

S U R

QUELQUES PROPRIÉTÉS

D E S

SECTIONS CONIQUES,

QUI CONVIENNENT À UNE INFINITÉ D'AUTRES LIGNES
COURBES.Par M^r. E U L E R.

Traduit du Latin.



LES SECTIONS Coniques ont plusieurs propriétés qui ne conviennent qu'à elles seules; mais elles en ont aussi plusieurs qui leur sont communes avec une infinité d'autres Courbes. C'est ainsi que l'Axe qui coupe en deux toutes les ordonnées Orthogonales, & le centre, qui est placé au point du milieu de la Courbe, conviennent à un nombre innombrable d'autres lignes courbes, tant Algebriques que transcendantes; comme en est convaincu quiconque examine la nature des lignes courbes. Mais les Geometres ont encore fait voir que d'autres propriétés, qui du premier coup d'oeil paroissent propres aux Sections coniques, sont aussi communes aux autres lignes courbes. Il est manifeste que les propriétés par lesquelles les Sections coniques sont

font tout à fait déterminées, leur font tellement propres, qu'elles ne peuvent convenir à aucune autre ligne courbe: mais on rencontre outre cela d'autres propriétés, desquelles il est difficile de décider, si elles font propres aux Sections coniques ou non. Pour nous demêler de cet embarras, il faut rechercher par la voye de l'analyse toutes les lignes courbes, qui puissent avoir une certaine propriété proposée, & si nous trouvons que les Sections coniques soient les seules Courbes qui y satisfassent, nous ferons alors certains que cette propriété est un attribut propre des Sections coniques. Les Géomètres ont déjà donné par ci par là les solutions de plusieurs questions de cette nature; solutions qui ont donné des accroissemens très considérables à l'Art d'inventer. Nous nous proposons donc d'ajouter ici quelques autres questions semblables, tirées de la nature des diametres obliquangles, qui convient principalement aux Sections coniques.

II. CONSIDERONS donc cette propriété de la Parabole, par laquelle il est constant que toute ligne droite parallèle à l'axe est en même tems un diametre obliquangle, qui coupe en deux toutes les droites parallèles entr'elles tirées sous un certain angle au dedans de la Parabole. En effet soit $AMFm$ une Parabole, dont l'axe soit AD , & qu'on lui tire une parallèle quelconque FI , qui rencontre la Parabole en F , on fait que cette droite coupe en deux en E toutes les cordes Mm parallèles à la tangente de la courbe en F . Nous définissons bien la position de ces droites coupées en deux, de manière que nous les disons parallèles à la tangente en F , mais cette condition est déjà comprise dans la nature de la bisection. Car si dans une courbe quelconque la droite FG coupe en deux toutes les cordes Mm inclinées à FI sous l'angle donné $GE m$, il est nécessaire que la tangente de la courbe en F soit parallèle aux ordonnées mêmes;

mes; car la plus petite ordonnée & qui évanouit en tombant sur le point T fera congruente avec la tangente. Pour découvrir à présent comment cette propriété est propre à la Parabole, résolvons le Problème suivant.

III. *TROUVER la Courbe AMFm rapportée à l'axe AD, qui à la distance DE donnée de l'axe ait le diamètre FEG parallèle à l'axe AD, qui coupe en deux toutes les ordonnées Mm tirées avec l'axe à l'angle donné T.*

SOIT LA distance du diamètre à l'axe donnée $DE = a$, & le sinus de l'angle MTA pareillement donné $= m$, le cosinus fera $= n, = \sqrt{1 - mm}$ en posant le sinus entier $= 1$. Si à présent dans un point quelconque T de l'axe AD prolongé à l'indéfini, on mène sous l'angle donné la droite TMm, elle coupera la courbe qu'on cherche en deux points M & m; ou bien la double valeur de la droite TM répondra au point T, dont chacune exposera la distance du point T au point d'intersection M ou m. C'est pourquoi si nous posons $AT = t$, & $TM = z$, la relation entre z & t s'exprimera par une équation, qui pour chaque valeur de t fournira une double valeur pour z ; & ainsi cette équation sera quarrée de la sorte, $zz = 2Pz - Q$, les fonctions quelconques de t étant marquées par P & Q. Cette equation au lieu de la valeur donnée t fournit donc une double valeur pour z , par où est indiquée la double intersection de la droite Tm & de la courbe.

IV. OR TM & Tm étant deux racines de z , suivant cette équation $zz - 2Pz + Q = 0$, on aura $TM + Tm = 2P$,

& par conséquent $\frac{TM + Tm}{2} = P$. Et parce que E est le point

du milieu entre les points M & m, cela fera $\frac{TM + Tm}{2} = TE$,

& de là $P = TE$. Mais à cause de $DE = a$ & $\sin. DTE = m$,

il en naîtra $\frac{a}{TE} = m$, ou $TE = P = \frac{a}{m}$, d'où l'équation

entre z & t fera $zz = \frac{2az}{m} - Q$, Q étant pris pour une fonction

quelconque de t . Posons à présent que l'équation entre les coordonnées pour la courbe requise AMm soit l'abscisse $AP = x$, &

l'appliquée $PM = y$; $y : z$ fera $= m$, & $\frac{t+x}{z} = n$, d'où vient

$z = \frac{y}{m}$; & $t = nz - x = \frac{ny}{m} - x$. La courbe AMm aura

donc la propriété prescrite, si $\frac{yy - 2ay}{mm}$ est égal à une fonction

quelconque de $\frac{ny}{m} - x$.

V. SI DONC NOUS posons $ny - mx = X$ & $yy - 2ay = Y$, & que nous en formions l'équation générale entre X & Y rationnelle, favoir,

$$0 = \alpha + \beta X + \gamma Y + \delta X^2 + \epsilon XY + \zeta Y^2 + \eta X^3 + \theta X^2 Y + \&c.$$

dans cette équation générale seront contenuës toutes les équations possibles entre X & Y , & il en résultera $Y =$ à une fonction quelconque de X , en sorte que $yy - 2ay$ fera tout à fait $=$ à une fonction quelconque de $ny - mx$, comme le requiert nôtre solution. C'est pourquoi pour satisfaire pleinement au Problème proposé, qu'on forme une équation quelconque entre les deux variables X & Y , & qu'alors on mette $ny - mx$ à la place de X , & $yy - 2ay$ à la place de Y , ce qui étant fait on aura une équation entre x & y pour la courbe AMm , qui aura cette propriété, que la parallèle FG menée à l'axe AD dans la distance $DE = a$ fera le diamètre oblique

quangle de la courbe, qui coupera en deux toutes les cordes Mm , qui font avec lui l'angle mEG , dont le sinus est $= m$, le cosinus $= n$.

VI. IL Y a donc un nombre innombrable de lignes courbes, qui ont la propriété qui étoit prescrite dans le Problème, savoir que dans une distance donnée de l'axe AD , le diamètre parallèle à l'axe coupe en deux toutes les cordes parallèles à la tangente en F . Or non seulement cette propriété convient à la Parabole, mais dans la Parabole toute ligne droite parallèle à l'axe est en même tems le diamètre, au lieu que dans les courbes trouvées une seule droite parallèle à l'axe a cette propriété. C'est pourquoi pour approcher davantage de la nature de la Parabole, examinons s'il y a outre la Parabole d'autres courbes, dans lesquelles deux ou plusieurs lignes droites parallèles à l'axe soient diamètres. Et pour nous en démêler plus aisément, cherchons, si entre les courbes trouvées, outre la Parabole il y en a quelqu'autre, dans laquelle l'axe AD soit au moins le diamètre orthogonal. Pour cet effet soit proposé le Problème suivant.

