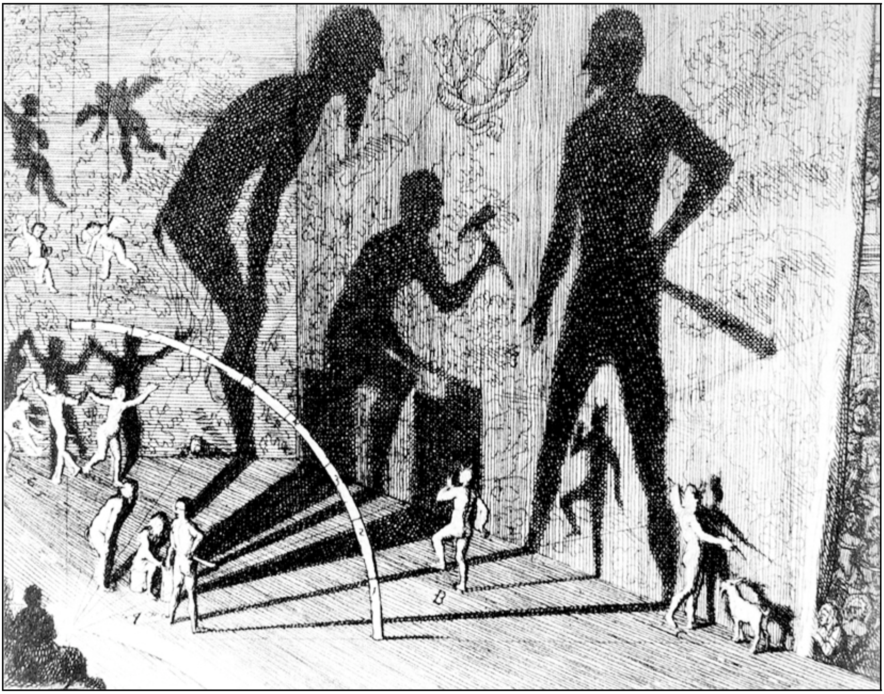


Abbildung 3
Samuel von Hoogstraten: Schattentheater, Radierung, 1678.

wie sie Le Brun darzustellen vermochte, repräsentiert.[15] Ludwig XIV. steht in einem nicht-perspektivischen Raum, jenseits der Mathematik, um die Souveränität seiner selbst ausweisen zu können.

Wir treffen folglich auf zwei parallele Argumentationen. Während Ludwig XIV. seine Souveränität transmathematisch begründet, reflektiert Leibniz über die Größe und die Grenzen der Mathematik. Diese ist für Leibniz das universale Erkenntnis- und Konstruktionsmittel, erhaben in ihrer Schönheit, aber subordiniert unter die *Visio*. Der Status der Mathematik ist bei Leibniz keine Frage der Überzeugung, sondern Folge einer inneren Logik, die aus der Mathematik selbst stammt. In seiner Überführung der Mathematik aus dem Geltungsbereich ihrer selbst bleibt Leibniz Mathematiker. Er schreibt der Mathematik

[15] Bredekamp, H.: Thomas Hobbes. Der Leviathan. Das Urbild des modernen Staates und seine Gegenbilder. 1651–2001, Berlin 2003 (2., veränderte Auflage), S. 39–50.

die Größe zu, über sich selbst hinaus klarzulegen, daß sie so unverzichtbar wie begrenzt ist. Sie steht in der Natur, aber die Natur würde zusammenbrechen, wenn sie nicht mehr wäre als das, was die Mathematik erreicht. Man könnte es auch so sagen: Derjenige Mathematiker hätte sein Gebiet nicht bis in die Essenz verstanden, der bei aller Hochstimmung nicht auch Melancholiker wäre. Die Temperamentenlehre sagt bekanntlich, daß die Vertreter der schwarzen Galle zugleich von der höchsten Schöpferkraft bestimmt sind.[16]

[16] Klibansky, R., Panofsky, E. & F. Saxl: Saturn und Melancholie. Studien zur Geschichte der Naturphilosophie und Medizin, der Religion und Kunst (Übers.: Ch. Buschendorf), Frankfurt am Main 1992.

Winfried Menninghaus

Mathematik und Dichtung

Bemerkungen aus Anlaß von Jochen Brünings Circular

1 Mathematisierungen geistiger und geisteswissenschaftlicher Phänomene haben eine große Tradition

Das antike Nachdenken über Kosmos, Ordnung, Schönheit und Musik hat in der pythagoreischen Lehre eine ihrer stärksten Traditionen. Diese Lehre impliziert die Annahme, daß bestimmte Zahlenverhältnisse Vorhersagen darüber ermöglichen, welche Phänomene wir als harmonisch bzw. schön empfinden. Diese Annahme kann durchaus mit einigem Erfolg auf ein Spezialgebiet der Literaturwissenschaft übertragen werden, nämlich die Metrik. Hexametrische ebenso wie die meisten lyrischen Verse können mit relativ einfachen Algorithmen generiert, beschrieben und insofern auch vorhergesagt werden (zumindest was ihre metrische Struktur betrifft). Gleiches gilt für etliche moderne Gedichtformen. Phänomene dieser formalen Art leisten der Mathematisierung einen eher geringen Widerstand; mittels einiger sehr prägnanter Verteilungsregeln ist das Phänomenfeld durchaus bestimmbar.

Die Lehre von der Proportion ist eine weitere Mathematik-affine Protoästhetik, die schon auf die Antike zurückgeht. Sie formuliert nicht allein genaue Zahlenverhältnisse für die Architektur (wie in Vitruvs *De architectura*), sondern auch für den menschlichen Körper. Das berühmte *homo quadratus*-Schema bildet den menschlichen Körper auf ein pythagoreisches Viereck bzw. Quadrat ab, das in einen Kreis eingezeichnet ist; es gewinnt aus dieser geometrischen Projektion und ihren mathematischen Eigenschaften Vorhersagen darüber, welche Körper-Proportionen wir als schön empfinden und welche nicht. Damit zusammen hängt die wohl berühmteste mathematische Schönheits-Formel, nämlich die Lehre vom goldenen Schnitt. In den zurückliegenden 20 Jahren ist über diese Formel unerhört viel geschrieben worden. Mathematiker haben sich eingeschaltet und in der Lehre vom goldenen Schnitt die Fibonacci-Reihe wiedergefunden; alle möglichen geradezu wunderbaren mathematischen Eigenschaften wurden in der mathematischen Formel für normativ schöne Proportionen entdeckt. Heutige Computerprogramme für plastische Chirurgen rekurrieren vielfach auf eben diesen Algorithmus, um akzeptanzversprechende Vorschläge für die Veränderungswünsche der Patienten zu generieren.

Ludistische Poetiken des 16. und 17. Jahrhunderts – Stichworte: Manierismus, Barock – werden in der heutigen Forschung nicht nur als Varianten des Ideals einer grundsätzlich zahlenförmigen ars combinatoria, sondern konkret als Vorläufer der Algorithmen computergenerierter Texte verstanden. Der Anspruch, selbst die Texte der großen Denker mittels mathematischer Erzeugungsregeln hervorbringen zu können, findet etliche Anwendungen, die gelegentlich spielerisch-selbstironisch sind, aber für einen Literaturwissenschaftler in jedem Fall Stoff zum Nachdenken liefern. So gibt es etwa 'im Internet' einen sogenannten „Kant-Generator". Dieser Software kann man den Befehl geben, einen Absatz oder einen ganzen Paragraphen zum Stichwort 'intelligibler Charakter' oder zu allen möglichen anderen Kantischen Begriffen zu schreiben, und der Generator produziert in Sekundenschnelle das Gewünschte: Texte, die den Eindruck erwecken, von Kant zu stammen. Es wäre ein interessanter Test, wie viele der Mitglieder dieser Akademie in der Lage wären, innerhalb von zehn Minuten aus fünf echten Kant-Zitaten und fünf Produkten des Kant-Generators die echten und die falschen Zitate herauszufinden.

