

Peter Költzsch

## Modelle zum Problemlösen – Lösungen zum Modellproblem

*(Akademievorlesung am 13. Mai 2004)*

### *Einführung*

Meine sehr verehrten Damen und Herren,  
es war eine glückliche Idee der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, einen Vorlesungszyklus über Modelle in den Wissenschaften zu gestalten. Und es ist besonders begrüßenswert, daß sehr unterschiedliche Wissenschaftsdisziplinen dabei zu Wort kommen, die Geisteswissenschaften, die Naturwissenschaften und die Technikwissenschaften. Denn, wie könnte es auch anders sein, es werden mit dem Modellbegriff, mit den Weltbildern und Weltmodellen, im Großen und im Kleinen, gedanklich und gegenständlich, sehr unterschiedliche Auffassungen und Praktiken verbunden. Dem will ich heute einige Aspekte aus dem Bereich der Technikwissenschaften hinzufügen.

In einer Akademiesdiskussion im Dezember 2003 und in der ersten Vorlesung dieser Reihe (Christoph Markschies und Klaus Pinkau: „Die *eine* Welt und die *vielen* Weltbilder“) sind wichtige Gesichtspunkte zu den Modellen in den Wissenschaften geäußert worden. Da wurden viele Fragen gestellt, wie zum Beispiel:

- Sind es Vorstellungen und Bestandteile unserer Lebenswelt, unseres täglichen Umgangs, die wir zur Modellbildung verwenden?
- Wie weit soll man sich, darf man sich, muß man sich von der Wirklichkeit lösen, um mit dem Modell ein Problem lösen zu können?
- Wer ist der Richter darüber, daß ein Modell sich dem Ziel der Erkenntnis „angenehert“ hat?
- Was macht die Wissenschaft mit den Modellen?
- Da Modelle die nicht handhabbare Vielfalt der Problemaspekte reduzieren, da das nicht zu Bewältigende (vorab) ausgeblendet wird (Leibniz), da der Blick auf das Problem durch das Modell zugleich befreit und eingezwängt wird, ist die Arbeit mit Modellen immer auch eine Fesselung. Kann also diese Fesselung überwunden werden?

- In den Naturwissenschaften werden die Modelle immer abstrakter (Pinkau): ist also der Preis für die Überwindung der Fesselung die Abstraktion, das immer stärker werdende Unanschauliche?

Viele dieser Fragen und Gedanken treffen auch für die Praxis der Modellierung und des Arbeitens mit Modellen in den Technikwissenschaften zu. Aber es gibt auch Aspekte, die hier noch nicht behandelt wurden und die zum Teil in den Technikwissenschaften besonders gepflegt werden.

Insbesondere möchte ich Ihnen in der nächsten Stunde aus den Technikwissenschaften auch zahlreiche *sehr konkrete Beispiele für Modelle* zeigen und diese erläutern, das heißt das nutzbare Anwenden von Modellen zum Problemlösen als ein besonderes Charakteristikum der Technikwissenschaften darstellen.

### *Allgemeines zu Modellen – Modelle in den Technikwissenschaften*

Modelle sind Hilfsmittel im Erkenntnisprozeß. Sie können materieller oder ideeller Art sein. Sie bilden reale oder fiktive Prozesse, Strukturen, Beziehungen oder Funktionen ab.

Modelle werden vom Menschen zweckgerichtet eingesetzt. Dadurch ist, wie Heinrich Hertz schreibt, „dasjenige das zweckmäßiger, welches mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes widerspiegelt als das andere; welches, wie wir sagen wollen, das deutlichere ist. Bei gleicher Deutlichkeit wird von zwei Bildern dasjenige das zweckmäßiger sein, welches neben den wesentlichen Zügen die geringere Zahl überflüssiger und leerer Beziehungen enthält, welches also das einfachere ist.“

Die Modelle in den Technikwissenschaften werden weitestgehend aus der Wirklichkeit abgeleitet. Sie gehören vor allem zur Kategorie „Modell von etwas“ (Modell als vereinfachter Vertreter der Außenwelt), für manche Probleme auch zur Kategorie „Modell für etwas“ (Modelle als Hilfsmittel auf dem Weg zum Erkennen der Wirklichkeit).

Für physikalisch-technische Modelle habe ich den treffenden Satz gelesen: „Modelle werden vor allem dann genutzt, wenn die Originale noch nicht erkannt, für eine Handhabung zu groß, zu klein, zu weit entfernt, zu kostenintensiv, zu gefährlich oder zu komplex sind.“

#### **Modellbildung ist vor allem auch eine Sache der Intuition.**

Ich möchte Ihnen diese großartige Intuition von Modellierungen an zwei Beispielen aus meinem Fachgebiet zeigen.