VII. *ENTRE toutes les courbes AMm , qui sont partagées par l'axe AD en deux parties semblables & égales, déterminer celles qui à une distance donnée de part & d'autre de l'axe AD ont deux diamètres obliquangles, comme FI , qui coupent en deux toutes les cordes Mm menées à l'angle donné avec l'axe AD .*

PUISQUE L'AXE AD divise la courbe en deux parties semblables & égales, il est évident, si la droite FG parallèle à l'axe AD est le diamètre, qu'alors dans l'autre partie de la courbe à la même distance de l'axe il doit y avoir un diamètre parallèle à l'axe. Mais pour que l'axe AD soit un semblable diamètre orthogonal, il est nécessaire que dans l'équation entre x & y ; la variable y ait de part & d'autre un nombre pair de dimensions, & jamais impair. On doit donc exclure de l'équation générale trouvée pour la solution du

Problème précédent tous les cas dans lesquels les exposans de y se rencontrent impairs. Mais comme X est $=ny - mx$ & $Y = yy - 2ay$, y a de part & d'autre une dimension unique, & par conséquent impaire. On pourra donc des deux variables X & Y former une nouvelle variable Z , dans laquelle ne se rencontrera aucune puissance impaire de y , qui

fera $Z = Y + \frac{2ax}{n} = yy - \frac{2max}{n}$. On satisfera donc

aussi au Problème précédent par l'équation générale entre Y & Z , savoir: $0 = \alpha + \beta Y + \gamma Z + \delta Y^2 + \epsilon YZ + \zeta Z^2 + \eta Y^3 + \theta Y^2 Z + \&c.$ Y dénotant $= yy - 2ay$ & $Z = yy - \frac{2max}{n}$, & elle comprendra pareillement en soi toutes les Cour-

bes qui y satisfont.

VIII. OR IL paroît premièrement que dans tous les termes qui ne contiennent pas Y , il ne se rencontre point de puissances impaires de y , & que par conséquent ces termes, savoir $\alpha, \gamma Z, \zeta Z^2, k Z^3$ &c. doivent être laissés à l'écart dans le cas dont il s'agit. Mais le terme Y doit être exclus, comme emportant y' , laquelle puissance ne peut être ôtée par aucun des termes suivans, & la même raison donne l'exclusion aux termes YZ, YZ^2, YZ^3 &c. De plus, si l'on admet le terme Y^2 à cause de la puissance y^3 qu'il contient, on sera obligé d'admettre en même tems Y^3 par lequel on puisse ôter y^3 . Mais Y^3 contient encore y^5 qu'on ne peut ôter sans Y^4 , & ainsi de suite, une puissance quelconque de Y contenant toujours la puissance impaire de y , qui n'étoit pas dans les précédentes, & qui par conséquent devrait être détruite par les suivantes, d'où naîtroit une progression à l'infini. Il en faut dire autant des termes $Y^2 Z, Y^3 Z^2$ &c. dont aucun ne sauroit être employé, sans en admettre une infinité de suivans. On ne satisfera donc à la demande

mande

mande que par cette équation $o = a + \gamma Z + \zeta Z^2 + k Z^3 \text{ \&c.}$ qui ne contienne point du tour Υ . Et par cette equation Z fera = à une constante, c'est à dire, $yy - \frac{2 m a x}{n} = C$, qui appartient tellement à la Parabole, qu'elle exclut entierement toutes les autres Courbes.

IX. OUTRE LA Parabole Apollonienne, il n'y a donc point d'autre Courbe composée de deux parties semblables & égales, qui ait au moins un diametre parallèle à l'axe, en forte que cette propriété ne convient qu'à la seule Parabole. Mais en vertu de l'equation $yy - \frac{2 m a x}{n} = o$ (car nous pouvons faire la constante C egale à *Zero*) il paroît que non seulement à la distance donnée a , mais qu'à toute distance absolument de l'axe, on trouve le diametre parallèle à l'axe. Car si nous posons $\frac{2 m a}{n} = c$, en forte que $yy - cx = o$, qui est l'equation pour une Parabole quelconque, si à une distance quelconque = a , on mene une parallèle à l'axe, elle fera le diametre, & coupera en deux toutes les cordes, qui constituent avec l'axe un angle, dont la tangente soit = $\frac{m}{n} = \frac{c}{2a}$. Excepté donc l'axe qui partage la Courbe en deux parties egales & semblables, il ne fauroit y avoir aucun diametre obliquangle parallèle à l'axe, que toute droite parallèle à l'axe ne soit en même tems diametre. Mais cela doit etre restraint aux seules Courbes Algebriques, car les transcendentes ne sont pas exclusés par cette progression de termes $Y, Y^2, Y^3 \text{ \&c.}$ à l'infini; en forte que ce nonobstant, on peut produire plusieurs Courbes transcendentes, qui ont plusieurs diametres paralleles entr'eux.

X. NOTRE DESSEIN ne nous permet pas de proceder ici à l'examen de ces Courbes transcendentes, car nous n'avons en vuë dans ce Mémoire que les Courbes Algébriques. Cependant, afin qu'il paroisse plus clairement, qu'il existe actuellement de semblables Courbes transcendentes, qui satisfont à la question présente, nous fournirons une équation générale, qui renferme en soi toutes ces Courbes transcendentes. Posé $Y = yy - 2ay$, qu'on cherche la valeur de T par cette équation différentielle d'un degré infini, en posant l'element dY constant.

$$0 = \frac{dT}{dY} + \frac{4aY d^3 T}{1.2.3. dY^3} + \frac{16a^4 Y^2 d^5 T}{1.2.3.4.5 dY^5} + \frac{64a^6 Y^3 d^7 T}{1.2. \dots .7 dY^7} + \&c.$$

Alors T qui sera fonction de Y fera une semblable fonction de y , dans laquelle ne se rencontreront aucunes dimensions impaires de y . C'est pourquoi, si l'on prend W fonction quelconque tant de T que de $Z = yy - \frac{2m a x}{n}$, l'équation $W = 0$ exprimera toutes les

Courbes qui ont la propriété proposée; savoir, qu'outre l'axe AD diametre orthogonal, elles auront de part & d'autre à une distance donnée $= a$ de cette axe des diametres obliquangles parallèles à l'axe.

XI. AU RESTE il est à propos de faire attention ici à cette loi générale de la nature, que toute Courbe qui a deux diametres parallèles entr'eux, aura une infinité de semblables diametres, également distans l'un de l'autre. En effet, que la courbe $mABCn$ ait deux diametres Aa , Bb , parallèles entr'eux, dont Aa coupe en deux les cordes Mm parallèles à la tangente en A , & Bb coupe pareillement MN , mn parallèles à la tangente en B . Des termes M & m d'une corde quelconque Mm divisée en deux par le diametre Aa , qu'on tire les cordes MN & mn parallèles à la tangente en B , on
aura

aura $MQ = NQ$ & $mT = nT$. Qu'on tire la corde Nn , et elle fera un angle donné avec les diametres Aa ou Bb , à cause de tous les angles donnés du quarré $MNnm$; ensuite en tirant PSR parallèle à MN , mn , cette nouvelle corde Nn fera partagée en deux en R , & le point R fera toujours posé sur la ligne droite Cc parallèle à Aa & Bb , & sa distance du diametre Bb fera égale à la distance du diametre B à l'égard du diametre Aa . Cette droite Cc coupera donc en deux toutes les cordes Nn , & fera par conséquent le diametre.

XII. OR L'ANGLE NRc fera tellement déterminé par les angles donnés MQb & mPa , que $\cot. mPa + \cot. NRc$ fera $= 2 \cot. MQb$; & par conséquent $\cot. NRc = 2 \cot. MQb - \cot. mPa$: Donc les cotangentes des angles mPa , MQb , NRc constituent une proportion Arithmetique. Mais comme nous avons démontré par les deux diametres Aa , Bb le troisieme Cc , de même par deux contiguës quelconques on démontrera le suivant; par où l'on comprend, que si une courbe a deux diametres parallèles entr'eux, elle aura une infinité de diamètres distans entr'eux à intervalles égaux. Que si la cotangente de l'angle mPa , sous lequel le premier diametre coupe en deux les cordes, est dite $= p$, & la cotangente de l'angle MQb , sous lequel le second diametre, coupe en deux les cordes $Bb = q$, la cotangente de l'angle NRc , sous lequel le troisieme diametre coupe en deux les cordes fera $= 2q - p$, & la cotangente de l'angle, sous lequel le quatrieme diametre suivant coupe en deux les cordes $= 3q - 2p$, la cotangente pour le cinquieme diametre $= 4q - 3p$, & ainsi de suite; en sorte que les cotangentes de tous les angles, sous lesquels les diametres qui se suivent par ordre coupent leurs cordes en deux, constituent une progression arithmetique. Ainsi les Courbes transcendantes, dans lesquelles nous trouvons trois diametres, dont celui

celui du milieu est orthogonal, auront en même tems une infinité de diametres.