Die sogenannte Chaos-Mathematik hat sich auch ernsthaft und wissenschaftlich mit Literatur beschäftigt. Sie hat etwa die Worte und Wortverteilungen in den Werken berühmter Autoren (wie Goethe) erfaßt und in diesem gewaltigen Datensatz dann Ordnungsmuster gesucht. Dabei sind nicht allein quantitative Aussagen darüber herausgekommen, in welchem Maß etwa Goethes Sprache von Wortverwendung und Wortverteilung in der fiktiven Durchschnittssprache abweicht, sondern die Chaos-mathematische Behandlung von Literatur erlaubt im Extremfall auch die Identifikation der Autoren unbekannter Texte aufgrund solcher, in Zahlen angebbarer individueller Profile von Lexik und Wortverteilungsphänomenen.

Die genannten Ansätze zur Mathematisierung ästhetischer Phänomene grenzen vielfach an Geheimlehren. Dem entspricht, daß in der Tradition der Literatur gerade esoterische Poetiken – wie diejenige der deutschen Frühromantik – gern und programmatisch symbolische Selbstauslegungen im Feld der Mathematik gesucht haben. Novalis, vielleicht der berühmteste der deutschen Romantiker, war nicht nur Bergbauingenieur, Mineraloge und Chemiker; er hat auch die zeitgenössische Mathematik genau rezipiert, was inzwischen vielfach erforscht und auf seine poetologische Relevanz untersucht worden ist. In der deutschen Tradition ist das Desiderat „Mathematik und Dichtung" daher besonders eng an die vermeintlich besonders 'irrationale' romantische Dichtung gebunden. Novalis betont radikal das Axiomatisch-Selbstreferentielle und damit zugleich das intellektuelle

Freiheitsmoment mathematischer Symbolisierungen und findet es – in kühner Analogie – in der Sprache überhaupt und ganz besonders in der Dichtung wieder. Er hat dann auch angefangen, seine eigenen Notizen zu Sprache und Dichtung in Form von Formeln vorzutragen.

Der letzte Punkt meines historischen Rückblicks ist Vladimir Propps berühmtes Werk *Morphologie des Märchens* von 1928.[1] Propp treibt die Analyse eines riesigen Korpus von Märchen bis zu dem Punkt, an dem er sie in einen Algorithmus von knapp einer Zeile Länge zusammenfaßt. Mit dieser Formel, so Propps explizite Behauptung, lassen sich beliebig viele neue Märchen generieren, die literarisch durchaus reizvoll sein können.

Die genannten Werke haben der Literaturwissenschaft entscheidende Anstöße gegeben; es sind Werke, die teilweise – so etwa in Propps Fall – dezidiert gegen das allgemeine Geschwafel anschreiben, das sich periodisch in den Literaturwissenschaften verbreitet hat und verbreitet. Mathematisierungs-Strategien sind innerhalb der Geisteswissenschaften regelmäßig polemisch konnotiert. Sie sagen stets auch: Wir zweifeln, ob uns Geistes- und Kulturwissenschaftlern der Abstand von der Mathematik gut bekommt; vielleicht müssen wir etwas anderes tun und die Kluft schließen oder zumindest verringern. Für mich persönlich haben diese Strategien eine sehr große Bedeutung; es macht nach meiner Überzeugung einen spürbaren Unterschied, ob hinter einem literaturwissenschaftlichen Text auch eine starke formale Schulung steckt oder nicht.

2 Die inhärenten Grenzen der Mathematisierung von Literatur

Gewiß können an allen Werken der Kunst post festum beliebig viele zahlenförmig beschreibbare Proportionen, Distributionsregeln und Effektkalküle dingfest gemacht werden. Aber trotzdem fehlt der Gesamtheit dieser Mathematisierungen eben die Kraft, auf welche die verfeinerte Genauigkeit der Berechnung von Phänomenen meist zielt: nämlich die Kraft der Vorhersage des nächsten Werkes. Keine noch so genaue Erfassung aller Sätze Goethes bis ins Jahr 1773 kann entfernt den Roman *Die Leiden des jungen Werther* aus dem Jahr 1774 vorhersagen. Der herkömmliche Gegenstand der Philologie und Kunstwissenschaften – die Serie der Einzelwerke oder auch der literarischen Moden und Epochen – entgeht insofern grundsätzlich der Berechnung im Sinne der Vorausberechenbarkeit. In Herrn Brünings Papier steht der Satz: „Deshalb müssen die Phänomene, auf die sie sich beziehen, mit hinreichender Regelmäßigkeit auftreten: was nur einmal geschieht,

---

[1] Propp, V.: Morphologie des Märchens, Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1975.

entzieht sich der Beobachtung, gewinnt nicht den Status eines Phänomens."[2] Alle großen Kunstwerke wollen aber eben dies sein: Singularitäten – auch wenn sie nur durch wiederholte Beobachtung und Lektüre zu großen anerkannten Werken werden können. Die Erkenntnis solcher Werke stellt, sofern ihr Anspruch auf Singularität nicht als eine ideologische Gebärde abgetan wird, den paradoxen Versuch einer Logik des Besonderen dar. Dies wurde von Baumgarten bis Kant in den Bestimmungen der grundsätzlichen Unableitbarkeit und Begriffsresistenz der künstlerischen Hervorbringung ausdrücklich reflektiert und liegt historisch insgesamt der Rede vom inkalkulablen „Genie" zugrunde.

Ich möchten noch einen zweiten und letzen Punkt anführen: Auch die immerhin post festum mögliche mathematische Beschreibung literarischer Werke mit den Mitteln etwa der strukturalen Linguistik hat durchaus enge Grenzen. Dies hat in den 1960er Jahren die ausführliche Debatte um Roman Jakobsons und Claude Lévi-Strauss' Interpretation von Baudelaires Gedicht „Les Chats" gezeigt. Von der akribischen Datensammlung durch Zählen der Laute, grammatischen Klassen, semantischen Merkmalsbündeln und Reimstrukturen gibt es nämlich keinen gesicherten oder gar mathematisch beschreibbaren Weg zu einer integralen Deutung des Gedichts. Es bleibt vielmehr eine markante Kluft zwischen der technisch-linguistischen Analyse, die allein mathematisierbar ist, und der klassischen hermeneutischen Frage nach dem „Sinn" oder der Funktion all dieser linguistischen Verteilungs- und Kombinationsregeln bestehen. Ein solcher Übergang bleibt immer – wie bereits Novalis gesagt und Walter Benjamin wiederholt hat – ein „Sprung". Dieser Sprung kann zwar mehr oder weniger gut motiviert werden, er hört aber doch – zumindest nach dem heutigen Wissen der Literaturwissenschaft – nicht auf, ein Sprung zu sein: ein Sprung aus den empirischen und durchaus meßbaren Daten in – altmodisch formuliert – „intelligible" Bereiche. Die Hermeneutik hat diesen Bruch mit der Ordnung meßbarer Details regelmäßig als das unverzichtbar „divinatorische" Moment des Lesens bezeichnet; soweit ich sehe, haben sich strenge Methodiken für diese Fragen bislang nicht durchgesetzt. Das ist einer der vielen Gründe, warum man im angelsächsischen Raum nicht von Literatur*wissenschaft*, sondern von „literary criticism" spricht. Letztlich überwiegt in den literaturwissenschaftlichen Arbeiten, die ich persönlich für kreativ halte, das, was Lévi-Strauss sehr schön die „bricolage" genannt hat: das bastelnde Erproben von diesen oder jenen Wegen, die interessante Aufschlüsse versprechen in einem Feld, das grundsätzlich dazu neigt, ein unvorhersehbares Feld von Singularitäten zu sein (oder zumindest sein zu wollen).

