Jochen Brüning

Hypotheses non fingo

Über Freiheit und Notwendigkeit in der Mathematik

(Akademievorlesung am 9. Juni 2005)

1 Problemstellung

Im Zentrum der folgenden Erörterungen steht der Prozeß der Mathematisierung, auf den sich der Erfolg der abendländischen Wissenschaft und der dazugehörigen Technologie gründet. Um diesen Begriff etwas präziser fassen zu können, bedienen wir uns zunächst einer recht schematischen Beschreibung, die im Laufe der Erörterung modifiziert wird (vgl. Abb. 1). Unter einer Mathematisierung wollen wir also im Folgenden die Verbindung eines formalen und eines technischen Systems verstehen, die so gestaltet ist, daß Voraussagen über das Verhalten gewisser Vorgänge in der Realität möglich werden, und zwar von solcher Genauigkeit, daß daraus Handlungsanweisungen abgeleitet werden können. Auf der Seite des technischen Systems werden wir in aller Regel eine Meßvorrichtung finden, die gewisse, noch genauer zu besprechende Eigenschaften der Welt, die wir kurz Phänomene nennen wollen, in präziser Form erfaßt. Auf der Seite des formalen Systems werden wir üblicherweise

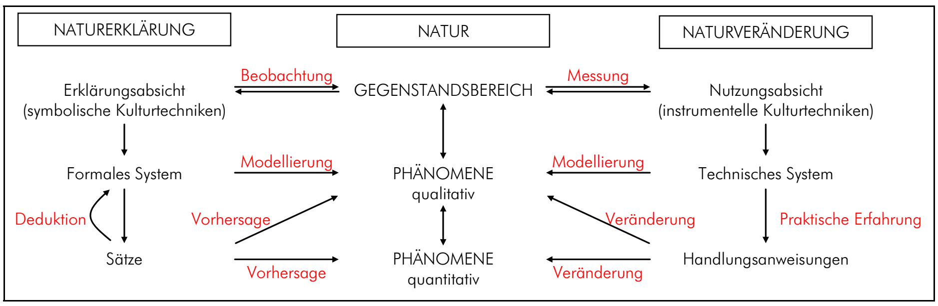


Abbildung 1
Das Schema einer Mathematisierung

eine mathematische Theorie antreffen, die durch eine geeignete Modellierung der betrachteten Phänomene und ihrer Ursachen das zukünftige Verhalten der interessierenden Größen vorausberechnet; diese Vorausberechnungen müssen vom technischen System überprüft werden können. Das technische System für sich unterliegt eigenen, zum Beispiel vom Material diktierten Gesetzmäßigkeiten, genauso wie das formale System, und ohne die erwähnte Modellierung, die den Zusammenhang stiftet, würden wir zwischen beiden Systemen zunächst keine Verbindung feststellen können. Ohne der genaueren Diskussion hier schon vorgreifen zu wollen, läßt sich sagen, daß die technischen Systeme von der sie umgebenden Realität geprägt und deshalb keinesfalls beliebig sind, während die formalen Systeme der inneren, der symbolischen Welt des Menschen zugerechnet werden müssen und deshalb fiktiven Charakter haben. Zweifellos sind zur Erklärung eines Phänomens viele formale Erklärungen möglich, wie ein Blick in die gegenwärtigen Diskussionen jeder Natur- oder Ingenieurwissenschaft lehrt. Die Frage, die uns hier interessieren soll, zielt auf die Möglichkeit, formale Systeme zu vergleichen und im Hinblick auf gewisse Phänomene als „richtig" oder „falsch" zu beurteilen. Wir werden dazu in den nächsten beiden Abschnitten technische und formale Systeme für sich genommen diskutieren, um dann ihr Zusammenwirken präziser erörtern zu können. Dazu wird ein Blick in die Geschichte notwendig sein, um auch die Entwicklung der Hoffnungen wie der Vorurteile, die sich an Mathematisierungen knüpfen, in Rechnung stellen zu können.

2 Technische Systeme: Weltbeherrschung

Alle Lebewesen sind dafür ausgerüstet, in die Welt einzugreifen, um ihr Überleben und ihre Vermehrung sicherzustellen. Dafür verfügen sie über unterschiedliche Techniken, die sich aus ihrem genetischen Programm ergeben. Solche Techniken basieren auf Eigenschaften der Individuen einer Spezies, sie können aber durchaus durch geeignete Signale synchronisiert werden, wie es zum Beispiel bei Insekten der Fall ist.
Auch wenn diese Techniken sich dem genetischen Programm verdanken, so ist doch ihre Ausbildung bei den höher entwickelten Organismen mit Lernprozessen verbunden, die häufig von den Eltern oder anderen älteren Individuen gesteuert werden, und deren Ablauf, wie im Fall von Prägungen, von bestimmten Umständen abhängig ist. Dadurch werden gewisse Variationen verursacht, die der Evolution einen Ansatzpunkt bieten, der anders wirkt als Mutationen des Erbmaterials.
Der Mensch verfügt über ein besonderes Vermögen für die enge Kooperation in geschlossenen Gruppen. Der technische Evolutionsprozeß, der unter den Begriff der kulturellen Evolution fällt, scheint so vorzugehen, daß elementare Techniken in Einzelteile „zerlegt" und dann im Rahmen der Gruppe neu zusammengesetzt werden, was bei allen arbeitsteiligen Abläufen ja sicherlich der Fall ist. Die „Zerlegung" einer Technik setzt voraus, daß in einem Ablauf Elemente identifiziert werden, die für sich