XIII. DE LA NOUS pourrons à présent démontrer avec la plus grande rigueur Geometrique, que la Parabole est la seule courbe, dans laquelle toutes les droites sans exception, qui sont parallèles à l'axe, soient en même tems des diametres. Car pour attribuer cette propriété à une courbe, il suffit qu'elle ait deux diametres qui s'approchent infiniment; alors, en vertu des démonstrations precedentes, il faut que toutes les droites qui leur sont parallèles soient des diametres. Or nous avons posé ci dessus §. X. la distance de deux diametres qui se suivent immédiatement = a , c'est pourquoi cette distance a doit être posée évanouissante. Ce qui étant fait, il nai-

tra de l'équation (§. X.) $o = \frac{d T}{d Y}$, & par conséquent $T = à$

une constante. Si donc $W = o$ exprime l'équation générale pour toutes les courbes, dont toutes les droites parallèles à l'axe sont des diametres, W fera une fonction quelconque de T ou d'une quan-

tité constante, & de $Z = y y - \frac{2 m a x}{n}$. On tirera donc de cette

équation $Z = à$ une constante, & ainsi $y y - \frac{2 m a x}{n} = C$, laquel-

le équation ne renferme en soi aucune autre Courbe que la Parabole.

XIV. APRÈS AVOIR expédié ce qui concerne les diametres parallèles entr'eux, à la considération desquels la Nature de la Parabole nous avoit invité, examinons les diametres qui concourent en un point, pour connoître plus à fonds la nature de l'Ellipse & de l'Hyperbole, courbes dans lesquelles toutes les droites menées par
leur

leur centre font des diametres. Car en formant notre raisonnement de la même maniere, nous comprendrons si cette propriété ne se trouve dans aucunes autres Courbes, & à quel egard elle est commune à ces Sections coniques avec les autres Courbes. Il n'y a à la verité aucun doute, que ce ne soit là un attribut propre des Sections coniques, que toutes les droites sans exception, qui sont menées par le centre, sont en même tems des diametres; mais peut-etre existe-t-il d'autres Courbes, qui si elles n'ont pas une infinité de diametres qui concourent au même point, en ont pourtant deux ou trois auxquels cela arrive. Pour le découvrir, nous proposons le Problème suivant à résoudre.

XV. TROUVER toutes les Courbes AMm rapportées à l'axe AC avec cette condition, qu'en menant du point donné C la droite CF , qui fasse avec l'axe l'angle donné ACF , cette droite coupe en deux en E toutes les cordes Mm parallèles à la tangente en F .

D'ABORD IL est manifeste, que si toutes les cordes que la droite CF coupe en deux, sont parallèles entr'elles, la tangente au point F doit aussi leur être parallèle. Comme donc l'angle ETC est constant, posons le sinus de l'angle $ETC = m$; le cosinus $= n = \sqrt{1 - mm}$; de plus que le sinus de l'angle ACT soit $= p$, le cosinus $= q = \sqrt{1 - pp}$, le sinus de l'angle CEm , sous lequel le diametre CF coupe en deux les cordes Mm sera $= mq + np$, & le cosinus $= nq - mp$. Puisque le point T est variable, posons $CT = t$, & en menant de T sous l'angle donné CTE la droite TMm , elle coupera la Courbe en deux points M & m ; & ainsi la valeur de la droite TM , qui soit $= z$, aura une double valeur, l'une pour TM , l'autre pour Tm . C'est pourquoi z sera déterminé

par t par une équation quarrée, qui soit $zz = 2Pz - Q$, prenant P & Q pour fonctions de Ft ; & par conséquent TM fera $= P - \sqrt{PP - Q}$ & $Tm = P + \sqrt{PP - Q}$.

XVI. AINSI $TM + Tm$ fera $= 2P$, & parce que E est le point du milieu de la corde Mm , TE deviendra $= P$. Mais à cause des angles donnés dans le triangle CTE , on aura

$$CT : TE = \sin A. \quad CET : \sin A. \quad TCE$$

$$t : P = mq + np : p$$

d'où nous trouvons $P = \frac{pt}{mq + np}$ & de là nous aurons entre

z & t cette equation: $zz = \frac{2ptz}{mq + np} - Q$, Q demeurant une fon-

ction quelconque de t . Pour connoître à présent la Courbe, posons

($CP = x$) $PM = y$, on aura $\frac{y}{z} = \frac{PM}{TM} = m$, & par consé-

quent $z = \frac{y}{m}$ & $PT = t - x = nz = \frac{ny}{m}$, enforte que soit

$= \frac{mx + ny}{m}$. D'où résulte pour la Courbe demandée cette

équation $\frac{yy}{mm} = \frac{2p(mx + ny)y}{mm(mq + np)} - Q$, Q dénotant une fonction

quelconque de $t = \frac{mx + ny}{m}$. C'est pourquoi on aura

$\frac{2pmxy + (np - mq)yy}{mm(mq + np)}$, ou $yy + \frac{2mpxq}{np - mq}$ pour fonction quel-

conque de $x - \frac{ny}{m}$. Ou si l'on dit $x - \frac{ny}{m} = X$ & $yy +$

$2mp$

$\frac{2m p x y}{n p - m q} = Y$, & que W soit fonction quelconque de X & Y , l'équation $W = 0$ exprimera la nature de toutes les Courbes, qui satisfont à ce qu'on demande.

XVII. CETTE SOLUTION est encore extrêmement éloignée de notre but, car elle ne contient que les Courbes, qui renferment un seul diamètre obliquangle, en sorte que l'intersection C est tout à fait arbitraire, comme dépendant de la position de l'axe AC qui est arbitraire. Mais nous ne laisserons pas de nous approcher davantage de l'exécution de notre dessein par le moyen de cette solution, si entre ces Courbes innombrables, nous choisissons celles que l'axe AC divise en deux parties semblables & égales, ou dans lesquelles l'axe AC est en même tems le diamètre orthogonal. Il est donc requis pour cet effet que dans l'équation ci dessus trouvée, les puissances de y aient par tout des exposans pairs, & qu'ainsi les puissances impaires de y se détruisent. Puis donc que l'équation générale trouvée, en posant $X = x + \frac{n y}{m}$ & $Y = y y +$

$\frac{2m p x y}{n p - m q}$ revient à ceci $0 = \alpha + \beta X + \gamma Y + \delta X^2 + \epsilon X Y + \zeta Y^2 + \eta X^3 + \&c.$ les coefficients doivent être déterminés de manière que les puissances impaires de y évanouissent.

XVIII. Et d'abord il paroît que β doit être $= 0$, parce que le terme $\frac{n y}{m}$ ne pourroit être oté par aucun des suivans, comme d'un autre côté l'on voit que γ & δ peuvent être déterminés en sorte que des termes $\alpha + \gamma Y + \delta X^2$ sortent les dimensions impaires de y : qu'on

L 2

y : qu'on pose $\gamma = np - mq$ & $\delta = -\frac{m m p}{n}$, on aura $(np - mq)$

$$Y - \frac{m m p}{n} X^2 = -mqyy - \frac{m m p x x}{n}. \text{ Si donc on pose } Z = nqyy$$

$$+ mp x x = mp X^2 - \frac{n(np - mq)}{m} Y, \text{ alors } Z \text{ fera une fonction,}$$

dans laquelle y a seulement des dimensions paires. C'est pourquoi si W est mis pour fonction quelconque de $Z = nqyy + mp x x$ & $X = mx + ny$, alors l'equation $W = 0$ satisfera également comme la précédente, & outre cela elle sera plus propre à rejeter les dimensions impaires de y .

XIX. EN POSANT donc $X = mx + ny$ & $Z = mp x x + nqyy$, l'equation pour les Courbes, dans lesquelles la droite CF est diametre, sera $0 = \alpha + \beta X + \gamma Z + \delta X^2 + \epsilon X Z + \zeta Z^2 + \eta X^3 + \&c.$ Si donc tous les termes dans lesquels X se trouvent evanouissent, la variable y aura partout des dimensions paires, & la Courbe qui en résulte sera en même tems divisée par l'axe AC en deux parties semblables & égales. Alors Z fera $= C$ ou $aa = mp x x + nqyy$, laquelle equation contient les Sections Coniques decrites autour du centre C & sur l'axe principal AC .