*Ein erstes Beispiel:* In vielen Räumen werden zur besseren Raumakustik (Verminderung der Nachhallzeit) bzw. zur Lärminderung schallabsorbierende Auskleidungen in Form von Faserplatten an den Wänden und an den Decken angebracht, zum Beispiel in Konferenzsälen, in Werkhallen.



Abbildung 1  
Schallabsorbermatten aus fasrigem Material

Diese Schallabsorber-Platten bestehen aus fasrigem Material, zum Beispiel aus Glasfasern (links im Bild) oder aus Mineralfasern (rechts im Bild), das hinter akustisch transparenten Abdeckungen angebracht ist.

Wie kann man für die Berechnung der Schalldämpfung solcher Matten dieses unregelmäßige Fasergeflecht modellieren?

Dazu hatte bereits Lord Rayleigh vor über 100 Jahren eine beeindruckende Idee, die durch ihre Einfachheit und Treffsicherheit der Modellierung besticht (Abb. 2).

Es werden, wie im Bild ganz rechts gezeigt, parallele Kanäle in einem festen Material verwendet; diese Kanäle können auch schräg angeordnet und mit seitlich angekoppelten Volumina gestaltet werden. Diese scheinbar primitiven geometrischen Gebilde für die Realität des Fasergeflechts stellen einen sehr hohen Grad an Abstraktion der Realität dar: jedoch bilden diese Modelle die wesentlichen physikalischen Vorgänge der Schallabsorption im fasrigen Material richtig ab. Die Validierung dieses Modells zeigt Abbildung 3.

Auf der senkrechten Achse des Diagramms ist der Grad der Schallabsorption für verschiedene Fasermatten dargestellt, von 0 bis 100 %, auf der horizontalen Achse die Frequenz, bei der diese Schallabsorption wirkt. Die beiden jeweils zusammenliegenden Kurven zeigen für eine Fasermatte den Vergleich zwischen Rechnung und Messung.

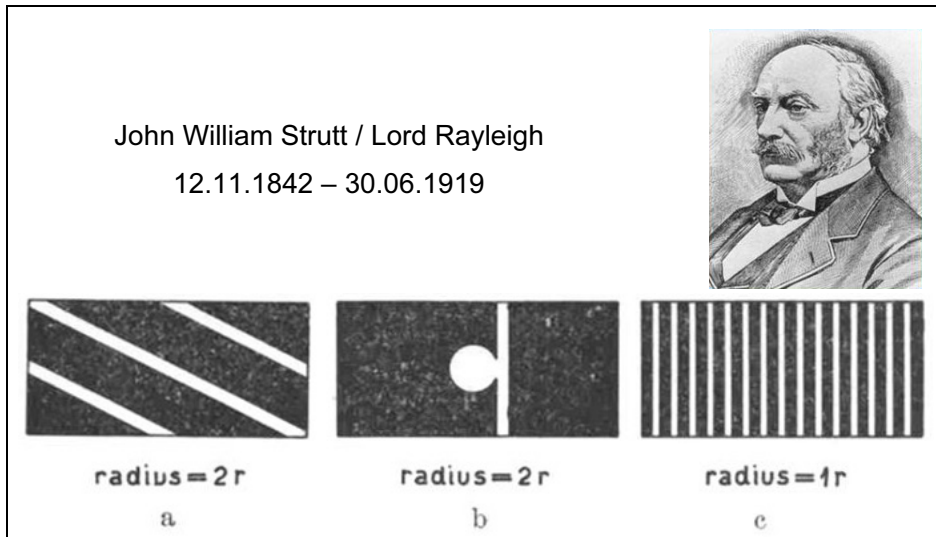


Abbildung 2  
Rayleigh-Modell des Faserabsorbers (nach Zwicker & Kosten)