genommen Gegenstand einer gesonderten individuellen Entwicklung werden, wie man es beim Werkzeuggebrauch studieren kann. An diesem Beispiel sieht man auch, welches Potential in einem herausgelösten Element ruht, das immer neuen Zwecken zugeführt werden kann, die in aller Regel ungleich vielfältiger sind, als es der bisherige Ablauf, dem das Element entstammt, jemals vermuten ließ. Diese Multiplikation der Möglichkeiten durch Isolierung und funktionelle Neuinterpretation von Elementen ist sicher eine der Wurzeln für die enorme Beschleunigung der kulturellen Evolution. Es ist wohl denkbar, daß der Zerlegungsprozeß zufällig beeinflußt wird, er wird aber sicher fokussiert und verstärkt in Gruppen, die eine gewisse Zahl geeigneter Individuen vom alltäglichen Überlebenskampf freisetzen können.

Die isolierten, zum Teil instrumentell gewordenen Handlungselemente werden zu neuen Techniken zusammengesetzt, und zwar in aller Regel in festen Verbindungen, deren Abläufe bald eingeschliffen sind und dadurch eine erhebliche Stabilität entwickeln. Sie zu ändern ist um so schwerer, je länger diese Abläufe wiederholt worden sind. Daß in diesem Prozeß die Komplexität der Abläufe zunehmen kann, verdankt sich den hohen mimetischen Fähigkeiten des Menschen sowie der Ausbildung eines individuellen wie kulturellen Gedächtnisses. Auf diese Weise entstehen technische Systeme nicht nur für die Nahrungsversorgung, sondern auch für die Lagerhaltung und die schützende Vorsorge gegenüber anderen, ähnlich erfolgreich kooperierenden Menschengruppen. Dabei erscheint bemerkenswert, daß die Stabilität ausgereifter technischer Systeme auch zu korrespondieren scheint mit der Optimierung ihrer Abläufe und einer gewissen Ästhetik.

Der Isolierung eines Handlungselementes entspricht sehr häufig die Wahrnehmung und Identifizierung eines Phänomens der realen Welt, mit der dieses Handlungselement korrespondiert. Die Beherrschung dieses Phänomens, und das heißt seine quantitative Vorhersage, verspricht Überlebensvorteile, die wiederum die Veranlassung bilden, die wahrgenommenen Phänomene quantitativ zu erfassen. Durch die Entwicklung von Meßtechniken gewinnen Voraussagen von Phänomenen große Überzeugungskraft, wenn sie denn eintreffen; zugleich wird die Beobachtung der Phänomene verfeinert, weil man sie im Rahmen der Meßprozesse genauer kennen lernt. Damit werden Eingriffe in die Welt möglich, an die vorher nicht zu denken war, beispielsweise der Bau von Häusern, Städten und Straßen.

Diese Auseinandersetzung mit den Phänomenen suggeriert das Gefühl von Beherrschung oder Verständnis, wenn genaue Voraussagen möglich werden. Als eine kulturelle Syntheseleistung und gleichzeitig als Balance für die Gruppenaufteilung in unterschiedliche Tätigkeitsbereiche werden die Phänomene in einheitlicher Weise erklärt, so daß in Umrissen ein geschlossenes Weltbild entsteht, das der komplizierter werdenden Lebenswelt einen einheitlichen Rahmen zu geben scheint. Je weniger Elemente eine solche Erklärung enthält, desto erfolgreicher wird sie sein können. Der einmal angestoßene Prozeß der kulturellen/technischen Evolution ist aber nicht mehr aufzuhalten.

Die Phänomene, von denen hier die Rede war, verdanken sich der Beobachtung existierender Techniken, vor allen Dingen aber auch der Wiederholbarkeit gewisser Abläufe oder Ereignisse; was man nur einmal erlebt, hat in diesem Prozeß keinen Platz. In dem Maße, wie sich die quantitative Beherrschbarkeit verstärkt, wächst auch die Bereitschaft zu genauerer Beobachtung und Veränderung. Eine Vielfalt von Abläufen und deren Koordination wiederum verlangt nach symbolischen Fähigkeiten des Umgangs mit den Elementen der Technik, das heißt zu den instrumentellen treten die symbolischen Kulturtechniken in einer parallel verlaufenden, aber sich immer wieder kreuzenden und verschlingenden komplizierten Entwicklung.
Aus dem Verfahren von „trial and error", das auch in der kulturellen Evolution eine bedeutende Rolle spielt, schälen sich systematische Versuche zur Veränderung der meßbaren Parameter des Geschehens heraus, an deren Ende das Experiment im heutigen Sinne steht. Nun werden nicht mehr bekannte Abläufe in Einzelteile zerlegt und neu kombiniert, sondern ganz neue Ablaufelemente werden ermittelt, handhabbar gemacht und in neue technische Systeme integriert. Ein heutiges technisches System, so wie wir es bei unseren Überlegungen vor Augen haben, besteht aus einer komplizierten Mischung von symbolischen und instrumentellen Techniken, die in vielfach iterierter Form in seine Konstruktion eingegangen sind.