En posant donc bb à la place de $\frac{aa}{nq}$, on aura $yy = bb - \frac{mp}{nq} x x.$

Soit à présent l'equation pour les Sections coniques $yy = bb - k x x$ générale, & il paroît qu'elle a en effet autant d'étendue que celle-ci. En menant donc du centre de la Section conique une droite quelconque CF faisant un angle avec l'axe FCA , dont la tangente soit $= \frac{p}{q}$; cette droite coupera en deux toutes les cordes $M m$,

qui

qui étant prolongées font avec l'axe AC l'angle MTC, dont la tangente est $= \frac{m}{n} = K. \frac{q}{p}$. Ainsi la tangente de l'angle CEm, sous lequel les cordes Mm sont coupées en deux par le diamètre CF sera $= \frac{pp + kqq}{(1-k)pq}$. D'où l'on voit que la tangente $\frac{p}{q}$ n'étant pas déterminée par soi-même, mais pouvant être prise arbitrairement, toute droite CF tirée du centre est un diamètre; & si $k = 1$, toute cette droite sera un diamètre orthogonal, & la courbe un cercle, comme la chose est évidente par elle-même.

XX. NOUS POURRONS encore découvrir d'autres Courbes, dans lesquelles AC soit le diamètre orthogonal, si nous déterminons les coefficients des termes, dans lesquels X se trouve, de manière que y n'ait nulle part des dimensions impaires. Or il paroît d'abord que X ni X² ne fauroient s'y trouver, parce que y & xy ne fauroient être otés par aucun des termes suivans; car afin que y n'entrât pas dans X, il faudroit que n fut = 0, & afin que le terme xy ne fut pas dans XX, mn devoit être = 0. Mais les termes X³ & XZ fournissent des termes homogènes, d'où les termes y³ & xx y pourront être rejettés, si np est = 3mq. Et afin que des termes X⁴, X³Z, & XZ², qui sont homogènes, on puisse rejeter les dimensions impaires, il faut ou que $\frac{np}{mq}$ soit = 3, ou $\frac{np}{mq} = 5 + 2\sqrt{5}$. De la même manière il doit toujours y avoir une certaine relation entre les tangentes $\frac{m}{n}$ & $\frac{p}{q}$, afin de pouvoir satisfaire à ce qu'on demande; & si cette relation ne se trouve pas, il

est impossible de produire d'autres Courbes qui y fatisfissent outre les Sections coniques.

XXI. P O U R développer donc les cas particuliers, dans lesquels

$\frac{m}{n}$ a une certaine relation avec $\frac{p}{q}$, posons afin d'abrèger $\frac{m}{n}$

$= g$ & $\frac{mp}{nq} = k$, afin que X soit $= gx + y$ & $Z = Kx + yy$.

Qu'on prenne à présent les termes homogènes, dans lesquels x & y ont trois dimensions, qui sont $\alpha X^3 + \beta XZ$; substitution faite, ils donneront ces termes,

$$\begin{array}{ccccccc} +\alpha g^3 & +3\alpha g^2 & +3\alpha g & +\alpha & & & \\ +\beta g k & +\beta k & +\beta g & +\beta & & & \\ x^3 & x^2 y & x y^2 & y^3 & & & \end{array}$$

dans lesquels les termes, qui contiennent les dimensions impaires de y , doivent évanouir. $\alpha + \beta$ fera par conséquent $= 0$ & $3\alpha g^2$

$+ \beta k = 0$; d'où $\beta = -\alpha$, & $k = 3gq$ ou $\frac{mp}{nq} = \frac{3mm}{nn}$, & de là

$\frac{p}{q} = \frac{3m}{n}$. Or alors $\alpha X^3 + \beta XZ$ se change en $2\alpha(gxy - q^3 x^3)$

ou $2\alpha \left(\frac{m}{n} xyy - \frac{m^3 x^3}{n^3} \right)$.

XXII. SI DONC la tangente de l'angle ACF qui est $\frac{p}{q}$ est

trois fois plus grande que la tangente de l'angle CTE, qui est

$\frac{m}{n}$, alors on pourra produire des Courbes innombrables AMm,

dans lesquelles AC est le diametre orthogonal, & CF le diametre obliquangle. De plus qu'on pose la tangente de l'angle ACE $= \theta$

on

on aura $\frac{p}{q} = \theta$ & $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}\theta$, & la tangente de l'angle CEM
 fera $= \frac{4\theta}{3-\theta\theta}$. Alors en prenant $Z = yy + \frac{1}{3}\theta\theta xx$, & V
 $= \frac{1}{3}\theta xy - \frac{1}{27}\theta^3 x^3$, que W denote une fonction quelconque
 de Z & V , & l'equation $W = 0$ exprimera toujours la Courbe, qui
 possede la propriete susdite. Or il est manifeste, AC etant le dia-
 metre orthogonal, que la droite menee par C à l'autre partie de AC,
 qui fera par embas avec AC un angle, dont la tangente soit $= \theta$,
 fera un diametre obliquangle, de même que CF menee par en haut.
 Donc les Courbes auxquelles cette propriete convient, seront com-
 prises dans l'equation générale: $0 = \alpha + \beta Z, \gamma V + \delta Z^2 + \epsilon ZV$
 $+ \zeta V^2 + \eta Z^3 + \&c.$

XXIII. AINSI ENTRE une infinité de Courbes de cette na-
 ture nous avons les lignes du troisieme ordre, qui sont comprises
 dans cette equation: $a^3 = byy + \frac{1}{3}\theta\theta\theta xx + \frac{1}{3}\theta xy - \frac{1}{27}\theta^3 x^3$,
 ou $yy = \frac{a^3 - \frac{1}{3}\theta\theta\theta xx - \frac{1}{27}\theta^3 x^3}{b + \frac{1}{3}\theta x}$. Ces Courbes sont contenues

dans les Hyperboles redundantes de Newton, qui ont un seul
 diametre orthogonal. L'equation générale pour celles-ci est

$$yy = \frac{Av^3 + \beta v^2 + Cv + D}{v},$$

en prenant le commencement

de l'abscisse dans le point de l'axe, où l'asymtote aux appliquées y
 lui devient parallele. Entre ces Courbes donc celles qui satisferont

à ce qu'on demande sont celles où C fera $\frac{BB}{4A}$. Car alors, en pre-

nant $v = \frac{-B}{6A}$, on aura dans l'axe le point C, duquel si l'on mene

à l'axe

à l'axe la droite CF, faisant avec l'axe l'angle CFA, dont la tangente soit $\equiv 3\sqrt{A}$, cette droite sera le diametre obliquangle, coupant en deux les cordes Mm, qui font avec l'axe CA un angle, dont la tangente $\equiv \sqrt{A}$, & la tangente de l'angle, sous lequel ces cordes rencontrent le diametre sera $\equiv \frac{4\sqrt{A}}{13A}$.

Fig. 6. XXIV. SOIT DONC MMmm une semblable Hyperbole redundante, ayant l'axe AP, qui est en même tems le diametre orthogonal, en sorte qu'en prenant l'abscisse AP $\equiv v$, & en posant l'appliquée PM $\equiv y$, yy soit $\equiv \frac{Av^3 + Bv^2 + Cv + D}{v}$

$\equiv \frac{(2Av + B)}{4A} + \frac{D}{v}$, C étant $\equiv \frac{B^2}{4A}$, la droite LAL normale à l'axe sera une asymptote de la Courbe, & les deux autres asymptotes HDG se croiseront dans le point D de l'axe, de maniere

que AD soit $\equiv \frac{B}{24}$; la tangente de l'angle HDa sera $\equiv \sqrt{A}$, &

touté la Courbe sera composée de trois parties en forme d'Hyperbole MEM, mkm, & mCm. A present qu'on prenne