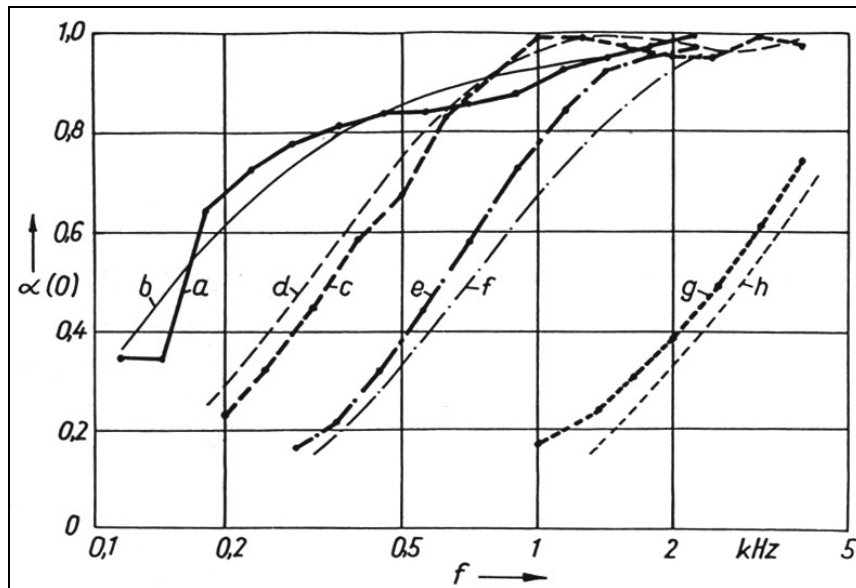



Abbildung 3  
Schallabsorption von Fasermatten: Vergleich zwischen Rechnung und Messung



**Michael James Lighthill**  
23.01.1924 – 17.07.1998

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \underbrace{\frac{\partial \dot{m}}{\partial t}}_{\text{Monopol-Strahler}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho f_i + m v_i)}_{\text{Dipol-Strahler}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + \rho_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij})}_{\text{Quadrupol-Strahler}}$$

Abbildung 4  
Inhomogene Wellengleichung der Strömungsakustik (nach Lighthill)  
(Bild: Uni. St. Andrews Scotland)

Diese Validierungsbeispiele für einige Fasermatten beweisen die zweckmäßige Modellierung der Fasermatte hinsichtlich der Schalldämpfung durch die Verwendung des sehr einfachen (!) Rayleigh-Modells für das in der Realität komplizierte Faserflecht.

Und ein *zweites Beispiel* für die großartige Intuition bei einer Modellierung sei hier erläutert, und zwar bei der Erzeugung von Schall durch Strömungen, wie zum Beispiel beim Triebwerk eines startenden Flugzeuges oder bei einem Ventilator.

Der betreffende Strömungsvorgang und das dabei erzeugte Schallfeld werden physikalisch-mathematisch durch eine Wellengleichung beschrieben, und zwar die sogenannte inhomogene Wellengleichung der Strömungsakustik, die 1952 von dem englischen Mathematiker M. J. Lighthill erstmals abgeleitet wurde (Abb. 4).

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der Term der Schallausbreitung, auf der rechten Seite stehen die Strömungsvorgänge, die den Schall hervorrufen. Lighthill hat mit großer Intuition erkannt, daß sich diese Strömungsvorgänge auf der rechten Gleichungsseite als akustische Quellen in der Form der aus der theoretischen Akustik bekannten Multipole darstellen lassen: Lighthill sah sozusagen hinter diesen Differentialausdrücken auf der rechten Gleichungsseite als Modellabbildung die akustischen Elementarstrahler: Monopole, Dipole und Quadrupole. Die Grundidee der sogenannten Lighthill-Analogie läßt sich auch folgendermaßen erläutern:

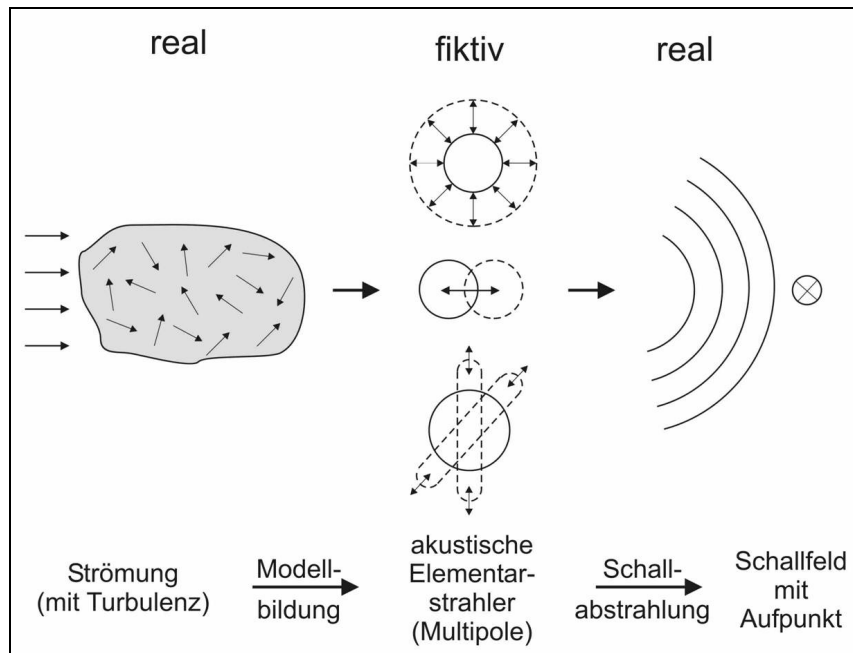


Abbildung 5  
Grundidee der Lighthill-Analogie

Die Realität der Strömung wird durch eine fiktive Anordnung von akustischen Modellstrahlern abgebildet. Die berechenbare Schallabstrahlung dieser Modellquellen führt zur abgestrahlten Schallenergie ins Fernfeld. Diese Vorgehensweise setzt voraus, daß die Quellstärke der Modellstrahler aus der realen, instationären Strömung abgeleitet werden kann.

Als Vorteil dieser Modellierung ergibt sich außerdem, daß diese Elementarstrahlertypen sehr anschaulich gedeutet werden können (Abb. 6), und zwar

- der Monopol als atmende Kugel,
- der Dipol als kleine schwingende Kugel,
- der Quadrupol als sich verformende Kugel (ohne Massen- und Schwerpunktsänderung).

Welch hoher Grad von Intuition zeigt sich hier, in den Differentialausdrücken der hochkomplexen inhomogenen Wellengleichung so einfache und so anschauliche Modellquellen zu sehen! Und außerdem: Diese Modellbildung stellt keinesfalls nur eine qualitative Abbildung dar, sondern es folgen daraus quantitative Formulierungen, die experimentell glänzend bestätigt worden sind.

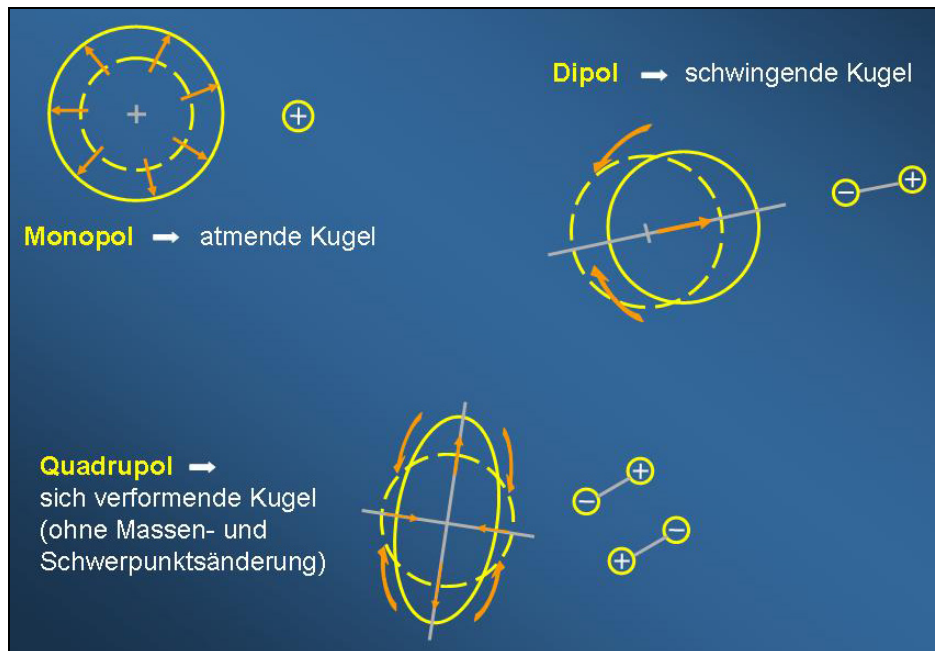


Abbildung 6  
Akustische Multipole (nach Roger)

Nunmehr werden einige *allgemeine Merkmale und Vorgehensweisen* im Zusammenhang mit den Modellen in der Technik erläutert.

Die Modelle unterscheiden sich in den einzelnen Wissenschaftsdisziplinen relativ stark. In der Technik werden meist nicht nur Erklärungsmodelle, sondern insbesondere funktionsfähige Modelle, in fortlaufend stärkerem Maße Computermodelle verwendet.