3 Formale Systeme: Welterklärung

Das biologische Fundament formaler Systeme, die nach allem, was wir wissen, nur vom Menschen entworfen werden, liegt in der Gesetzmäßigkeit der Natur. Bestimmte Ursachen haben mit solcher Regelmäßigkeit und solcher Häufigkeit dieselben Folgen, daß ihre Einarbeitung in das technische Programm einer Spezies Überlebensvorteile mit sich bringt. Einem solchen, auf Kausalitäten reagierenden Programm können gespiegelte nervöse Funktionen entsprechen, die auf einer symbolischen, inneren Ebene die verwendeten Kausalitäten in irgendeiner Weise simulieren. Auch wenn die symbolische Ebene immer nur indirekt zugänglich ist, so enthüllen genauere Forschungen doch immer wieder technische Leistungen einzelner Spezies, deren Erklärung dem Betrachter schwer fällt und immer wieder zu Anthropomorphismen verführt. Die Orientierungsleistung der Wüstenameisen, der Zahlensinn von Rabenvögeln und die Zeichensprache der Schimpansen bieten drei Beispiele aus verschiedenen Tierreichen, die den Gedanken an irgendeine Form von symbolischer Repräsentation sehr nahelegen und suggerieren, daß die Qualitäten des menschlichen Denkens sich nur graduell, aber möglicherweise nicht qualitativ von den Leistungen anderer Spezies unterscheiden. Eine Ausnahme könnte die Fähigkeit zum rekursiven Denken bilden, die im Tierreich bislang noch nicht angetroffen worden ist, die Fähigkeit also, gegebene Handlungselemente immer wieder ineinander einzusetzen, so wie wir uns die natürlichen Zahlen entstanden denken durch fortgesetzte Addition einer Eins. Tatsächlich ist dies auch die Grundlage der algorithmischen Struktur, die wir technischen Systemen zuschreiben, und die rekursive Fähigkeit findet sich auch in den grammatischen Elementen jeder bekannten Sprache; auch der unbedarfteste Sprecher ist von dem Moment an, wo er die Sprache sprechen kann, in der Lage, unendlich viele verschiedene Sätze zu formen, und zwar durch Rekursion.

Das rekursive Verfahren setzt voraus, daß typische Elemente aus einer Konstruktion isoliert und neu zusammengefügt werden können. Im Bereich der technischen Systeme hatten wir deren Entstehung zurückgeführt auf die Erkenntnis und Isolierung immer gleicher Handlungsabläufe – wie zum Beispiel das Schneiden mit einer scharfen Kante – zu erkennen, aus dem Zusammenhang herauszulösen und autonom neu einzusetzen. Eine Spiegelung dieser Strategie auf der symbolischen Ebene könnte dann zur Ausbildung rekursiver symbolischer Strukturen geführt haben. Die Zusammensetzung einzelner Elemente zu einem ganzen System, einem symbolischen „Weltbild“ sozusagen, könnte schon alleine deswegen notwendig werden, um die expansiven und womöglich auch konkurrierenden Kräfte der neu entwickelten technischen Systeme an die möglichst reibungsfreie Kooperation der Gruppe zurückzubinden.

Natürlich stellt die entwickelte Sprache selbst ein symbolisches System zur Abbildung und aktiven Bewältigung der Lebenswelt dar, das mit den zunehmend komplexer werdenden symbolischen Welten der Individuen korrespondiert. Analogien zu den technischen Systemen treten aber erst dann auf, wenn es gelingt, ein logisches Abbild der Kausalstruktur zu schaffen. Das charakteristische Dilemma des Syllogismus ist, daß er zwar in einem abstrakten (aber vergleichsweise simplen) Kalkül gehandhabt werden kann, daß aber die lebensweltliche Wirkungsmacht der Kausalität vollständig verloren geht: Die Voraussetzung und die Behauptung sind nur noch verbunden durch eine Wahrheitstabelle ohne jeden Hauch von Inhaltlichkeit. Die Überzeugungskraft dürfte wiederum von technischen Elementen ausgegangen sein, beispielsweise von den Operationen mit Zirkel und Lineal auf einer wiederbeschreibbaren Fläche. Während babylonische Tontafeln schon des 3. Jahrtausends v. Chr. offensichtliche Spuren der Zirkelarbeit tragen, ist die wiederbeschreibbare Tafel oder das Sandbrett wohl doch eine Erfindung der frühklassischen Griechen, die nun mit einem Instrument von höchster Suggestivität technische Systeme modellieren und im Detail studieren können, vor allem solche, bei denen es um geometrische Konstruktionen geht. Die so gewonnene außerordentliche Geläufigkeit im Umgang mit dem Zirkel ermöglicht es, auf den Akt des Zirkelschlages das Abstraktum „Kreis“ zu bauen, als Spiegelung des motorischen Impulsmusters. Der tiefe Eindruck, den dieser Gang der Dinge hinterlassen hat, könnte die Kanonisierung von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik bewirkt haben, die ansonsten nicht schlüssig zu erklären ist. Dementsprechend bilden diese Akte auch die Grundlage der Euklidischen Geometrie und damit das Urbild eines formalen Systems, in dem Elemente durch Relationen axiomatisch verbunden und dann in ihren Eigenschaften sukzessiv durch logische Deduktion entfaltet werden.