---

2 Vgl. oben, S. 13.

Diskussion II

Die Debatte zur Mathematisierung der Natur wird in der Sitzung der Versammlung am 27. Mai 2005 fortgesetzt. Nach einer Einführung von Jochen Brüning zum Prozedere und zu Fragen der Begriffsbildung halten Mitglieder der einzelnen Klassen Statements, in denen sie aus unterschiedlichen Perspektiven und Kontexten ihre Auffassungen und Standpunkte zur obigen Thematik darlegen. Anschließend leitet Jochen Brüning in die Diskussion über.

Matthias Kleiner: Ich möchte auf die Frage, ob es denn aus der Technikwissenschaftlichen Klasse noch Debattenbeiträge gibt, zurückkommen und zwei Punkte vortragen.
Mir ging vorhin zum einen der Gedanke durch den Kopf: Mathematisierung der Natur heißt für uns Ingenieure natürlich zunächst Mathematisierung von Technik. Und die Menschen, wenn sie nicht gerade Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler sind, nehmen Mathematik in ihrem Alltag allenfalls über Technik wahr oder spüren sie so vielleicht. Daher fragte ich mich: Warum sind wir Technikwissenschaftler in dieser Debatte eigentlich oder doch zunächst recht sprachlos?
Vielleicht, weil es für uns eine Selbstverständlichkeit ist, daß wir Mathematik nutzen. Ohne Mathematik keine Technik, möchte ich meinen, und schon gar nicht heutzutage. Ein Beispiel: Ein technisches Glanzlicht der letzten Monate oder vielleicht sogar der letzten Jahre ist der Airbus A380, den alle fasziniert bestaunt haben – auch wir Ingenieure. Aber wir waren natürlich nicht überrascht, daß er flog, weil wir selbstverständlich wußten und wissen, was alles in der Auslegung, in der Konstruktion, in den Fertigungsprozessen usw. steckt. Für uns ist also ganz wesentlich: Die mathematische Vorhersage von Materialeigenschaften, des Materialverhaltens unter Last, die Simulation der Bearbeitungsprozesse und des Bauteilverhaltens, der ganzen Flugzeugstruktur, die Entwicklung der Triebwerke, die Gestaltung und Programmierung der Steuerungssysteme macht solche technischen Leistungen erst möglich – und gewährleistet deren Sicherheit.
Also entschieden: ja, Mathematisierung der Technik – für uns allerdings vor allem im Zusammenhang mit der Analyse, Modellierung, Simulation und Gestaltung komplexer technischer Systeme. Und das heißt, meine ich, dann auch mehr als Mathematisierung. Denn wir bringen naturwissenschaftliches und technisches Verständnis in diese Analyse

und Modellierung hinein. Wichtige aktuelle Problemstellungen ergeben sich hier aus den Konzepten der digitalen Fabrik und der virtuellen Produktion. Das bringt uns zu einer problemorientierten Sicht der Technikwissenschaftler und Ingenieure auf die Mathematik und deren Methodenangebot: zum Beispiel zur Mathematik der Multiskalenprobleme, weil sich unsere Sicht immer stärker auf solche Problemklassen erstreckt.

Der zweite Punkt, den ich ansprechen wollte, ist folgender: Es gibt eine herrlich freche, respektlose Fernsehsendung im WDR – natürlich erst kurz vor Mitternacht –, die sich „Zimmer frei" nennt. Der prominente Gast der Sendung bewirbt sich um ein freies Zimmer in einer fiktiven Wohngemeinschaft und muß sich als wohngemeinschaftstauglich beweisen. Am Ende gibt es dann die „Ultimative Lobhudelei", in der alle positiven Eigenschaften – und nur die kommen natürlich zum Ausdruck – zusammengefaßt werden, bevor das Publikum über den Einzug in die „WG" abstimmt. Ein bißchen assoziierte ich damit die letzten zwei Stunden, in denen ich mich – angesichts des Einstein-Jahres und der Länge der Beiträge – auch fragte: Wie relativ sind fünf Minuten? Ich glaube, die Mathematik ist wohngemeinschaftstauglich, nur muß sie nicht mehr einziehen, sie war immer schon dabei. Natürlich brauchen wir alle Mathematik, wir schätzen sie sehr als Methodenwissenschaft; das ist zum Ausdruck gekommen.

Aber ich denke auch, daß Fragen offen geblieben sind. Zum Beispiel: Braucht die Mathematik uns, die wir mit der Mathematik umgehen? Braucht sie uns in ihrer Weiterentwicklung? Ich meine jetzt nicht, braucht sie uns – Martin Grötschel sitzt mir gegenüber – in ihrem DFG-Forschungszentrum als Anwendungspartner, sondern braucht sie uns auch, um ihre Methoden, ihr Gedankengebäude weiterzuentwickeln? Also an der Stelle auch die Frage nach der Wechselwirkung von Mathematik und Technik. Außerdem brachte mich das Stichwort 'Reine Mathematik' ganz assoziativ auf die Frage: Ist die Mathematik unschuldig? Kann sie es sein? Hier stellt sich also die Frage nach der Unschuld von Mathematik in den Anwendungen, die ja gelegentlich schon häßliche Anwendungen von Mathematik waren und die es auch heute gibt. Martin Grötschel und ich tuschelten uns gerade zu: der Mißbrauch der Mathematik, genauso, wie es den Mißbrauch von Technik und Wissenschaft gibt. Zum Beispiel die Frage: Wie gebrauchen wir und mißbrauchen wir Mathematik, um eine scheinbare Objektivität unseres ganz menschlichen Tuns zu beschreiben und es damit zu rechtfertigen?

Mitchell Ash: Die Beiträge der Kollegen Geisteswissenschaftler haben mich inspiriert, nur zwei Sätze zu sagen, die beide als Warnungen davor verstanden werden sollen, die disziplinären Grenzen allzu kategorial zu nehmen. Wenn uns zum Beispiel gerade die

letzte Wortmeldung aus der Technikwissenschaft weismachen sollte, daß die Technik eine Form der Mathematisierung der Natur ist, würde ich – zumindest als Kulturwissenschaftler – sagen wollen, daß es eher eine Mathematisierung unseres Umganges mit Natur ist. Das ist nicht dasselbe. Das wäre das eine.
Aber ganz wichtig in dem Zusammenhang ist der zweite Satz, den ich sagen will: Als Winfried Menninghaus zu Recht eine inhärente Grenze der Mathematisierung im Bereich der Literatur aufmachen wollte, nämlich die Vorhersage des nächsten Werkes – ein sehr alter Satz, der trotzdem wichtig ist – habe ich drüber sinniert und gedacht: Ist das nur für die Literatur gültig? Oder ist es nicht so, daß es Bereiche der Naturwissenschaften gibt, die ebenso historisch zu verstehen sind und für die dieser Satz ebenso gilt? Ich denke dabei zum Beispiel an die Evolutionstheorie. Gerade im Nachdenken über die Evolutionstheorie haben Philosophen vor längerer Zeit bereits die Unterscheidung zwischen „prediction" und „postdiction" eingeführt. Das, was die Evolutionstheoretiker betreiben, wäre nach diesem Gebrauch also eher „postdiction" und nicht „prediction". Sie ordnen das, was sie beobachtet haben nach dem, was in der Vergangenheit geschehen sein soll und bilden Theorien darüber. Daher meine letzte Frage, die aus alledem abzuleiten ist: Ist es wirklich richtig, Mathematisierung, also Berechenbarkeit, mit Vorhersagbarkeit gleichzusetzen?

