I.

G. G. L.

Symbolismus memorabilis calculi Algebraïci & Infinitesimalis, in comparatione potentiarum & differentiarum; & de Lege Homogeneorum Transcendentali.

UT cujuslibet quantitatis facile est invenire potentiam; ita cujuslibet certa lege variantis possumus invenire differentiam seu Elementum. Sed regressus à potentia ad radicem per extractionem, & regressus à differentia ad terminum per summationem, non semper in potestate est. Et uti impossibilitas extractionis in numeris rationalibus quæsitæ producit quantitates surdas; ita impossibilitas summationis in quantitatibus Algebraïcis quæsitæ, producit quantitates transcendentes, quarum considerationem in Analysin jam olim induximus. Sanè, ut sæpe quantitates rationales per modum radicis seu irrationaliter exhibentur, etsi ad formulam rationalem reduci possint; ita sæpe quantitates Algebraïcæ seu ordinariæ per modum transcendentium exhibentur, etsi eas ad formulam ordinariam reducere liceat. Itaque multum interest inter *quantitates* & *formulas*.

Sed

Sed arcanior quædam ſubeſt inter Potentias & Differentias Analogia, quam hoc loco exponere operæ pretium erit. Et primum potentias binomii (ſeu ſummæ nominum duorum) comparabimus cum differentiis rectanguli [ſeu facti ex Factoribus binis) & deinde [cum analogia prepetua ſit] breviter dabimus communem legem, tam potentiæ ex multinomio quocunque, quam differentiæ facti ex factoribus quotcunque Potentiæ autem pariter ac differentiæ habent ſuos exponentes, gradum potentiæ vel differentiæ indicantes. Itaque analogiæ clarioris cauſa, ut dx, ddx, d^3x ſignificat differentiam primam, ſecundam, tertiam; ita x, xx, x^3 exprimemus hoc loco, per p^1x, p^2x, p^3x, id eſt per potentiam primam, ſecundam, tertiam; nempe ipſius x Et $p^e[x+y]$ ſignificabit potentiam ipſius $x+y$, ſecundum exponentem e, uti $d^e(xy)$ differentiam ipſius xy ſignificat, itidem ſecundum exponentem e.

Sit ergo Binomium $x+y$, ejus potentia prima, ſi ſic loqui licet, vel gradus ſi malis, ſeu quæ exponentem habet 1, eſt ipſa quantitas ſeu radix ſeu ipſum Binomium $x+y$. Atque adeo $p^1(x+y) = x+y$, ſed potentia ſecunda ſeu quadratum ipſius $x+y$, ſive $p^2(x+y)$ erit $= 1xx + 2xy + 1yy$; & cubus ſeu potentia tertia ipſius $x+y$, ſive $p^3(x+y)$ eſt $= 1x^3 + 3x^2y + 3xyy + 1y^3$; & biquadratum ſeu potentia quarta ipſi9 $x+y$ ſive $p^4(x+y$ eſt $= 1x^4 + 4x^3y + 6xxyy + 4xy^3 + 1y^4$. Et generaliter, reperietur, potentiam quamcunque ab $x+y$ ſeu $p^e(x+y)$ eſſe $1x^e + \frac{e}{1}x^{e-1}y + \frac{e.e-1}{1.2}x^{e-2}y^2 + \frac{e.e-1.e-2}{1.2.3}x^{e-3}y^3 + \frac{e.e-1.e-2.e-3}{1.2.3.4}x^{e-4}y^4$ &c. ubi ſubtractione numerorum per unitates creſcentium, veluti ſi $e = 3$ ſeu $e-3 = 0$, evaneſcit terminus in quo eſt $e-3$, & omnes eum ſequentes. Ita cum ſit $e = 3$, fiet $p^3(x+y) = 1x^3 + \frac{3}{1}x^2y + \frac{3.3-1}{1.2}xy^2 + \frac{3.3-1.3-2}{1.2.3}y^3$ ſeu $1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 = 1p^3xp^0y + 3p^2xp^1y + 3p^1xp^2y + 1p^0xp^3y$.