Mit diesen Werkzeugen lassen sich bereits beachtliche Mathematisierungen erzielen, unter denen die Berechnung des Abstandes von der Erde zur Sonne durch Eratosthenes von Kyrene sicherlich heraussticht. Auf der anderen Seite entspringen dem Versuch, das formale System der Euklidischen Geometrie weiter zu optimieren, zahlreiche Probleme, wie das der Inkommensurabilität zwischen Seite und Diagonale in einem Quadrat, die Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-Ecks oder die Unlösbarkeit der drei klassischen Probleme der griechischen Mathematik, nämlich die Quadratur des Kreises, die Dreiteilung des Winkels und die Verdoppelung des Würfels. Die Isolation und symbolische Verfügbarkeit von zunächst technisch definierten Begriffen läßt eine Wissenschaft der formalen Systeme entstehen, die wir heute Mathematik nennen.

Die Doppelnatur der Mathematik (nämlich auf der einen Seite durch Mathematisierungen lebensweltliche Phänomene vorherzusagen und auf der anderen Seite Widersprüche in dem so entstehenden formalen System beseitigen zu müssen) hat sich eigentlich ungebrochen bis in die heutige Zeit fortgesetzt. Im Laufe der Entwicklung ist jedoch der Begriff eines formalen Systems durch jahrhundertelange Arbeit wesentlich mehr geschärft worden, vor allem im Hinblick auf die zu verwendenden Sprachformen und die zugrunde liegenden logischen Axiome. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts stellte David Hilbert das Programm des Formalismus vor, nach dessen Vorbild sich jede Wissenschaft bilden sollte. Dazu sollten die Axiome niemals zu Widersprüchen führen dürfen, und sie sollten außerdem so stark sein, daß jeder sprachlich richtig formulierte Satz entweder als wahr oder als falsch zu erweisen wäre. Dieses Traumbild eines vollendeten formalen Systems, das jeder denkbaren Mathematisierung zugrunde liegt, wurde jedoch von Kurt Gödel zerstört, der beide Annahmen als unhaltbar erwies. Die formalen Systeme unserer Tage müssen mit dem Defekt leben, daß ihre Widerspruchsfreiheit nur relativ zu einem stärkeren System erwiesen werden kann und daß sie Sätze enthalten, die nicht bewiesen und nicht widerlegt werden können. Trotzdem haben im letzten Jahrhundert Mathematisierungen jeder Art sprunghaft zugenommen, und ihre Wirkungen werden immer subtiler und reichen immer weiter. Deshalb ist es notwendig, nun dem Zusammenspiel von formalem und technischem System im Prozeß der Mathematisierung erhöhte Aufmerksamkeit zu schenken.

4 Mathematisierung: Wahrheit oder Hypothese?

In der Abbildung 1 ist das Zusammenspiel zwischen technischem und formalem System in einer Mathematisierung schematisch beschrieben. Die beiden Blöcke: der Fiktion, die der symbolischen Ebene zugeordnet ist, und der Technik, die der instrumentellen Seite angehört, werden dargestellt mit ihren Grundzielen und ihren grundsätzlichen Operationsweisen. Die Technik zielt auf Weltbeherrschung durch instrumentelle Eingriffe in die Natur, um die Lebensbedingungen des Menschen zu verbessern. Sie arbeitet mit technischen Systemen und sie ist disziplinär den Ingenieurwissenschaften zugeordnet. Der historische Begriff einer *ars* bezeichnet das perfekt ausgeübte Handwerk, die Kunstlehre, also einen Komplex impliziten Wissens, das darauf gerichtet ist, in der Praxis zu funktionieren ohne Rücksicht auf seine formale Ableitbarkeit. Der fiktive Bereich zielt auf Welterklärung und bedient sich formaler Systeme, seine disziplinäre Zugehörigkeit liegt im Bereich der Mathematik oder allgemeiner der *scientia* als der deduktiven Wissenschaft, die aus dem Erfahrungswissen hervorgeht. Beide Bereiche sind verbunden durch den Prozeß der Modellierung, der hier nicht genauer beschrieben ist. Seine disziplinäre Zuordnung scheint uns nach wie vor am besten durch die Naturphilosophie, *philosophia naturalis*, angegeben, weil in der Abwägung des gegenseitigen Verhältnisses von Fiktion und Technik übergeordnete Prinzipien, philosophische Grundüberzeugungen als Richtschnur dienen müssen.