Hubert Markl: Eine kleine Anmerkung zu Herrn Bredekamps schöner Darlegung über Leibniz. Sie haben uns überzeugt, daß die Hyperkomplexität der Ursachen, die einen Caesar das Leben kostete, es unmöglich macht, dies und ähnliche Ereignisse etwa rechnerisch vorauszusagen – obwohl das ja schon öfter Caesaren so ergangen ist, kann man es für den einzelnen nicht vorhersagen. Vor dem gleichen Problem stehen natürlich eine Maus oder ein Käfer auch ständig, weil die Umwelt zwar computabel sein mag, der Käfer oder die Maus aber gar nicht die Zeit dazu hätten, solche Computationen auszuführen, bevor sie sich für die eine oder andere Reaktion entscheiden. Wenn sie es versuchen wollten, wären sie längst von einem Feind gefressen. Das heißt, die Tatsache, daß es viele, viele Ereignisse gibt, die nicht einer rechnerischen Rekonstruktion oder besser Präkognition, also Voraussicht, zugänglich sind, muß nicht ein Ausweis der Notwendigkeit von Allwissenheit sein, sondern geradezu des höheren Grades an Unwissenheit, der riskantes Handeln nötig macht, unter dem Risiko, dabei das Falsche zu tun. Ich glaube, diese Argumentation, die vielleicht Leibniz nicht gewählt hätte, ist für uns sehr naheliegend, wenn wir den gleichen Tatbestand sehen. Die Bildhaftigkeit des Sehens, damit haben Sie dies ja in Zusammenhang gebracht, ist in gewisser Hinsicht eine Notlösung, eine „rule of thumb“ für den Umgang mit einer hyperkomplexen Reizumwelt, um durch die sonst unüberschaubare Situation nicht am Entscheiden und Handeln gehindert zu werden. Bilder mögen große Vereinfachungen der Wirklichkeit sein, aber solche Vereinfachungen sind notwendig, um schnell lebenswichtige – wenn auch hochriskante – Entscheidungen treffen zu können.

Wolfgang Maier: Ich wollte auf die These von Herrn Markl antworten, daß Denken wegen mathematischer Fähigkeiten möglich ist, und es vor allem dadurch zur Möglichkeit der Erkennung von Regelhaftigkeit kommen kann. Mir scheint der Zusammenhang umgekehrt: Wahrscheinlich ist doch das Wahrnehmen von Regelmäßigkeit eine Fähigkeit, die sich durch die Evolution hergestellt hat, einfach weil ein Jäger und Sammler um so effizienter ist, je besser er Regelmäßigkeiten erkennt. Und dann gibt es verschiedene Varianten von Regelmäßigkeiten und deren Wahrnehmung, was man sekundär in der späteren Kulturentwicklung mathematisieren kann. Somit setzt die mathematische Fähigkeit das Erkennen von Regelmäßigkeit voraus und nicht umgekehrt.
Auf der anderen Seite gibt es Formen von Wahrnehmung, die nicht auf Regelmäßigkeit basieren, wenn sie zum Beispiel der Gefahrenwahrnehmung dient, also auf Kontraste abgerichtet ist, das heißt auf das Erkennen von Unregelmäßigkeit. Das ist an sich ein der Mathematisierung gegenläufiges Prinzip, so daß hier die Mathematisierung im Sinne der Darstellung von Regelmäßigkeit durch Hirnfunktionen vielleicht doch eine Grenze hat. Offenbar sind also bestimmte Bereiche der Hirnfunktions-Wahrnehmung mathematisierbar, aber andere vielleicht nicht.

Gerhard Roth: Das schließt sich an das an, was gerade diskutiert wurde: Man sagt, es sei das Charakteristikum des Geistigen, des Kulturellen, des Kreativen, des Künstlerischen, daß es nicht vorhersagbar ist. Das nächste Werk eines Künstlers ist nicht vorhersagbar. Das ist einerseits sicherlich richtig. Auf der anderen Seite kann man inzwischen relativ gut erklären, wie ein kreativer Zustand im Gehirn eines Menschen entsteht. Da gibt es ein neuronales Netzwerk in unserem Stirnhirn, das man durchaus mathematisch beschreiben kann, das zum Zwecke der Erfindung neuartiger Dinge in einen hoch erregten Zustand versetzt wird. Dies geschieht, indem ein Stoff namens Dopamin, der dem unbewußten Bereich unseres Gehirns entstammt, dort massiv ausgeschüttet wird, und diese Netzwerke werden dadurch kreativ und nicht mehr genau vorhersagbar. Das ist beim kreativen Problemlösen außerordentlich wichtig. Wir wissen auch, daß ein Schizophrener einmal, in seiner „produktiven“ Phase zuviel Dopamin im Stirnhirn hat, und ein andermal zuwenig, und dann wirkt er extrem unkreativ. Ein Künstler hat im kreativen Zustand einen relativ hohen, aber noch tolerablen Dopaminspiegel und steht vielleicht kurz vor einem schizophrenen Zustand. Auf diese Weise entsteht im Gehirn etwas, was sprichwörtlich nicht vorhersagbar ist. Ein System, das man naturwissenschaftlich beschreiben kann, wird somit „absichtlich“ in einen Zustand gesetzt, damit etwas herauskommt, was man nicht vorhersagen kann. Genauso ist das bei der Bewegungssteuerung und in der Evolution: Neuartige evolutive Ereignisse werden dadurch erzeugt, daß genetische Potentiale in einen höheren Aufruhr versetzt werden. Ich glaube, das ist eine Art – oder ein Ansatz – einer Brückentheorie zwischen den Natur- und Biowissenschaften zur Sphäre des Geistigen, auch zum Beispiel der Willensfreiheit: wie hier Freiheit durch ein System hervorgebracht wird, das sich selbst nicht vorhersagbar macht. Und man kann zeigen, daß höhere komplexe Ereignisse, wie übrigens auch die Steuerung meiner Hand, nur über eine Art Muskelchaos erfolgen, sonst würde meine Hand in einen Krampf verfallen. Man muß verstehen, wie hier kreative Neuartigkeit aus einem Ordnungszustand entsteht. So könnte man erklären, daß es keineswegs irgendeinen metaphysischen Sprung zwischen der Sphäre des Gesetzmäßig-Biologischen und der Sphäre des Menschlich-Kreativen gibt.