Ubi notaudum x^0, vel y^0, ſiue p^0x, p^0y, vel aliam cujusque quantitatis potentiam, cujus exponens evaneſcit ſeu fit 0, abire in unitatem. Nam ſi ordine ponamus.

Quantitates progresſionis Geometricæ	$\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1}$, x, xx, x^3,
Exponentes reſpondentes progresſionis Arithmeticæ erunt	-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Unde $p^{0}x = 1$ & $p^{-1}x = \frac{1}{x}$ vel $1:x$, & $p^{-2}x = \frac{1}{xx}$ vel $1:xx$. itaque formula generalis pro potestate Binomii sic scribi potest: $p^{e}(x+y) = 1p^{e}xp^{0}y + \frac{e}{1}p^{e-1}xp^{1}y + \frac{e\,.\,e-1}{1\,.\,2} + p^{e-2}xp^{2}y + \frac{e\,.\,e-1\,.\,e-2}{1\,.\,2\,.\,3}p^{e-3}xp^{3}y + \frac{e\,.\,e-1\,.\,e-2\,.\,e-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}p^{e-4}xp^{4}y +$ &c.

Veniamus jam ad differentiationes, idemque illic provenire ostendamus tantum pro $x+y$ ponendo xy, & pro p ponendo d. Primum ergo $d(xy) = ydx + xdy$. Ut olim docuimus, cum primum multis abhinc annis calculum differentialem proponeremus: ex quo uno fundamento totus reliqvus differentiarum calculus demonstrari potest. Ipsum autem fundamentum hoc, sic ostenditur: $d(xy)$ est differentia inter $(x+dx)(y+dy)$ & xy, sive inter rectangulum proximum & propositum, Est autem $(x+dx)(y+dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$, unde si auferas xy fit $ydx + xdy + dxdy$, sed quia dx vel dy est incomparabiliter minus quam x vel y, etiam $dxdy$, erit incomparabiliter minor quam xdy & ydx; ideoque reiicitur, tandemque fiet $(x+dx)(y+dy) - xy = ydx + xdy$; Jam $x = d^{0}x$ & $y = d^{0}y$, nempe ubi differentia nulla est, & $d^{1}x$ est dx, vel $d^{1}y = dy$, ideo scribi poterit $d^{1}(xy) = d^{1}xd^{0}y + d^{0}xd^{1}y$; Cæterum, quæ evenire possent in signis variationes cum crescente x decrescit y aut cum aliqua ex differentiis, velut dx aut dy fit quantitas negativa, nunc non explico: rem tractans generaliter, salva potestate cujusque signa in casibus specialibus, ubi opus est, immutandi,

Pergamus ad differentiationes secundas $dd(xy) = d[ydx + xdy) = d[ydx] + d[xdy]$. Jam $d[ydx) = yddx + dxdy$ ex calculo præcedente, nam pro dx scribamus z, erit $ddx = dz$, & fiet $d(ydx) = d[yz) =$ [per calculum præcedentem] $ydz + zdy = yddx + dxdy$. Et pari jure fiet $d(xdy] = dxdy + xddy$ Itaque colligendo, fiet $dd(xy) = yddx + 2dxdy + xddy$, prorsus ut quadratum ab $x+y$, dat $xx + 2xy + yy$, seu $d^{2}(xy) = d^{2}xd^{0}y + 2d^{1}xd^{1}y + d^{0}xd^{2}y$ prorsus ut $p^{2}(x+y) = p^{2}xp^{0}y + 2p^{1}xp^{1}y + p^{0}xp^{2}y$. Quæ analogia inter differentiationem & potentiationem servatur perpetuò, continuata potentiatione [seu Potentiæ excitatione] & differentiatione. Nempe ut in nova potentiatione Binomii tot in præcedens multiplicatur tam per y quam per x, & priore casu p ipsius y, posteriore p ipsius x, augetur unitate; ita in differentiando totum

totum præcedens differentiatur tam secundum y quam secundum x. & priore casu d ipsius y, posteriore autem d ipsius x augetur unitate.