Die Gegenüberstellung von „Fiktion" und „Technik" scheint auch der Bedeutung nach passend, denn ursprünglich bezeichnet τέχνη die Bearbeitung harter Gegenstände, zum Beispiel das Hacken eines harten Bodens, während das Wort *fingere* die Formung einer plastischen Masse, wie etwa Wachs, bezeichnet. Damit ist die bekannte Gefahr umrissen, daß die Bildung von Fiktion auf wenig innere Widerstände stößt, während die eventuelle technische Umsetzung sich mit unbeeinflußbaren Realitäten herumzuschlagen hat: „Dicht beieinander wohnen die Gedanken, doch hart im Raume stoßen sich die Sachen." Der Widerstand, der auf beobachtende Erfahrung und experimentelle Erkundung gegründeten Naturphilosophie der Aufklärung gegen die allzu leichte Beweglichkeit formaler Systeme, insbesondere der Mathematik, ist noch im 19. Jahrhundert spürbar, zum Beispiel wenn Gustav Magnus seinem Schüler Helmholtz davon abrät, Mathematik und mathematische Abstraktionen auf die Physik anzuwenden. Der Schutz vor solchen unzulässigen Verallgemeinerungen und voreiligen Schlüssen kann deshalb nur in der Voraussagekraft einer Mathematisierung liegen: Trifft die Voraussage ein, so ist die Mathematisierung insgesamt in irgendeinem Sinne wahr. Diese Verbindung von Wahrheit und Voraussagekraft von Mathematisierungen ist sicher sehr alt, wie der berühmte Satz aus der „Weisheit Salomons" belegt, mit dem Gottes Schöpfung charakterisiert wird: „Durch Maß, Zahl und Gewicht hast Du alles eingerichtet." Der Wahrheitsbegriff der Mathematik ist, wie bemerkt, ein logischer, dessen Inhalt sich gänzlich aus den vorangestellten Axiomen ergibt, doch logisch betrachtet ist die Explikation der Axiome eine Tautologie, so schwer sie sich auch für die Entscheidung, ob ein konkret vorgegebener Satz wahr oder falsch sei, darstellen mag. Tatsächlich scheint die Lage so zu sein, daß ein beliebig herausgegriffener Satz aus der Menge der einschlägigen Sätze in einem Axiomensystem in aller Regel keinesfalls auf Anhieb als wahr oder falsch entschieden werden kann, sondern daß die Beantwortung dieser Frage ein außerordentlich schwieriges Problem darstellt. Ein begrifflich einfaches Feld, auf dem sich dieses Phänomen demonstrieren läßt, ist die Theorie der natürlichen Zahlen, wo sich viele bis heute ungelöste Probleme einfach formulieren lassen, beispielsweise die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, also Primzahlen p mit der Eigenschaft, daß p + 2 ebenfalls eine Primzahl ist. Die Suche nach der Antwort kann ein ganzes mathematisches Forschungsprogramm ausfüllen, wie das für das Problem von Fermat der Fall war, der fragte, für welche natürlichen Zahlen n die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ in ganzen Zahlen a, b, c, lösbar ist. Die schließlich von Andrew Wiles 1995 gegebene Antwort (für n > 2 gibt es nur triviale Lösungen) hat für sich genommen keinen besonderen mathematischen Wert, wohl aber die bei der Beantwortung dieser Frage aufgedeckten Strukturen, die selbst wieder in axiomatische Form gegossen werden können. Die Freiheit der Mathematik liegt also in der Wahl ihrer Axiome, deren Wahrheit hingegen immer nur eine relative bleibt, solange sie nicht gegen reale „Strukturen der Welt" gemessen werden kann, wie dies durch Mathematisierungen typischerweise geschieht. Hier hat auch die philosophische, üblicherweise auf Platon zurückgeführte Frage nach der Stellung der Mathematik in der Welt ihren Platz, das heißt die Frage, ob die in der Mathematik vorgefundenen Strukturen rein fiktiv sind, also durch Zufall, individuelle Inspiration und soziale Übereinkunft gebildete Konstrukte, oder ob sie realen Wahrheiten in einem härteren Sinne korrespondieren.

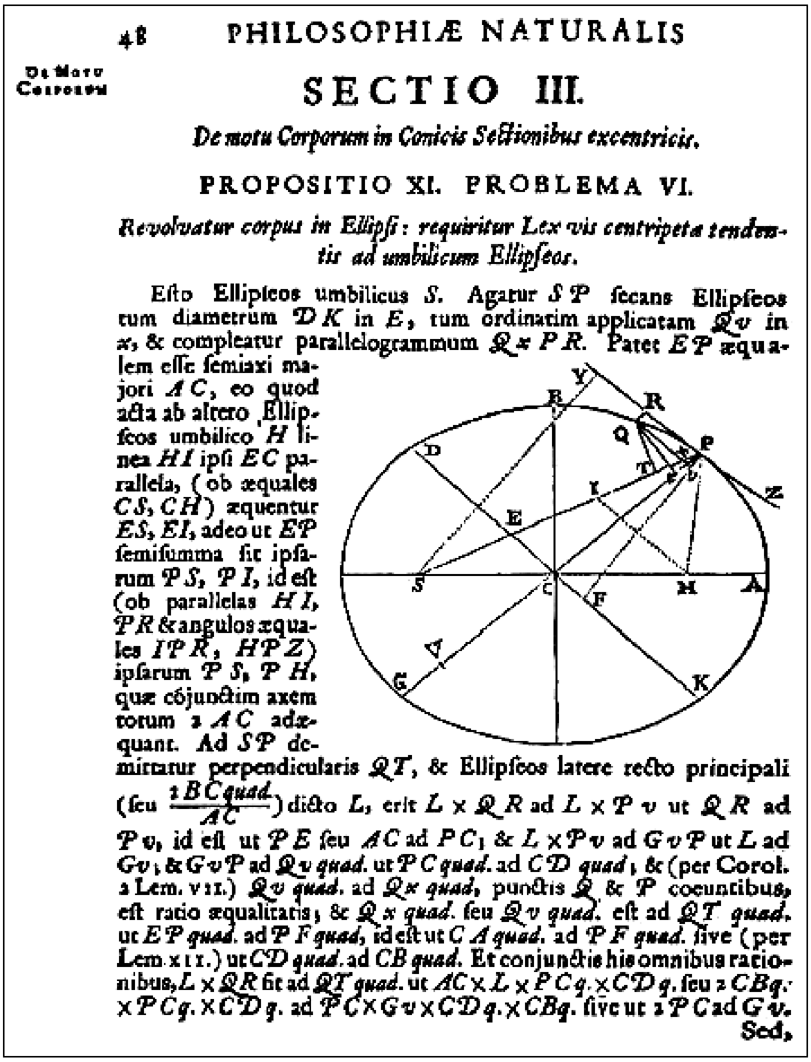
Diese Frage ist vielfach erörtert worden. Wir beschränken uns hier auf die Korrespondenz zwischen formalen und technischen Systemen, wie sie in einer Mathematisierung gestiftet wird, und wir wenden uns jetzt der Frage zu, was über die bislang kaum besprochene Modellierung als Verbindungsglied zwischen technischem und formalem System gesagt werden kann.