AC $\equiv \frac{B}{6A}$, & qu'on mene au dessus & au dessous les droites CF,

CF, en sorte que la tangente de l'angle CFA soit $\equiv 2\sqrt{A}$ ces deux droites du diametre couperont en deux toutes les cordes Mm, qui étant prolongées font avec l'axe l'angle MTA, dont la tangente $\equiv \sqrt{A}$; lesquelles droites Mm coupées en deux seront donc parallèles à l'un des diametres. Au reste cette Courbe peut recevoir plusieurs figures differentes, suivant qu'on determine la valeur de B, pourvu que A soit un nombre affirmatif. Il n'y a la

verité

verité dans la figure qu'une seule interfection de la Courbe avec l'axe en B; mais il peut arriver que la Courbe coupe l'axe en trois points, & cela arrive en effet, si en posant $AB = a$, on prend

$$v = \frac{-a}{2} - \frac{B}{24} \pm \sqrt{\left(-\frac{Ba}{2A} - \frac{3aa}{4}\right)}.$$

XXV. LES MEMES valeurs (§. XXII) $Z = yy + \frac{1}{3} \theta \theta xx$ & $V = \frac{1}{3} \theta xy^2 - \frac{1}{27} \theta^3 x^3$, peuvent faire trouver des Courbes innombrables d'ordres supérieurs, qui outre le diametre orthogonal, ayent deux ou plusieurs diametres obliquangles. Mais comme la formule V se trouve par $\alpha X^3 + \beta XZ$ (§. XXI.) en faisant evanouir les puissances impaires de y ; pareillement on peut faire la même chose dans des dimensions superieures. En effet en prenant $V =$

$$\alpha X^4 + \beta X^2 Z, \text{ \& en posant pour abreger } \frac{m}{n} = g \text{ \& } \frac{mp}{nq} = k,$$

on aura

$$\begin{array}{ccccccc} + \alpha g^4 & + 4 \alpha g^3 & + 6 \alpha g^2 & + 4 \alpha g & + \alpha & & \\ + \beta g^2 k & + 2 \beta g k & + \beta k x^2 y^2 & + 2 \beta g x y^3 & + 6 y^4 & & \\ & & + \beta g g & & & & \end{array}$$

Donc $2 \alpha g^2 + 6 k$ fera $= 0$, & $2 \alpha + 6 = 0$: d'où $6 = -2 \alpha$ & $k = gg$, ou $\frac{mp}{nq} = \frac{m m}{n n}$. Donc $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, & si l'on pose

comme auparavant $\frac{p}{q} = \theta$, cela fera $\frac{m}{n} = \theta$: $g = \theta$; $\alpha k = \theta \theta$;

& ainsi V fera $= -\alpha \theta^4 x^4 + 2 \alpha \theta^3 x^2 y^2 - \alpha y^4$, ou $V = -\alpha (\theta^2 xx - yy)^2$. C'est pourquoi si W est pris pour une fonction quelconque de $Z = \theta^2 xx + yy$ & $V = (\theta^2 xx - yy)^2$, & qu'on pose $W = 0$, la Courbe, outre le diametre orthogonal CA, aura les diametres obliquangles menés par C, qui font avec CA un angle,

dont la tangente $= \theta$; & ces diametres couperont en deux les cordes Mm inclinées à l'axe CA sous l'angle, dont la tangente $= \theta$. Entre ces Courbes la plus simple est celle qui est exprimée par cette équation $a^4 = g^4 x^4 y^4$. Au reste toutes ces Courbes, outre le diametre orthogonal CA ont aussi un diametre orthogonal qui y insiste normalement en C ; ce qui se comprend par ce que dans ces equations non seulement y , mais encore x , ont partout des dimensions paires.

XXVI. EN SE servant de la même maniere on peut aller plus loin, & par l'élimination des puissances impaires de y qu'on rejette des membres homogenes des puissances superieures, on trouve d'autres fonctions pour V , qui requerront d'autres raisons entre $\frac{m}{n}$ &

$\frac{p}{q}$. Nous ne nous y arrêterons pourtant pas davantage, mais nous

Fig. 5. rapporterons une propriété d'une très grande étendue à l'égard des diametres, qui peut être accommodée à toutes les Courbes qu'on trouvera par cette voye. Voici de quoi il est question. Si la Courbe ABC a deux diametres AO , BO , qui s'entrecoupent au point O , cette même Courbe aura plusieurs diametres, qui concourront au point O , & quelquefois à l'infini, à moins que les diametres suivans ne coincident avec les précédens. Pour expliquer ceci, que la Courbe ait deux diametres AO , & BO , dont AO coupe en deux les cordes Mm sous l'angle mPO , & BO coupe de même les cordes MN sous l'angle MQO . Des termes M & m d'une corde quelconque Mm coupée en deux par le diametre AO , qu'on mene des ordonnées à l'autre diametre BO , qui soient MN & mn , coupées en deux par le diametre BO en Q & q . En menant donc la corde Nn , tous les angles seront donnés dans le quarré $MNnm$, & si de P on

mene

mene PR parallèle à MN, mn, cette ligne coupera la corde Nn en R. Or en tirant ORC, les angles BOC & NRC feront auffi donnés, d'où il s'enfuit que la droite OC fera encore un diametre, qui coupera en deux les cordes Nn menées à l'angle donné NRO.

XXVII. POUR COMPRENDRE plus distinctement ce qui vient d'etre dit, que la tangente de l'angle mPO soit = α ; la tangente de l'angle AOB = B, & la tangente de l'angle MQO = β . Il en résultera la cotangente de l'angle BOC = $\frac{1}{B} + \frac{2}{3}$, & par

conséquent la tangente de l'angle BOC, qui soit = C = $\frac{\beta B}{\beta + 2B}$,

& si l'on dit la tangente de l'angle NRO = γ , γ fera = $\frac{\alpha \beta^2 (1 + BB)}{2\alpha\beta + 4\alpha B - 2\alpha\beta B^2 - \beta^2 - 4\beta B - 4BB - \beta\beta BB}$.

De là, si les tangentes suivantes des angles dans le même

ordre sont posées D & δ , D fera = $\frac{\gamma C}{\gamma + 2C}$ & $\delta =$

$\frac{\beta\gamma (1 + CC)}{2\beta\gamma + 2\beta C - 2\beta\gamma C^2 - \gamma^2 - 4\gamma C - 4CC - \gamma\gamma CC}$. Et ainsi

de suite on trouvera des diametres à l'infini, à moins qu'ils ne coïncident exactement avec le premier.

XXVIII. A CES PROBLEMES sur les diametres ou parallèles entr'eux, ou concourans à un point donné, j'en joindrai un autre qui y a de l'affinité, & dont l'habile Mr. *Clairaut* fait mention dans une des Lettres qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire. L'origine de ce Probleme vient de la propriété qu'a l'Ellipse, par laquelle les Parallélogrammes inscrits dans l'Ellipse autour des deux diametres conjugués, comprennent partout la même aire. Or comme toutes

les droites tirées dans les autres Courbes d'un point fixe, comme d'un centre, ne sont pas des diametres, nous ne ferons pas attention dans cette recherche à la condition, qui concerne les diametres, & nous proposerons seulement le Problème de la maniere suivante.

Fig. 3. *TROUVER une Courbe A Mam B qui ait deux diametres orthogonaux ACB & a C perpendiculaires entr'eux; que le centre de cette Courbe soit par conséquent en C, & que comme l'Ellipse elle ait cette propriété, qu'en menant du centre C un rayon quelconque CM, & en même tems un autre rayon Cm parallèle à la tangente MT au point M, l'aire du triangle soit MCM constante par tout; etant égale à l'aire du triangle ACa.*

XXIX. POUR RÉSOUDRE ce Problème, posons, après avoir fait tomber une perpendiculaire MP du point M sur l'axe AC, l'abscisse CP = x & l'appliquée PM = y ; l'equation pour la Courbe, qui soit $W = 0$, devra d'abord etre telle, que x & y ayent de part & d'autre des dimensions paires, en sorte que soit que l'on pose x , soit y , ou l'une & l'autre, l'equation négative demeure toujours la même. W fera donc une fonction quelconque de xx & yy ; car cette condition est requise par la propriété prescrite, en vertu de laquelle, tant la droite AC que a C doivent etre des diametres orthogonaux de la Courbe. A present que du point M on tire pareillement sur l'axe AB la perpendiculaire mp, & que l'on dise Cp = t & pm = u , il faut à cause de la continuité de la Courbe que la même equation se trouve entre t & u , qui est entre x & y ; ou que si dans l'equation $W = 0$, à la place de xx on pose tt , la valeur de yy se change uu .