Hubert Markl: Da sind wir ganz der gleichen Meinung. Wir wissen auch, daß ein Verständnis der Mutation – Eigen und andere haben uns das gelehrt – als eine Art Schlamperei, eine Ungenauigkeit, die man beseitigen könnte, aber die dann die Hervorbringung von Neuigkeiten unmöglich machte, dahintersteckt. Ich will auch dem Kollegen Maier gerne antworten. Ich habe nicht von den Jägern und Sammlern gesprochen, ich sprach von Quallen. Und das Argument, die „Evolution“ habe etwas „hervorgebracht“, wird sehr oft verwendet, ist aber für mich als Biologen doch eine unzureichende Erklärung, sozusagen eine Redeform; denn es gibt keinen „Agenten“, Evolution genannt, der da sitzt und etwas macht, sondern wir registrieren, daß etwas zustande gekommen ist und sagen, das ist im Lauf der Evolution geschehen. Wenn Sie weit genug zurückgehen, dann sind Sinnesnervensysteme nur ansprechbar – auch bei der Kantenwahrnehmung und dergleichen – wenn sich ein Reiz wiederholt; wenn etwas statisch bleibt, dann bilden sie nichts ab. Das ist geradezu der Grund für diese Systeme, daß sie blind werden können, wenn keine Reizänderungen eintreten. So wie die Schnecke, die herumkriecht, nicht sieht, was sich nicht bewegt; aber wenn sich etwas bewegt und zwar wiederholt bewegt, dann beginnen die Sehzellen darauf zu antworten. Insofern ist das, was Sie angesprochen haben, natürlich völlig richtig, daß es nämlich auch andere Funktionen der Wahrnehmung der Umwelt gibt, aber sie lassen sich immer zurückführen auf die Fähigkeit von Sinnesnervenzellen, Veränderungen in der Umwelt wahrzunehmen. Diese dann zu klassifizieren, erfordert übergeordnete Zentren, die die Wiederholung der verschiedenen Reizzustände zu behalten vermögen, und dann sind Sie schon relativ nah an dem, was wir Computation nennen, obwohl ich Ihnen zugestehe, das dies immer noch unendlich weit entfernt ist von dem, was wir dann Mathematik nennen. Ich habe das Argument deshalb ein bißchen vereinfacht und zugespitzt, um es zu verdeutlichen.

Klaus Lucas: Man sagt oft, daß die Leistungsfähigkeit der Mathematik bei Prognosen abhängig davon sei, ob es sich um ein sehr komplexes System handele oder um ein eher einfaches System. Das Gehirn beispielsweise wurde als das komplexeste System des Universums bezeichnet und ist deswegen durch Mathematik praktisch nicht beschreibbar, während die Bewegungen von Planeten durch die Newtonschen Gleichungen besonders einfach beschreibbar sind. Ich weiß nicht, ob das genau so stimmt. Vielleicht geht es eher um die Fragen, die man stellt. Und ich will das an einem ganz trivialen Beispiel, das wir alle kennen, erläutern: Das Wetter, die Wetterprognose gilt als so komplex – wie wir es ja auch täglich erleben –, daß sie langfristig gar nicht möglich ist. Sie gilt als chaotisches Problem. So gilt es nach allgemeiner Auffassung als unsinnige Frage, ob heute in einem Jahr die Sonne scheinen oder ob es regnen wird. Es ist etabliertes Wissen, daß zwar langfristige Wetterprognosen im Detail grundsätzlich nicht möglich sind. Dennoch kann man offensichtlich langfristige Wetterprognosen bezüglich ganz einfacher Fragen wagen, also zum Beispiel, ob heute in einem Jahr, also Ende Mai, eine kühlere Temperatur herrschen wird als Anfang Januar. Jeder würde natürlich sehr wohl diese Frage beantworten können. Das heißt, zum selben System kann man Fragen stellen, die einerseits beantwortbar sind, andererseits nicht. Das ist nun ein sehr einfaches Beispiel, aber das trifft aus meiner Sicht doch ganz gut den Kern der Dinge, zumindest der Dinge, mit denen wir in den Technikwissenschaften täglich zu tun haben. Wenn man genau genug hinsieht, ist nichts berechenbar. Glücklicherweise muß man nicht immer genau hinsehen, weil das, was wir in der makroskopischen Welt beobachten, das Ergebnis von statistischen Mittlungsprozessen ist. Also beispielsweise: Wenn ich einen Otto-Motor konstruiere, dem ein Verbrennungsprozeß zugrunde liegt, dann kann ich den Energieumsatz beneidenswert genau berechnen. Das wird ja täglich in der Automobilindustrie gemacht. Wenn ich mir aber den Verbrennungsprozeß so genau anschaue, daß ich wissen will, unter welchen Umständen welche Schadstoffe entstehen, versagt das alles. Dann ist das ein empirisches Forschungsgebiet mit erheblichen Unsicherheiten. Damit ergibt sich in der Verallgemeinerung, daß die Frage, ob die Mathematik hilfreich sein könnte bei der Prognose und der

Berechenbarkeit, nicht so sehr von System zu System unterschiedlich zu beantworten ist, sondern einfach hinsichtlich der Fragen, die wir stellen.

Jochen Brüning: Wir wissen natürlich nicht, ob wir beim Wetter nach den richtigen Größen fragen. Es ist denkbar, daß dieses hochkomplexe, nichtlineare System charakteristische Größen aufweist, die wir noch gar nicht kennen, beispielsweise Höhenströmungen; dafür gibt es Hinweise. Es ist also vielleicht eine Mathematisierung dieses Systems in einem strengen Sinne möglich, die ganz andere Modelle als die heute üblichen benutzt. Auch diese Denkmöglichkeit müssen wir im Auge behalten, wenn wir von der Komplexität eines Systems sprechen.

Klaus Pinkau: Ich wollte etwas sagen zur Diskussion über Vorhersagbarkeit und dabei daran erinnern, wie es zu dieser Diskussion über Mathematisierung gekommen ist. Wir hatten eine Diskussion über Modelle und haben dabei festgestellt, daß im Bereich der Naturwissenschaften diese Modelle auf mathematische Konstruktionen zurückgeführt werden können, das heißt, aus den Modellen können sich abstrakte, mathematisch formulierbare Theorien entwickeln, die über unseren Erfahrungsbereich hinausgehen.
Die Technik der Überprüfung dieser Modelle beruht auf der Vorhersagbarkeit. Die Vorhersagbarkeit ist ein Mittel, um die Qualität der Modelle zu überprüfen, das heißt, es ist der dynamische Anteil der Modelle, der überprüft wird durch die Vorhersagbarkeit. Ein möglicher statischer Anteil der Modelle eröffnet sich nicht, den kann ich durch Vorhersagbarkeitsüberlegungen und Veränderung der Randbedingungen nicht entdecken.
Mir scheint sehr wichtig zu sein, das zu erkennen. Es hat eine gewisse Ähnlichkeit zu der Äußerung von Herrn Markl eben und bedeutet doch, daß die Vorhersagbarkeit zwar – wie gesagt – ein technisches Mittel ist, die Güte der Modelle zu überprüfen; es entgeht uns aber damit ein möglicher statischer Inhalt. Unsere Methode der Modellentwicklung stellt auf die Dynamik ab.

Martin Quack: Wir haben relativ lange darüber diskutiert, was die Mathematisierung der Natur bedeutet, aber gar nicht gesagt, was die Mathematik überhaupt ist in diesem Zusammenhang. Wenn wir uns anschauen, wie die Naturwissenschaftler die Mathematik einsetzen, dann ist die Mathematik einfach eine Sprache zur Beschreibung der Natur, und zwar eine Sprache, die für bestimmte Zwecke bei der Beschreibung besonders geeignet ist. Damit unterscheidet sie sich eigentlich nicht von anderen Formen der Sprache in ihrer Anwendung. Zum Beispiel hat François Diederich am Anfang gesagt, wenn wir eine Totalsynthese beschreiben, eine Arbeitsvorschrift einer Totalsynthese nehmen, dann nehmen wir eben nicht die Mathematik, obwohl wir auch mathematische Elemente haben, quantitative, sondern einfach die normale Sprache der Vorschrift, ergänzt durch die chemische Fachsprache.