Exempli Gratia

$$\text{Si } \left.\begin{matrix} p^1 x p^0 y \\ p^0 x p^1 y \end{matrix}\right\} \text{ multiplicemus per } y \text{ fit } \left\{\begin{matrix} p^1 x p^1 y \\ p^0 x p^2 y \end{matrix}\right\} \text{ sin illud multiplicemus per } x \text{ fit } \begin{matrix} p^2 x p^0 y \\ p^1 x p^1 y \end{matrix}$$

Et Similiter.

$$\text{Si } \left.\begin{matrix} d^1 x d^0 y \\ d^0 x d^1 y \end{matrix}\right\} \text{ differentiemus secundum } y \text{ fit } \left\{\begin{matrix} d^1 x d^1 y \\ d^0 x d^2 y \end{matrix}\right\} \text{ sin illud differentiemus secundum } x \text{ fit } \begin{matrix} d^2 x d^0 y \\ d^1 x d^1 y \end{matrix}$$

Ex quo sequitur porro $d^3[xy]$ esse $1\, d^3 x d^0 y + 3\, d^2 x d^1 y + 3\, d^1 x d^2 y + 1\, d^0 x d^3 y$, vel vulgari modo scribendi $y d^3 x + 3\, ddx\, dy + 3\, dx\, ddy + x d^3 y$: Et generaliter, ut paulo ante potentiando literam p adhibuimus, ita nunc differentiando adhibita litera d, fore,

$$d^e(xy) = 1\, d^e x d^0 y + \frac{e}{1} d^{e-1} x d^1 y + \frac{e \cdot e-1}{1 \cdot 2} d^{e-2} x d^2 y + \frac{e \cdot e-1 \cdot e-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^{e-3} x d^3 y + \&c.$$

Quinimò etiam inter potentias multinomii, & differentias combinationis seu facti ex pluribus factoribus, eadem Analogia locum habebit, velut inter $d^e(xyz)$ differentiam ternionis, & $p^e(x+y+z)$ potentiam trinomii. Cum semper verum maneat, Exponentem tam ipsius p, quam ipsius d in formula ad altiorem potentiam elevanda, vel amplius differentianda, secundum quamlibet literam separatim augeri unitate & ex omnibus provenientibus colligi formulam novam; Porro generalis olim à me inventa est regula cöefficientium qua potentia polynomii cujusque exprimitur. Eadem ergo regula etiam ad numeros cöefficientes ejus formulæ valebit, quæ differentiationem facti ex pluribus factoribus exprimit

Sunt autem numeri coëfficientes in potentiis, nihil aliud, quam numeri transpositionum, quas recipiunt literæ in forma seu termino cui numerus præfigitur, veluti pro $p^3(x+y+z)$ seu pro cubo ab $x+y+z$ prodit.

$$
\begin{array}{lll}
1x^3 + & 3x^2y + & 6xyz \\
1y^3 & 3xy^2 & \\
1z^3 & 3x^2z & \\
 & 3xz^2 & \\
 & 3y^2z & \\
 & 3yz^2 &
\end{array}
$$

ibi cöefficiens omnium qualis x^2y, est 3
quia pro xxy scribi potest xxy, xyx, yxx
Et cöefficiens omnium qualis xyz est 6.
quia pro xyz scribi potest $yxz, xyz, xzy, yzx, zxy, zyx$
Sed cöefficiens omnium qualis x^3 est, 1
quia in xxx transpositio nihil variat.

Modum autem inveniendi numerum transpositionum formæ propositæ, alibi, commoda satis ratione, exhibuimus.