XXX. QU'ON PRENNE une nouvelle variable z , par laquelle on détermine les valeurs xx & yy , en sorte qu'en rejetant z , il en naisse l'equation pour la Courbe $W = 0$. Que l'on conçoive de plus

plus une telle quantité z , qu'en la faisant negative, xx se change en tt , & yy en uu , car alors il est manifeste qu'en rejetant z , l'équation entre tt & uu doit se trouver, de même qu'entre xx & yy , comme la loi de la continuité le requiert. Soient donc P & R fonctions paires de z , qui demeurent les mêmes, en posant $-z$ à la place de $+z$; & que Q & S soient fonctions des dimensions impaires de z , qui se changent en leurs negatives, si l'on pose $-z$ à la place de $+z$. Si donc l'on pose $xx = P + Q$, & $yy = R + S$: en faisant z negatif, on aura $H = P - Q$ & $uu = R - S$. Par ces dénominations on parvient donc à découvrir, premièrement que les parties de la Courbe AMa & amB constituent la même Courbe continuë, & ensuite que tant AC que aC sont des diametres orthogonaux.

•

XXXI. DE PLUS puisque la droite Cm doit etre parallèle à la tangente MT , à cause de la soutangente $PT = -\frac{y dx}{dy}$, cela fera

$PT : PM = Cp : pm$, ou $dx : dy = t : u$, d'où naît $u dx + t dy = 0$. Enfin comme l'aire du triangle MCm doit etre constante, qu'on cherche cette aire, qui est $= \frac{1}{2} CM \cdot Cm \cdot \sin A \cdot MCm$. Mais

$$\sin A \cdot MCm = \sin A (MCP + mCp) = \frac{PM \cdot Cp + CP \cdot pm}{CM \cdot Cm};$$

d'où l'aire du triangle MCm fera $= \frac{t y + u x}{2}$; par consé-

quent la valeur de $\frac{t y + u x}{2}$ doit etre constante, & ainsi sa différen-

tielle fera égale à Zero, en sorte que $y dt + t dy + u dx + x du = 0$. Or $u dx + t dy$ etant $= 0$, cela fera $y dt + x du = 0$; par laquelle

équation, on comprend que la tangente mt fera parallèle au rayon CM , & qu'ainsi les rayons CM & Cm doivent être réciproquement parallèles à leurs tangentes MM & mt .

XXXII. POSONS $ty + ux = 2cc$, & comme x est $= \sqrt{P+Q}$ $y = \sqrt{R+S}$; $t = \sqrt{P-Q}$ & $u = \sqrt{R-S}$, substitutions faites on aura $\sqrt{P+Q}(R-S) + \sqrt{P-Q}(R+S) = 2cc$. Que V denote une fonction quelconque impaire de Z , & qu'on pose $\sqrt{P+Q}(R-S) = cc + V$; en faisant Z négatif, $\sqrt{P+Q}(R-S)$ se changera en $\sqrt{P-Q}(R+S)$ en sorte que $\sqrt{P-Q}(R+S)$ soit $= cc - V$, comme le requiert la nature de la condition. On peut donc en inférer $R+S = \frac{(cc-V)^2}{P-Q}$ & $R-S = \frac{(cc+V)^2}{P+Q}$. Ainsi x fera $= \sqrt{P+Q}$; $t = \sqrt{P-Q}$; $y = \frac{cc-V}{\sqrt{P-Q}}$ & $u = \frac{cc+V}{\sqrt{P+Q}}$. De là naît $dx = \frac{dP+dQ}{2\sqrt{P+Q}}$ & $dy = \frac{-dV}{\sqrt{P-Q}} - \frac{(cc-V)(dP-dQ)}{2(P-Q)\sqrt{P-Q}}$. & en conséquence $u dx + t dy = \frac{(cc+V)(dP+dQ)}{2(P+Q)} - \frac{dV - (cc-V)(dP-dQ)}{2(P+Q)}$. Comme donc $u dx + t dy$ doit être $= 0$; 0 fera $= (PP - QQ) dV - V(P dP - Q dQ) - cc(P dQ - Q dP)$.

XXXIII. QU'ON DIVISE cette équation par $(PP - QQ)^{\frac{3}{2}}$, & cela fera $\frac{dV}{V(PP - QQ)} - \frac{V(P dP - Q dQ)}{(P^2 - Q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{cc(P dQ - Q dP)}{(P^2 - Q^2)^{\frac{3}{2}}}$;

qui après l'intégration donne $\frac{V}{V(PP - QQ)} = \int \frac{cc(P dQ - Q dP)}{(PP - QQ)^{\frac{3}{2}}}$.

Pofons $Q = Pz$, puisque P est une fonction paire, Pz deviendra une fonction impaire, telle que doit être Q , & par conséquent à cause

de $dQ = P dz + z dP$, on aura $\frac{V}{PV(1-zz)} = \int \frac{cc dz}{P(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$, qui

doit être une formule intégrable, si nous voulons découvrir les Cour-

bes Algébriques. Soit donc $\int \frac{cc dz}{P(1-zz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Z}{V(1-zz)}$, afin que V

devienne $= PZ$, d'où il paroît que Z doit être une fonction impaire de Z , afin que V devienne une fonction impaire, comme nous

l'avons supposé. Or de là naît $\frac{cc dz}{P} = (1-zz) dZ + Zz dz$ & P

$$= \frac{cc dz}{(1-zz) dZ + Zz dz}.$$

XXXIV. EN PRENANT donc Z pour une fonction quelcon-

que impaire de Z , soit $P = \frac{cc dz}{(1-zz) dZ + Zz dz}$; qui est une fonction

paire, donc $Q = Pz = \frac{cc z dz}{(1-zz) dZ + Zz dz}$; & $V = PZ = \frac{cc Z dz}{(1-zz) dZ + Zz dz}$.

On arrivera donc par ces voyes à la solution complete du Problème; & x & y seront déterminés de la maniere suivante par z & la fonction impaire Z prise arbitrai-

rement; en forte que xx soit $= \frac{cc(1+z) dz}{(1-zz) dZ + Zz dz}$; & yy

=

$$= \frac{cc(1-z)(1+z)(dZ - Zdz)^2}{((1-zz)dZ + Zzdz)dz}, \quad \text{Or de } z \text{ \& } Z \text{ faits nega-}$$

tifs résultent pour tt & uu les mêmes valeurs qui leur conviennent en vertu de ce qui precede, $tt = \frac{cc(1-z)dz}{(1-zz)dz + Zzdz}$ & uu

$$= \frac{cc(1+z)((1-z)dZ + Zdz)^2}{((1-zz)dZ + Zzdz)dz}. \quad \text{On déduira donc de là}$$

un nombre innombrable de Courbes douées des propriétés proposées, qui premierement ayent autour des axes principaux nC & AC des parties semblables & égales, & qui ensuite en menant par le centre C les deux rayons CM & Cm , aux tangentes de la Courbe en M & m reciproquement parallèles, donnent pour aire du triangle $MCm = cc$.

XXXV. ON TROUVERA donc l'equation pour la Courbe entre x & y , si l'on rejette la variable Z de ces deux

$$\text{equations; } xx = \frac{cc(1+z)dz}{(1-zz)dz + Zzdz} \text{ \& } yy =$$

$$\frac{cc(1-z)((1+z)dZ - Zdz)^2}{((1-zz)dZ + Zzdz)dz}; \text{ \& en divisant l'une par l'autre}$$

$$\text{nous aurons } \frac{yy}{xx} = \frac{(1-z)((1+z)dZ - Zdz)^2}{(1+z)dz^2} \text{ \&}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{((1+z)dZ - Zdz)\sqrt{(1-zz)}}{(1+z)dz}, \text{ \& le produit donnera}$$

$$yx = \frac{cc((1+z)dZ - Zdz)\sqrt{(1-zz)}}{(1-zz)dZ + Zzdz}. \quad \text{Mais si nous}$$

ne

ne desirons pas l'équation entre x & y , les mêmes formules trouvées donnent une construction commode, car en prenant une valeur quelconque pour Z , par où z sera en même tems déterminé, on trouvera les valeurs pour xx & yy , & elles détermineront un point de la Courbe. On pourra aussi bâtir là dessus une Construction Géométrique, si l'on pose une Courbe, dont les coordonnées soient z & Z , & qui ait cette propriété, qu'en faisant z négatif, l'autre Z le devienne aussi; car la raison entre dZ & dz sera définie par la tangente de cette Courbe.