Jetzt müßte man natürlich fragen: Was ist die Sprache? – Das führt mich zu den Bemerkungen von Herrn Markl zur Frage der Evolution der Sinneswahrnehmung bei Quallen, Schnecken und des Denkens und der Mathematik beim Menschen und den zugrundeliegenden gemeinsamen Prinzipien. Meine Antwort wäre wahrscheinlich: Es sind alles Systeme zur Verarbeitung von Informationen und zur Kommunikation von Informationen – dieses haben alle diese Systeme gemeinsam –, aber das heißt ja nicht, daß sie das gleiche sind.

Ich glaube, beim Übergang vom Nervensystem zur Mathematik oder zur Sprache oder von der Qualle zum Menschen ist vielleicht etwas passiert, was prinzipiell bedeutsam ist. Und das führt mich zum dritten Punkt – das ist eine Frage an die Zukunft: Wenn wir also informationsverarbeitende Systeme auf einer tiefen Stufe haben, wie Nervensysteme von Quallen, und dann vielleicht eine höhere Stufe wie die Sprache oder – vielleicht ist die Mathematik eine besonders hohe Stufe für bestimmte Zwecke in den Naturwissenschaften –, dann kann man sich natürlich folgende Frage an die Zukunft stellen: Gibt es in der Zukunft vielleicht eine Weiterentwicklung, eine höhere Sprache, die mächtiger ist als die Mathematik in der Beschreibung der Natur?

Jochen Brüning: Das ist eine gute Frage, deren Antwort aber wohl nicht vorhersehbar ist. Wenn wir die Mathematik im hier besprochenen Sinne der kulturellen Evolution zurechnen, dann besteht allerdings kein Grund zu glauben, daß die Mathematik von heute bereits die ihr mögliche Endstufe erreicht hat.

Manfred Bierwisch: Ich habe eine Anmerkung zu der Kontroverse über Vorhersagbarkeit oder Berechenbarkeit im Bereich geistiger Kreativität, von der Herr Menninghaus gesprochen hat. Ich denke, daß das, was Herr Roth dazu gesagt hat, einen inzwischen unbestrittenen Aspekt der Kreativität beschreibt: Man kann die Bedingungen, unter denen ein System unvorhersehbare Leistungen oder Effekte erzeugt – etwa durch Ausschüttung von Dopamin – relativ gut charakterisieren. Etwas zugespitzt lässt sich Herrn Roths Überlegung so zusammenfassen: Die Bedingungen, unter denen das Verhalten unvorhersagbar wird, sind vorhersagbar. Das ist allerdings nicht die ganze Geschichte. Es ist ja nicht jede beliebige Zufälligkeit, die auf diese Weise entsteht, ein kreativer Akt. Bei der Kreativität eines Dichters handelt es sich eben nicht um einen neuronalen Wirbelsturm, der zwar berechenbare Randbedingungen, aber einen im Detail chaotischen Verlauf hat. Tatsächlich kennen wir einen großen Teil der Bedingungen, denen zum Beispiel die Entstehung eines Gedichts unterliegt, sehr genau, insbesondere die sprachlichen Regeln, aber auch vieles von dem, was etwa ein Hölderlin-Gedicht von einem von Goethe oder Brecht unterscheidet. Insoweit ist also ein Gedicht im buchstäblichen Sinn berechenbar: Es wird nach expliziten Regeln erzeugt, obwohl wir fast nichts darüber wissen, wie diese Regeln in neuronalen Schaltungen und Prozessen realisiert sind. Entscheidend für Kreativität ist aber ein weiterer Aspekt, der über dieses durchaus ungelöste Problem qualitativ hinausgeht. Man kann das verdeutlichen an den Automaten, die Märchen, Gedichte und ähnliches erzeugen, von denen Herr Menninghaus gesprochen hat. Zu diesen Automaten sind im digitalen Zeitalter verschiedene neue Varianten hinzugekommen. Eine hat Hans Magnus Enzensberger in seiner „Einladung zu einem Poesieautomaten" beigesteuert. Wir haben Enzensbergers Automaten hier im Hause einmal implementiert und gezeigt, wie auf ganz mechanische Weise Gedichte entstehen: Der Automat trifft aus Gedichtversatzstücken, die Enzensberger wohlüberlegt zusammengestellt hat, eine rein stochastische Auswahl und erzeugt so etwas, das einerseits deutlich wie ein Enzensberger-Gedichte aussieht, andererseits aber natürlich nicht. Es ist sozusagen ein depraviertes Enzensberger-Gedicht. Auf die gleiche Art kann man einen Automaten zum Beispiel für depravierte Trakl-Gedichte programmieren. Das Phänomen ist seit langem bekannt, etwa von computer-erzeugten Mozart-Kompositionen: Man erkennt sie sofort als mozartisch, aber man erkennt auch, daß sie entscheidend darunter bleiben. Und diese Diskrepanz ist der entscheidende Punkt, für den man vorläufig nur sagen kann: Das ist eben einfach ein Rätsel. Wenn wir überhaupt ein Verhältnis zur Sache haben, dann wissen wir auch, was interessant, was originell, was gut, was bedeutend ist und was ein Imitat, was Dutzendware, was läppisch ist, aber wir können nur sehr bedingt die Kriterien angeben, anhand deren wir das wissen, von Berechenbarkeit ganz zu schweigen. Und dieses Rätsel beginnt in Wahrheit nicht erst bei Trakl-Gedichten und Mozart-Symphonien, es ist schon das Rätsel alltäglicher Rede, der Kreativität des ganz normalen Sprachgebrauchs. Der ist situationsangemessen, kohärent, aber eben nicht determiniert. Fast jede Äußerung könnte auch anders ausfallen. Wenn wir alle Regeln und Wörter einer Sprache <u>und</u> ihre Repräsentation im Gehirn kennen würden – ein sehr utopischer Gedanke! –, wüßten wir keineswegs automatisch, wie Kreativität entsteht.

Günter M. Ziegler: Ich beziehe mich darauf, daß hier in verschiedenen Beiträgen immer wieder die Rede war von „der Mathematik“, und da frage ich mich als Mathematiker, was das eigentlich ist.
In der Diskussion über Mathematisierung der Naturwissenschaften ist aufgefächert worden, um welche Naturwissenschaften es geht und daß diese sehr unterschiedlich sind. Und dann muß man sehen, daß ganz verschiedene Teilbereiche der Mathematik angesprochen waren, die in verschiedenen Bereichen effektiv sind oder eben auch nicht. Ich gehe da zurück auf das berühmte Wort von Eugene Wigner, der von der „unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences“ redete.[1] Genauso gibt es eine gewisse Ineffektivität der Mathematik in den Biowissenschaften und auch die Beobachtung, wie wir gerade auch referiert bekommen haben, daß man in den Literaturwissenschaften mit mathematischen Methoden einfach nicht weit kommt. Ich glaube, das liegt auch daran, daß da eine ganz unterschiedliche Art und Tiefe von Mathematik herangezogen wird und herangezogen werden kann. Das heißt, daß man eben in den Literaturwissenschaften in der Mathematik, die man heranzieht, letztlich über billige statistische Analysen nicht hinauskommt und deswegen auch die Mathematik da nicht viel beitragen kann, während in Physikanwendungen teilweise sehr tiefe und hoch entwickelte Mathematik wirklich essentiell zum Tragen kommt. Letztlich war, wenn man die Diskussion durch die Klassen betrachtet, die Frage, „inwieweit ist das mathematisierbar?“ gestellt im Sinne von: „Inwieweit ist das abstrahierbar, inwieweit ist es formalisierbar?“ Wenn man jedes formale Modell schon Mathematik nennen will, dann kommt man immer in allem, was Naturwissenschaft ist, sehr weit. Wenn man dann auch noch verlangt, daß die Anwendung von Mathematik über die Formalisierung hinaus Vorhersagekraft haben bzw. wirklich etwas erklären soll, dann ist der Erfolgsfaktor recht unterschiedlich.