Die Untersuchung der Modellierung stellt sich als das schwierigste Problem in unserem Diskussionszusammenhang heraus, weil Modellierungsvorgänge in der Praxis komplizierte Mischungen von technischen und formalen Elementen darstellen und zudem in einem noch nicht näher bestimmten Sinne „philosophische" Überlegungen einbeziehen. Es ist deshalb sinnvoll, sich an bedeutenden historischen Beispielen zu orientieren wie der jetzt zu besprechenden Himmelsmechanik, die mathematisiert wurde durch die griechische Astronomie, die Newtonsche Mechanik und schließlich die Einsteinsche Allgemeine Relativitätstheorie, wobei jede neue Mathematisierung des astronomischen Geschehens die Leistungen der Vorgängerin in verbesserter Form reproduzierte und gleichzeitig die Reichweite der Erklärungen und der Voraussagen erheblich erweiterte.

Die Astronomie der Griechen beginnt mit den Vorstellungen der ionischen Naturphilosophen und dem aus Ägypten und Babylon übernommenen Erbe, in dem von einer Mathematisierung nur in einem sehr elementaren Sinn die Rede sein kann. Die messende Beobachtung des Himmelsgeschehens beschränkt sich auf die Feststellung von – unter Umständen allerdings sehr langen – Perioden einzelner Bewegungsphänomene, wozu weder genaue Zeit- noch Positionsmessungen nötig waren; schlichte Teilungsvorrichtungen und ein Tag- und Jahreszeiger wie die Sonnenuhr genügten vollauf. Die Deutung des Himmelsgeschehens geschah durch eine mythologische Modellierung, in der dieselben göttlichen Wesen im Himmel und auf

Erden tätig waren und in der Kausalitäten geschaffen wurden durch Ähnlichkeitstransformationen oder durch anthropomorphe Verstrickungen. Das mythologisch-philosophische Denken war noch nicht an den Punkt gelangt, wo eine objektive Vergleichbarkeit, ein *tertium comparationis*, der Vorstellungen über die Welt und der beobachtbaren Phänomene hergestellt worden war. Die große Entdeckung des 6. und 5. Jahrhunderts v. Chr. war offenbar die Möglichkeit der Modellierung des dynamischen Himmelsgeschehens auf der wiederbeschreibbaren Tafelebene, unter algorithmischer Einsetzung von Zirkel und Lineal. So entstand die Mathematik als das abstrakte Spiegelbild einer ausgefeilten Technik. Als perspektivisches Abbild des Dreidimensionalen entsteigen der Tafelebene auch neue Instrumente wie die σκάφη, die halbkugelförmige Sonnenuhr, die das Himmelsgeschehen noch genauer modellierte unter der Annahme, daß die Erde selbst Kugelgestalt hat. Nur auf der Arbeitsebene wird es möglich, die beobachteten Schleifenbahnen der Planeten zu simulieren, wobei der philosophische Grundsatz der Kreisbewegung als der einzig denkbaren durch das Prinzip der Rollkurve (d. h. des Abrollens von einem Kreis auf einem anderen), raffiniert erweitert wird. Am Ende steht das Wissen, das Ptolemaios im Almagest präsentiert, dessen Kernstück nichts anderes ist als ein Analogrechner zur Simulation der Planetenbahnen. Wir müssen also die algorithmische Arbeit mit Zirkel und Lineal auf der Arbeitsebene dem technischen System in dieser Mathematisierung zurechnen; das zugehörige formale System, dessen Entwicklung durch die Entdeckung der Modellierbarkeit überhaupt erst möglich wurde, ist die Euklidische Geometrie. Es sei hinzugefügt, daß die ptolemäische Methode nicht nur unerwartet präzise Voraussagen liefert, sondern auch sehr leicht zu handhaben ist, was freilich nicht verhindert hat, daß sie bis zu ihrer Wiederentdeckung durch Johannes Kepler in praktisch völlige Vergessenheit geraten war. Denn abgesehen vom Bedürfnis des Menschen, sein Schicksal aus den Sternen lesen zu können, waren die lebenspraktischen Auswirkungen dieser Mathematisierung gering.