XXXVI. PUISQUE Z doit être une telle fonction de z qu'elle se change en $-Z$, en mettant $-z$ à la place de z , posons pour le cas le plus simple $Z = az$; & cela fera $xx = \frac{cc(1+z)}{a}$

$$\& yy = acc(1-z); \text{ d'où } 1+z = \frac{axx}{cc} \& 1-z = 2 - \frac{axx}{cc}.$$

Donc $yy = 2acc - aaxx$, qui est l'équation pour l'ellipse, laquelle Courbe satisfait manifestement à ce qui étoit demandé.

XXXII. POSONS à présent $Z = az^n$, n étant un nombre impair, afin que Z devienne fonction impaire de z , $\frac{dZ}{dz}$ fera =

$$anz^{n-1} \& (1-zz) dZ + Zz dz = (anz^{n-1} - a(n-1)z^{n+1})$$

$$dz = az^{n-1} dz (n - (n-1)zz) \& (1+z) dZ - Z dz = az^{n-1} dz$$

$$(n + (n-1)z), \text{ desquels on trouve } xx = \frac{cc(1+z)}{az^{n-1}(n - (n-1)zz)}$$



$$\& yy = \frac{acc(1-z)z^{n-1}(n+(n-1)z)^2}{n-(n-1)zz}. \text{Donc } xx yy = c^4 (1-zz)$$

$$\frac{(n+(n-1)z)^2}{(n-(n-1)zz)^2}; \text{ d'où en rejetant } z \text{ resulte une equation Algebrique}$$

de plusieurs dimensions. Que si l'on pose $Z = \frac{az}{1-zz}$, xx fera

$$= \frac{cc(1+z)(1-zz)}{a(1+2zz)} \quad \& \quad yy = \frac{acc(1-z+2zz)^2}{1+2zz}.$$

On peut de la même maniere substituer un nombre innombrable de fonctions de z à la place de Z , qui fourniront toujours des équations pour les Courbes, qui satisfont à ce qui est demandé; & je n'en ai point trouvé entr'elles, qui conduisit à une équation plus simple entre x & y , quoiqu'elles soient toutes faciles à construire.



Fig. 3.

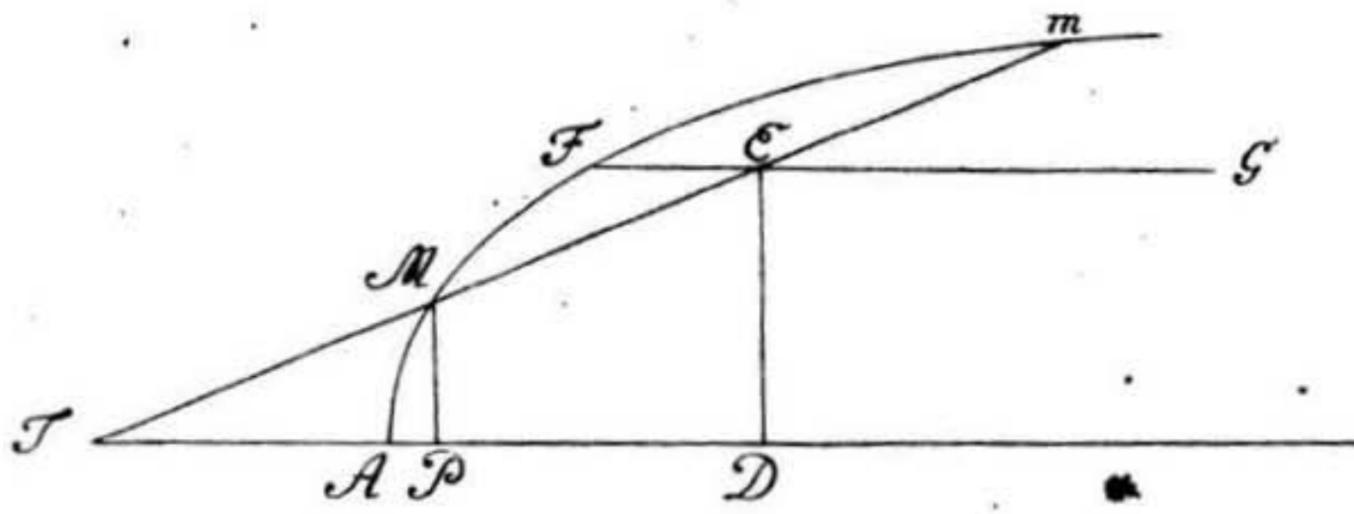
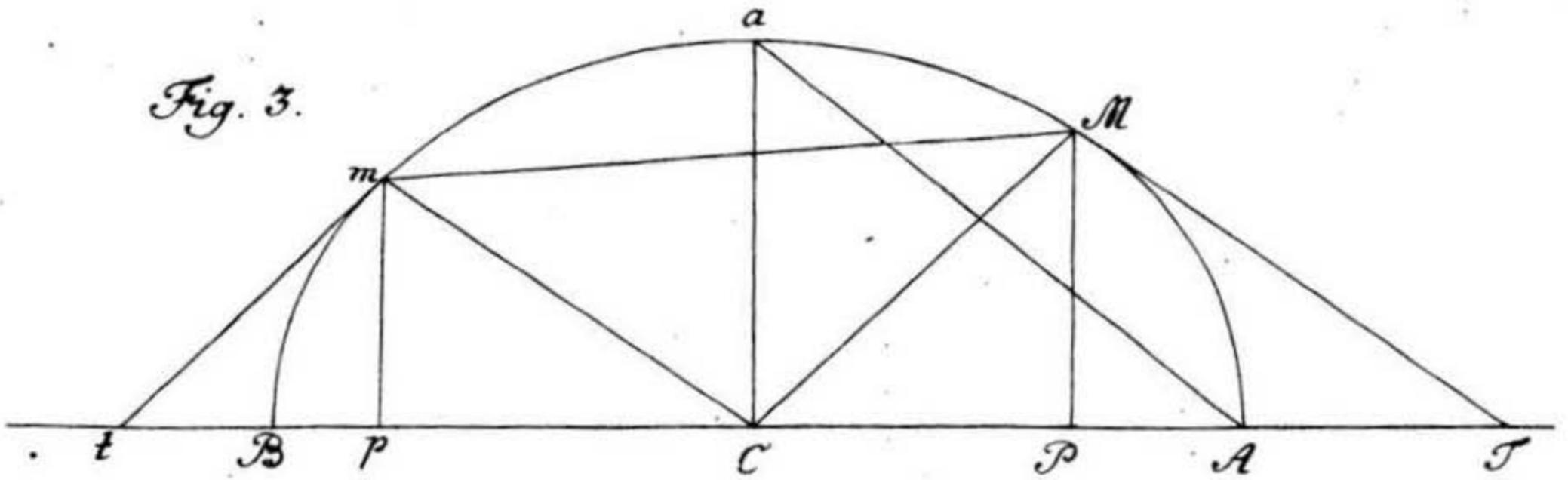


Fig. 1.