François Diederich: Ich wollte etwas ansprechen, was mir eher schauerlich vorkommt, aber zunehmend in den Medien ist, nämlich das Interface zwischen Gehirn und Computer, an dem sehr viel geforscht wird. Was wird denn diese Entwicklung bedeuten? Ich habe selbst nicht viel Ahnung, denke aber, daß das Herunter- und Heraufladen und Ändern von Daten sicher einen Einfluß auf die Mathematisierung des menschlichen Tuns und Denkens hat. Vielleicht gäbe es dazu noch etwas zu sagen.

Jochen Brüning dankt allen Redner und schließt die Diskussion.

---

[1] Wigner, E., in: Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. I (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc.

Autoren

Ash, Mitchell, Prof. Dr., geb. 1948; Ordentlicher Professor für Geschichte der Neuzeit; Hauptfachrichtung: Wissenschaftsgeschichte; dienstlich: Universität Wien, Institut für Geschichte, Dr. Karl-Lueger-Ring 1, 1010 Wien, Austria, Tel.: 00 43/1/4 27 74 08 37, Fax: 00 43/1/42 77 94 08, e-mail: mitchell.ash@univie.ac.at

Bierwisch, Manfred, Prof. Dr. phil. Dr. h. c., geb. 1930; Hauptfachrichtung: Linguistik; dienstlich: Humboldt-Universität zu Berlin, Jägerstraße 10–11, 10117 Berlin, Tel.: 0 30/20 93 53 51, 0 30/8 21 91 75, Fax: 0 30/20 93 53 53, e-mail: mb@german.hu-berlin.de

Bredekamp, Horst, Prof. Dr. 1947; Professor für Kunstgeschichte an der HU Berlin und Permanent Fellow am Wissenschaftskolleg zu Berlin; Hauptfachrichtung: Kunstgeschichte als historische Bildwissenschaft; dienstlich: Humboldt-Universität zu Berlin, Philosophische Fakultät III, Kunstgeschichtliches Seminar, Dorotheenstraße 28, 10117 Berlin, Tel.: 0 30/20 93 44 98, Fax: 0 30/20 93 42 09, e-mail: horst.bredekamp@culture.hu-berlin.de

Brüning, Jochen, Univ.-Prof. Dr., geb. 1947; Professor für Mathematik, Geschäftsführender Direktor des Helmholtz-Zentrums; Hauptfachrichtung: Geometrische Analysis, Kulturgeschichte der Mathematik; dienstlich: Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin, Tel.: 0 30/20 93 25 22, Fax: 0 30/20 93 27 27, e-mail: bruening@mathematik.hu-berlin.de

Deuflhard, Peter, Prof. Dr. Dr. h. c., geb. 1944; Präsident des Konrad-Zuse-Zentrums für Informationstechnik Berlin und Professor für Scientific Computing an der Freien Universität Berlin; Hauptfachrichtung: Scientific Computing; dienstlich: Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Takustraße 7, 14195 Berlin, Tel.: 0 30/84 18 51 01, Fax: 0 30/84 18 51 07, e-mail: deuflhard@zib.de

Diederich, François, Prof. Dr., geb. 1952; Professor für Organische Chemie; Hauptfachrichtung: Chemie; dienstlich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Laboratorium für Organische Chemie, HCI G 313, Wolfgang-Pauli-Straße 10, 8093 Zürich, Schweiz, Tel.: 00 41/44/6 32 29 92, Fax: 00 41/44/6 32 11 09, e-mail: diederich@org.chem.ethz.ch

Dössel, Olaf, Prof. Dr. rer. nat., geb. 1954; Universitätsprofessor, Leiter des Instituts für Biomedizinische Technik der Universität Karlsruhe (TH); Hauptfachrichtung: Elektrotechnik, Biomedizinische Technik; dienstlich: Universität Karlsruhe, Institut für Biomedizinische Technik, Kaiserstraße 12, 76128 Karlsruhe, Tel.: 07 21/6 08 26 50, Fax: 07 21/ 6 08 27 89, e-mail: olaf.doessel@ibt.uni-karlsruhe.de

Duddeck, Heinz, Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h., geb. 1928; Emeritus; Hauptfachrichtung: Bauingenieurwesen; dienstlich: Technische Universität Braunschweig, Institut für Statik, Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Tel.: 05 31/3 91 36 67/-8, Fax: 05 31/3 91 81 16

Ehlers, Jürgen, Prof. Dr., geb. 1929; Emeritus; Hauptfachrichtung: Theoretische Physik; dienstlich: Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Am Mühlenberg 1, 14776 Golm/Potsdam, Tel.: 03 31/5 67 71 10, Fax: 03 31/5 67 72 97, e-mail: juergen.ehlers@aei.mpg.de

Friederici, Angela D., Prof. Dr., geb. 1952; Direktorin am MPI für Kognitions- und Neurowissenschaften; Hauptfachrichtung: Neuropsychologie; dienstlich: Max-Planck-Institut für Kognitions- und Neurowissenschaften, Stephanstraße 1a, 04103 Leipzig, Tel.: 03 41/9 94 01 12, Fax: 03 41/9 94 01 13, e-mail: angelafr@cbs.mpg.de

Gigerenzer, Gerd, Prof. Dr., geb. 1947; Direktor am MPI für Bildungsforschung; Hauptfachrichtung: Psychologie; dienstlich: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Lentzeallee 94, 14195 Berlin, Tel.: 0 30/82 40 64 60, Fax: 0 30/82 40 63 94, e-mail: sekgigerenzer@mpib-berlin.mpg.de

Hillemeier, Bernd, Prof. Dr. Prof. Dr.-Ing., geb. 1941; Universitätsprofessor für Baustoffe und Baustoffprüfung und Direktor des Instituts für Erhaltung und Modernisierung von Bauwerken (IEMB); Hauptfachrichtung: Baustofftechnologie; dienstlich: Technische Universität Berlin, Gustav-Meyer-Allee 25 – TIB 1-B4, 13355 Berlin, Tel.: 0 30/31 47 21 00, Fax: 0 30/31 47 21 10, e-mail: b.hillemeier@bv.tu-berlin.de

Huisken, Gerhard, Prof. Dr., geb. 1958; Direktor am MPI für Gravitationsphysik; Hauptfachrichtung: Mathematik; dienstlich: Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Am Mühlenberg 1, 14776 Golm/Potsdam, Tel.: 03 31/5 67 72 24, Fax: 03 31/5 67 72 98, e-mail: gerhard.huisken@aei.mpg.de