Die nächste Mathematisierung des Himmelsgeschehens erfolgt in der Frühen Neuzeit, ausgehend von Kopernikus und weitergetrieben von Kepler, Galilei und Newton. Am Anfang steht eine theoretische Überlegung, die wohl schon Aristarch von Samos angestellt hatte, daß es nämlich einfacher sei, die Planetenbewegungen zu verstehen, wenn man die Erde als einen unter ihnen und alle um die Sonne kreisend postulierte. Die Beobachtung mit bloßem Auge reichte aber für die Entscheidung zwischen beiden Modellen nicht aus, dafür war es notwendig, daß neue technische Hilfsmittel entstanden, von Tycho Brahes großem Quadranten bis zum alles verändernden Fernrohr. Keplers drei Gesetze brachten einen außerordentlichen Durchbruch in der Phänomenologie der Planetenbahnen. Gestützt auf das reiche Beobachtungsmaterial des Tycho Brahe erkannte er die Marsbahn als eine Ellipse, womit das philosophisch begründete Kreis-Postulat gebrochen war. Die Wirkung auch auf die Zeitgenossen war beträchtlich, Galilei zum Beispiel hat elliptische Bahnen niemals anerkannt. Zu dem technisch wesentlich verbesserten Beobachtungs- und Meßsystem trat also eine neue Bahnkurve hinzu, die den Griechen freilich gut bekannt war; Kepler konnte auf das große Werk des Apollonios über Kegelschnitte zurückgreifen. Insofern läßt sich die Entwicklung bis zu Kepler als eine quantitative Verbesserung des Ptolemäischen Systems beschreiben, die freilich, philosophisch betrachtet, eine wesentliche neue Hypothese einführt. Daß beide Beschreibungen mathematisch äquivalent sind (unter dem Gesichtspunkt einer Taylor-Entwicklung) war damals freilich noch nicht sichtbar. Eine völlig neue Idee (die allerdings auch nicht vom Himmel gefallen ist) führte Isaac Newton in die Diskussion ein, indem er sich nicht auf die Beschreibung der Bewegung beschränkte, sondern nach ihren formalisierbaren Ursachen fragte. Über die philosophischen Gründe der Bewegung hatte sich bereits Aristoteles umfassend geäußert, das auf logische Korrektheit fixierte Denken der Scholastiker hatte schon Begriffe wie Geschwindigkeit und Beschleunigung zu fassen versucht. Newton schuf das Instrument der Differentialrechnung, um die momentane Geschwindigkeit und die momentane Beschleunigung formulieren zu können, und er postulierte – durchaus im Einklang mit seinen Vorgängern –, daß Bewegung immer das Resultat einer wirkenden Kraft ist. Aber er präzisierte dies weiter dahingehend, daß die wirkende Kraft gleich der Änderung des Impulses ist, also verkürzt: Kraft = Masse x Beschleunigung. Nun blieb freilich die Frage, welche Kraft zwischen den Himmelskörpern wirkt und wie sie berechnet werden kann, die Newton durch die Formulierung des Gravitationsgesetzes beantwortete. Der genaue Gang seiner Argumentation hat das weitere mathematisierende Denken der Naturwissenschaften außerordentlich beeinflußt und ihn selbst zu der Formulierung verleitet, daß er keine Hypothesen bildet (*hypotheses non fingo*), wobei die oben erwähnte Urbedeutung von fingere hier sicher mitschwingt. Newton ging aus von Keplers Gesetzen, die er als empirisch gesichert ansah, und modellierte die Planetenbewegung als ein Zwei-Körper-Problem Sonne-Planet, weil er sich berechtigt glaubte, die Einflüsse der anderen Planeten gegenüber der Sonne vernachlässigen zu können. Sodann leitete er (in Compositio XI von Sectio III seiner *Principia*, s. Abb. 2) aus der Tatsache der Ellipsenbahn die Anziehungskraft zwischen Sonne und Planeten als logische Konsequenz ab, womit sich das Gravitationsgesetz ergab, und weiter zeigte er, daß umgekehrt aus der Annahme des Gravitationsgesetzes die Ellipsenbahn folgt. Wenn man die aufgezählten Erfahrungstatsachen und die Axiome der Newtonschen Mechanik akzeptiert, dann folgt das Gravitationsgesetz mit *Denknotwendigkeit*. Natürlich mußten die zugrunde liegenden Vereinfachungen durch Ausschluß des Einflusses anderer Himmelskörper in der Folge gerechtfertigt werden, aber das gelang der Newtonschen Mechanik mit einer alles bisher Dagewesene bei weitem übertreffenden Genauigkeit. Die Störungen der Bahnen, die die Planeten untereinander ausüben, ließen sich mit großer Genauigkeit bestimmen, wenn auch ähnlich geschlossene Lösungen wie die Keplersche Ellipsenbahn sich nicht mehr einstellen wollten; die Himmelsmechanik wurde auch mathematisch zu einem sehr aufreibenden Geschäft. Der zweifellos größte Triumph der Newtonschen Mechanik war die Entdeckung des Planeten Neptun, dessen Bahn aus Störungen der Uranusbahn von den Astronomen U. J. J. Leverrier und J. Adams berechnet und der von J. G. Galle



48 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

De Motu Corporum

SECTIO III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Esto Ellipseos umbilicus *S*. Agatur *SP* secans Ellipseos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico *H* linea *HI* ipsi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* semisumma sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsarum *PS*, *PH*, quæ cōjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BC\,quad.}{AC}$) dicto *L*, erit *L* x *QR* ad *L* x *Pv* ut *QR* ad *Pv*, id est ut *PE* seu *AC* ad *PC*; & *L* x *Pv* ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad*; & (per Corol. 2 Lem. VII.) *Qv quad.* ad *Qx quad.*, punctis *Q* & *P* coeuntibus, est ratio æqualitatis; & *Qx quad.* seu *Qv quad.* est ad *QT quad.* ut *EP quad.* ad *PF quad.*, id est ut *CA quad.* ad *PF quad.* sive (per Lem. XII.) ut *CD quad.* ad *CB quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, *L* x *QR* fit ad *QT quad.* ut *AC* x *L* x *PCq.* x *CDq.* seu 2*CBq.* x *PCq.* x *CDq.* ad *PC* x *Gv* x *CDq.* x *CBq.* sive ut 2*PC* ad *Gv*.