Ad analogiam autem cum differentiis servandam, cubus seu potentia tertia ab $x + y + z$ &c. ita scribetur.

$$
\left.\begin{array}{lll}
1p^3xp^0yp^0z + & 3p^2xp^1yp^0z + & 6p^1xp^1yp^1z \\
1p^0xp^3yp^0z & 3p^1xp^2yp^0z & \\
1p^0xp^0yp^3z & 3p^2xp^0yp^1z & \\
 & 3p^1xp^0yp^2z & \\
 & 3p^0xp^2yp^1z & \\
 & 3p^0xp^1yp^2z &
\end{array}\right\}\text{æquale est.}
$$

$$
\left\{\begin{array}{llll}
p3(x+y+z) = & 1x3 + & 3xxy + & 6xyz \\
 & 1y3 & 3xyy & \\
 & 1z3 & 3xxz & \\
 & & 3xzz & \\
 & & 3yyz & \\
 & & 3yzz &
\end{array}\right.
$$

Ergo similiter differentia tertia ab xyz talis prodibit

$$
\left.\begin{array}{lll}
1d_3xd_0yd^0z + & 3d^2xd^1yd^0z + & 6d^1xd^1yd^1z \\
1d^0xd_3yd^0z & 3d^1xd^2yd^0z & \\
1d^0xd^0yd_3z & 3d^2zd^0yd^1z & \\
 & 3d^1xd_0yd^2z & \\
 & 3d^0xd^2yd^1z & \\
 & 3d^0xd^1yd^2z &
\end{array}\right\}\text{æquale est.}
$$

d 3

$$\left\{\begin{array}{lll} d^3(xyz) = 1d^3x.yz & +\ 3ddxdy.z & +\ 6dxdydz \\ \quad 1xd^3y.z & \quad 3dxddy.z & \\ \quad 1xyd^3z & \quad 3ddx.ydz & \\ & \quad 3dx.yddz & \\ & \quad 3xddydz & \\ & \quad 3xdyddz & \end{array}\right.$$

Ubi pâtet, novo ſcribendi more apparere analogiam inter potentias & differentias, vulgato (nempe hic poſterius poſito) non apparere. Eaque analogia eousque porrigitur, ut tali ſcribendi more (quod mireris) etiam $p^\circ(x+y+z)$ & $d^\circ(xyz)$ ſibi reſpondeant, & veritati:

Nam $p^\circ(x+y+z) \quad = \quad 1 \quad = p^\circ x p^\circ y p^\circ z$
Et $\quad d^\circ(xyz) \quad = \quad xyz \quad = d^\circ x d^\circ y d^\circ z$

Eâdem etiam opera apparet quænam ſit *Lex homogeneorum tranſcendentalis*, quam vulgari modo ſcribendi differentias, non æque agnoſcas. Exempli gratia, novo hoc *characteriſtica* genere adhibito, apparebit $addx$ & $dxdx$ non tantum Algebraice (dum utrobique binæ quantitates in ſe invicem ducuntur) ſed etiam tranſcendentaliter homogeneas eſſe, & comparabiles inter ſe; quoniam illud ſcribi poteſt $d^\circ a d^2 x$, hoc $d^1 x d^1 x$, & utrobique exponentes differentiales conficiunt eandem ſummam, nam $0+2 = 1+$. Cæterum, lex homogeneorum tranſcendentalis, vulgarem ſeu Algebraicam præſupponit. Interim non omnes formæ tranſcendentes, licet homogeneæ inter ſe, æque per ſe aptæ ſunt ſummationi. Exempli cauſa $adx\ ddx$ abſolute ſummabile eſt, ſed $dxdxdx$ ſeu $p^3\,(d^1 x)$ homogeneum priori tam Algebraicè, quam tranſcendentaliter ſummabile non eſt, niſi quædam ſuppoſitio accedat.