Kleiner, Matthias, Prof. Dr.-Ing., geb. 1955; Leiter des Instituts für Umformtechnik und Leichtbau; Hauptfachrichtung: Produktionswissenschaften, Umformtechnik und Leichtbau; dienstlich: Universität Dortmund, Institut für Umformtechnik und Leichtbau, Baroper Straße 301, 44227 Dortmund, Tel.: 02 31/7 55 26 80, Fax: 02 31/7 55 24 89, e-mail: matthias.kleiner@udo.edu

Kliegl, Reinhold, Prof. Dr., geb. 1953; C4-Professor; Hauptfachrichtung: Psychologie; dienstlich: Universität Potsdam, Humanwissenschaftliche Fakultät, Institut für Psychologie, Postfach 60 15 53, 14415 Potsdam, Tel.: 03 31/9 77 28 68, Fax: 03 31/9 77 27 93, e-mail: kliegl@rz.uni-potsdam.de

Knobloch, Eberhard, Prof. Dr., geb. 1943; Universitätsprofessor, Akademieprofessor; Hauptfachrichtung: Geschichte der exakten Wissenschaften und der Technik; dienstlich: Technische Universität Berlin, Ernst-Reuter-Platz 7, 10587 Berlin, Tel.: 0 30/4 01 90 72, Fax: 0 30/4 01 36 13, e-mail: eberhard.knobloch@tu-berlin.de und Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Jägerstraße 22/23, 10117 Berlin

Lübbe, Hermann, Prof. Dr. phil. Dr. theol. h. c., geb. 1926; Honorarprofessor der Universität Zürich; Hauptfachrichtung: Philosophie und Politische Theorie; privat: Mühlebachstraße 41/39, 8008 Zürich, Schweiz, Tel.: 00 41/44/2 61 10 16, Fax: 00 41/44/2 61 10 16, e-mail: hermann.luebbe@access.unizh.ch

Lucas, Klaus, Prof. Dr.-Ing., geb. 1943; Universitätsprofessor; Hauptfachrichtung: Thermodynamik; dienstlich: Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Lehrstuhl für Technische Thermodynamik, Schinkelstraße 8, 52062 Aachen, Tel.: 02 41/8 09 53 80, Fax: 02 41/8 09 22 55, e-mail: lucas@ltt-rwth-aachen.de

Maier, Wolfgang, Prof. Dr., geb. 1949; Direktor der Klinik für Psychiatrie und Psychotherapie des Universitätsklinikums Bonn; Hauptfachrichtung: Psychiatrie und Psychotherapie; dienstlich: Klinik für Psychiatrie und Psychotherapie des Universitätsklinikum Bonn, Sigmund-Freud-Straße 25, 53127 Bonn, Tel.: 02 28/28 71 57 22, Fax: 02 28/28 71 60 97, e-mail: wolfgang.maier@ukb.uni-bonn.de

Markl, Hubert, Prof. Dr. Dr. h. c. mult., geb. 1938; Professor i. R.; Hauptfachrichtung: Biologie; dienstlich: Universität Konstanz, FB Biologie, Universitätsstraße 10, Fach M 612, 78457 Konstanz, Tel.: 0 75 31/88 27 25, Fax: 0 75 31/88 43 45, e-mail: hubert.markl@uni-konstanz.de

Menninghaus, Winfried, Univ.-Prof. Dr., geb. 1952; Professor für Allgemeine und Vergleichende Literaturwissenschaft; Hauptfachrichtung: Allgemeine und Vergleichende Literaturwissenschaft; dienstlich: Freie Universität Berlin, Peter Szondi-Institut für Allgemeine und Vergleichende Literaturwissenschaft, Habelschwerdter Allee 45, 14195 Berlin, Tel.: 0 30/83 85 64 22, Fax: 0 30/83 85 64 19, e-mail: winmen@zedat.fu-berlin.de

Müller, Stefan, Prof. Dr., geb. 1962; Direktor am MPI für Mathematik in den Naturwissenschaften; Hauptfachrichtung: Mathematik; dienstlich: Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Inselstraße 22-24, 04103 Leipzig, Tel.: 03 41/9 95 96 35, Fax: 03 41/9 95 96 33, e-mail: sm@mis.mpg.de

Pinkau, Klaus, Prof. Dr. phil. Dr. rer. nat. h. c., DSc., geb. 1931; Emeritus, Wissenschaftlicher Direktor des Alfried Krupp Wissenschaftskollegs Greifswald; Hauptfachrichtung: Physik, Astrophysik; privat: Meistersingerstraße 52a, 81927 München, Tel.: 0 89/91 29 90, Fax: 0 89/92 09 13 22, e-mail: pinkau-muenchen@t-online.de

Quack, Martin, Prof. Dr., geb. 1948; Professor, Ordinarius für Physikalische Chemie an der ETH Zürich; Hauptfachrichtung: Physikalische Chemie; dienstlich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Laboratorium für Physikalische Chemie, Wolfgang-Pauli-Straße 10, 8093 Zürich, Schweiz, Tel.: 00 41/44/6 32 44 21, Fax: 00 41/44/6 32 10 21, e-mail: quack@ir.phys.chem.ethz.ch

Reich, Jens, Prof. Dr., geb. 1939; Abteilungsleiter Bioinformatik am MDC für Molekulare Medizin; Hauptfachrichtung: Bioinformatik; dienstlich: Max-Delbrück-Centrum für Molekulare Medizin, Bioinformatik, Robert-Rössle-Straße 10, 13125 Berlin, Tel.: 0 30/94 06 28 33, Fax: 0 30/94 06 28 34, e-mail: reich@mdc-berlin.de

Roth, Gerhard, Prof. Dr. Dr., geb. 1942; Rektor des Hanse-Wissenschaftskollegs und Professor (C4) für Verhaltensphysiologie, Universität Bremen; Hauptfachrichtung: Neurobiologie; dienstlich: Hanse-Wissenschaftskolleg, Lehmkuhlenbusch 4, 27753 Delmenhorst, Tel.: 0 42 21/9 16 01 08, Fax: 0 42 21/9 16 01 99, e-mail: gerhard.roth@uni-bremen.de

Selge, Kurt-Victor, Prof. Dr., geb. 1933; Professor Emeritus der Humboldt-Universität zu Berlin, ehrenamtlicher Leiter des Akademienvorhaben *Schleiermacher: Kritische Gesamtausgabe* an der BBAW; Hauptfachrichtung: Kirchengeschichte; dienstlich: Berlin-

Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Akademienvorhaben Schleiermacher: Kritische Gesamtausgabe, Jägerstraße 22/23, 10117 Berlin, Tel.: 0 30/20 37 05 54, Fax: 0 30/20 37 03 44, e-mail: selge@bbaw.de

Wagemann, Hans-Günther, Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c., geb. 1935; Professor Emeritus; Hauptfachrichtung: Elektrotechnik, Festkörperphysik; dienstlich: Technische Universität Berlin, Einsteinufer 19 – E 2, 10587 Berlin, Tel.:0 30/31 42 24 42, Fax: 0 30/3 14 25 52 64, e-mail: wagemann@mikro.ee.tu-berlin.de

Ziegler, Günter M., Prof., geb. 1963; Professor für Mathematik; Hauptfachrichtung: Mathematik; dienstlich: Technische Universität Berlin, Fakultät II, Institut für Mathematik, Straße des 17. Juni 136 – MA 6-2, 10623 Berlin, Tel.: 0 30/31 42 57 30, Fax: 0 30/ 31 42 12 69, e-mail: ziegler@math.tu-berlin.de