Sed,

Abbildung 2
Newtons Ableitung des Gravitationsgesetzes

1846 entdeckt wurde. Der Glaube daran, mit Newtons Gesetzen die Wahrheit des Weltalls entschlüsselt zu haben, war endgültig unerschütterliches Allgemeingut geworden, die Götter hatten sich hinter ihre Naturgesetze zurückgezogen und ihre Zuständigkeit auf die Herstellung der ersten Anfangsbedingungen und die Substanzerfüllung des leeren Weltalls einschränken müssen.

Es ist eine ironische Wendung der Geschichte, daß ausgerechnet Leverrier, der so wichtig für Newtons größten Triumph war, zugleich auch die Achillesferse seiner Theorie entdeckte, nämlich durch die 1859 veröffentlichte Beobachtung der Periheldrehung des Merkur. Die Tatsache, daß ein solcher Effekt von ca. 42 Bogensekunden im Jahrhundert (!) überhaupt gemessen werden konnte, weist auf die außerordentliche Fortentwicklung der technischen Meßvorrichtungen hin. Die Entdeckung selbst löste aber sofort große Unruhe unter allen Physikern aus, denn die Newtonsche Theorie konnte diesen winzigen, aber qualitativ bedeutenden Effekt nicht erklären: eine Weltwahrheit geriet in Gefahr.

Es dauerte bis zum Jahre 1915 und der Publikation von Albert Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie, bis der Schaden behoben war in dem Sinne, daß eine konsistente Erweiterung der Newtonschen Theorie vorlag, die auch die Periheldrehung vorhersagte. Dafür war aber ein Preis zu zahlen, in Gestalt der erheblich erhöhten Abstraktionsforderung und der weitgehend verschwundenen Anschaulichkeit einer Theorie, die keine Bilder mehr hatte und von der kaum jemand sich ein Bild machen konnte. Schlimmer noch, auch die Voraussagen der Theorie waren esoterisch, es handelte sich durchweg um Effekte, die schon deshalb sehr schwer zu beobachten waren, weil sie sehr klein ausfielen. Denn für alle, selbst die damals anspruchsvollsten praktischen Zwecke war die Newtonsche Mechanik völlig ausreichend. Obwohl auch die meßtechnische Seite erhebliche Fortschritte gemacht hatte, zum Beispiel durch die Einführung spektroskopischer Methoden, zeigten die entstehenden Mathematisierungen keinen unmittelbaren Nutzen mehr, ja nicht einmal mehr eine realistische Nutzenerwartung.

Anders verhielt es sich mit der nur wenige Jahre später in die Welt getretenen Quantenmechanik, die zwar erst recht keiner durchgängig anschaulich überzeugenden Interpretation mehr fähig war, durch das elektronische Zeitalter jedoch überragende praktische Bedeutung erlangen konnte, denn ihre Konsequenzen verdienen heute einen erheblichen Teil des gesamten Bruttosozialproduktes. Die klassische Quantenmechanik erlaubt aber wenigstens eine mathematische Formalisierung, was bei den sie erweiternden Quantenfeldtheorien nun auch nicht mehr der Fall ist. Mit der Quantenelektrodynamik zum Beispiel besitzen wir eine Theorie von unglaublich präziser Vorhersagekraft in allen einschlägigen Bereichen, aber bislang ohne eine konsistente mathematische Beschreibung. Beziehen wir diese Befunde auf unser Modell der Mathematisierung, so wären die algorithmischen Rechenvorschriften dieser Theorien auch dem technischen System zuzuschlagen, wie die Epizykelbeschreibung des Ptolemaios.

In unseren Tagen erleben wir ein gewaltig gewachsenes Interesse an der Kosmologie, begleitet von einer wahren Bilderflut, die sowohl durch abstrakte Farbenpracht (höchst unklarer Genese) wie durch die von den Star Wars Episoden und ihren vielen Nachfolgern erzeugten Assoziationen hohe Beachtung findet. Dabei scheint es dem weiteren öffentlichen Interesse zu entgehen, daß mit dem Global Positioning System

– das keine Bilder mehr bringt, sondern nur noch Zahlen – die Allgemeine Relativitätstheorie ihre erste Mathematisierung gefunden hat.
Damit ist die Lösung des ältesten praktischen Problems der Menschheit, das der sicheren Navigation in Raum und Zeit, in einer Mathematisierung von genau der Art gelungen, die wir beschreiben, und das zugehörige formale System verwendet eine der schwierigsten, aber auch der schönsten Theorien der mathematischen Physik an einer Stelle, wo Newton auf keinen Fall hätte helfen können. Es ist damit noch schwerer geworden zu glauben, daß Einsteins Sicht der Raumzeit der Wahrheit nicht näher kommt als Newton, daß Einsteins Annahmen weniger Aussichten auf Naturgesetzlichkeit haben als die von Newton – aber noch fehlt die Verbindung mit der Quantenwelt. Der Glaube an die Kraft der Mathematisierungen jedoch erhält berechtigte Unterstützung, zumal es zu deren energischer Weiterentwicklung keine Alternativen gibt. Allerdings werden wir auch zur Vorsicht gemahnt bei der Evaluierung von Theorien unter dem Gesichtspunkt ihrer Nützlichkeit – denn die Renditeperiode kann viel länger sein als die Amtszeit der Evaluierer.