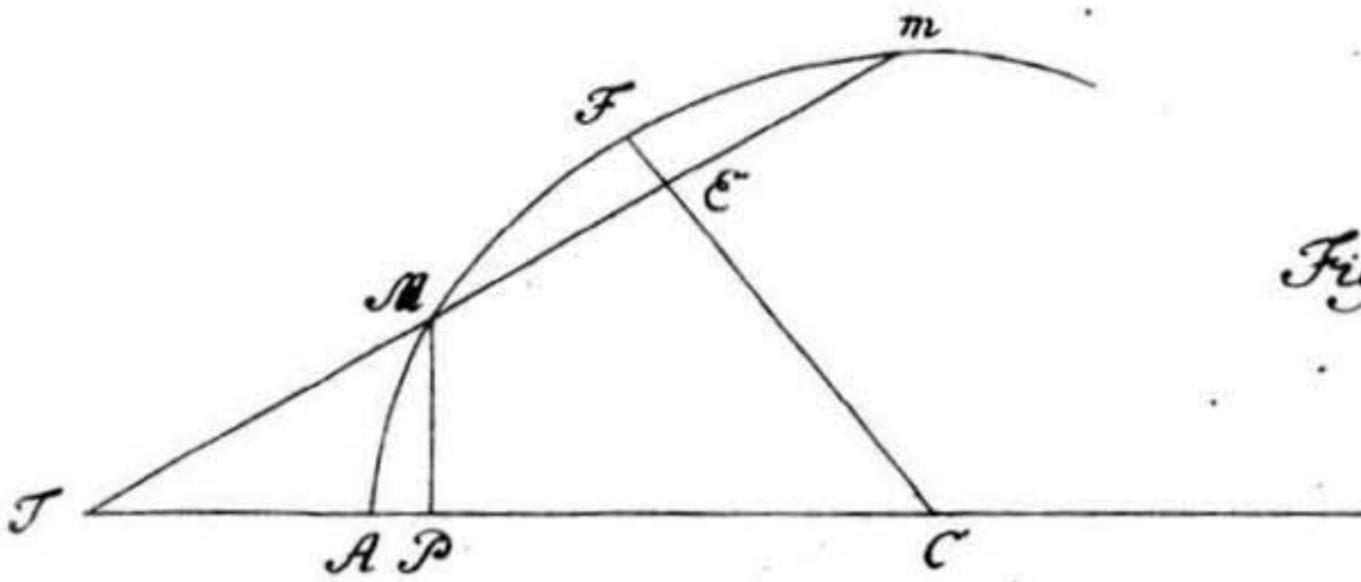


Fig. 2.

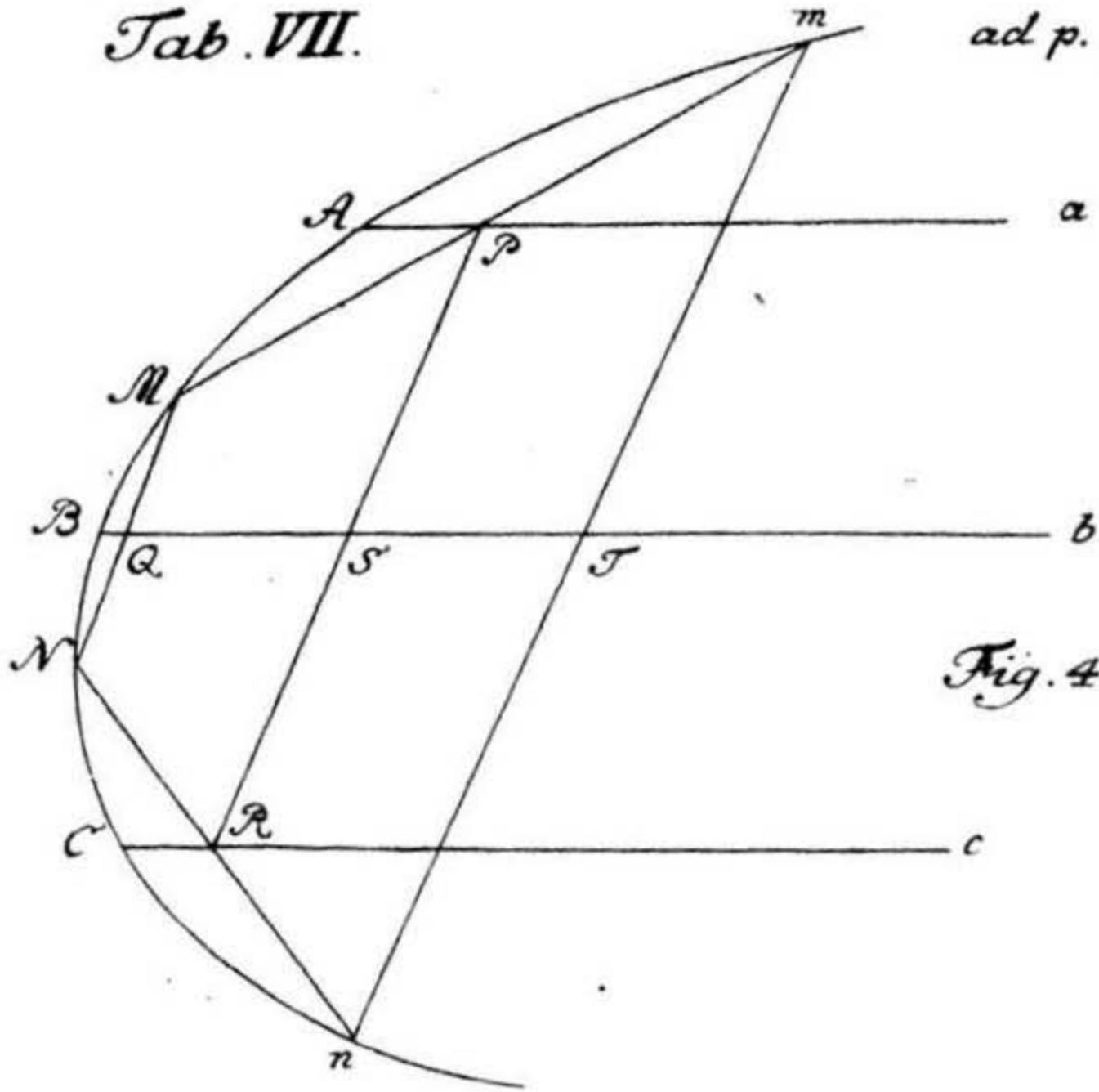
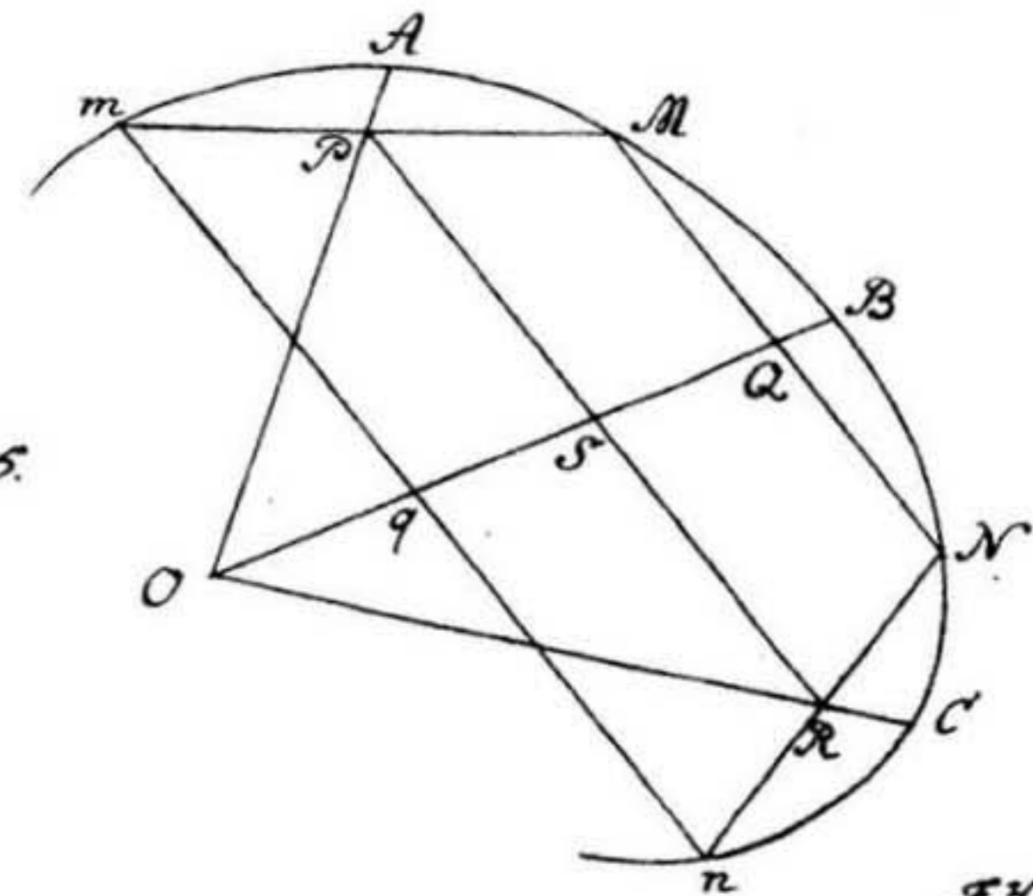


Fig. 5.



R.H.F.

Fig. 6.