In den Technikwissenschaften ist zum Beispiel die *experimentelle Modelltechnik* außerordentlich weit verbreitet, das heißt, es wird zum Beispiel die akustische Abschirmwand für eine Verkehrsstrasse im Modell gegenständlich nachgebaut und ihre Schallminderung auf benachbarte Wohngebäude im Modell erprobt.

Welche Vorteile bieten solche experimentellen Modelluntersuchungen?

- Der Material- und Fertigungsaufwand sowie die Betriebskosten sind gering.
- Man kann die Parameter, die das System beeinflussen, beliebig variieren und ihre Auswirkungen auf den beabsichtigten Zweck experimentell erproben. Das ist im allgemeinen im Original unter Betriebsbedingungen, zum Beispiel bei der Schallschutzwand längs einer Autobahn, völlig ausgeschlossen.

- Im Modell können Vorgänge beobachtet und Größen gemessen werden, die im Original-Betriebsfall nicht beobachtet bzw. nicht gemessen werden können. Verfahren der Zeitlupe bzw. des Zeitraffers können angewendet werden.
- Im Modell kann man das fehlerhafte Verhalten einer Anlage erzeugen, um die entsprechenden Auswirkungen studieren und sinnvolle Gegenmaßnahmen erarbeiten zu können. Das gleiche gilt für die Untersuchung unzulässiger und kritischer Betriebsfälle, die ein reales System zerstören oder die Umwelt schädigen würden.

Für die experimentelle Modelltechnik sind in den Technikwissenschaften prinzipiell zwei Abbildungsverfahren möglich. Das sind die homologen und die analogen Abbildungen.

Die *Homologien* setzen die Existenz gleicher physikalischer Grundqualitäten voraus, also zum Beispiel ein Flugzeug fliegt im Original in der Luft, das Modell des Flugzeuges wird im Windkanal, also auch in einer Luftströmung, untersucht. Wir haben also im Original und im Modell die gleiche physikalische Grundqualität: „Flugzeug in Luft“.

#### **Homologien führen zu physikalisch ähnlichen Modellen.**

Dagegen beruhen die *Analogien* auf gemeinsamen Struktur- und Funktionseigenschaften zwischen qualitativ unterschiedlichen physikalischen Systemen, zum Beispiel wird an einem elektrischen Netzwerk die Wirkungsweise eines akustischen Helmholtz-Resonators untersucht, bzw. wird das Schallfeld eines Konzertsaaes mit Hilfe der Oberflächenwellen in einem Wassertank beobachtet.

#### **Analogien führen zu physikalisch analogen Modellen.**

Modelle werden in den Technikwissenschaften weitestgehend aus der realen „Lebenswelt“ abgeleitet. Sie sind meist sehr anschaulich, sie können bei analogen Modellen, wie wir noch sehen werden, aber auch sehr abstrakt sein. Im allgemeinen aber „sprechen sie das Gemüt des normalen Menschen noch an“ (wie das hier in der vorangegangenen Vorlesung von Herrn Pinkau für die sehr abstrakten Modelle in der Physik berechtigterweise in Zweifel gezogen worden ist).

Von den Modellarten, die in den Technikwissenschaften verwendet werden, will ich im Folgenden herausgreifen:

- die physikalisch ähnlichen Modelle, die Homologien realisieren,
- die physikalisch analogen Modelle, die Analogien praktizieren,
- die Funktionsmodelle, die „lediglich“ Funktionen modellieren, und
- die Computermodelle.

Wir wollen uns nunmehr diesen Modellarten im Detail zuwenden. Dabei möchte ich zeigen, daß diese Modelle in der Technik dem Lösen von Problemen dienen, und daß bei diesem Problemlösen zahlreiche Lösungen zum eigentlichen Modellproblem mit erarbeitet werden.





Abbildung 7  
Raumakustisches Modell der historischen Semper-Oper  
(Institut für Akustik und Sprachkommunikation, TU Dresden)

### *Physikalisch ähnliche Modelle*

Diese Modellierungsart soll am Beispiel eines raumakustischen Modells erläutert werden (Abb. 7).

Das Modell der historischen Semper-Oper ist im Modellmaßstab 1:20 gestaltet worden, also 20fach verkleinert. Für raumakustische Modellierungen wird folgende „Ähnlichkeitsregel“ verwendet:

Werden in einem Modellraum, das heißt in einem geometrisch verkleinerten Raum, Schallsignale gesendet, deren Wellenlänge  $\lambda_M$  sich zur Wellenlänge  $\lambda_O$  im Original genau so verhält wie die Abmessungen  $l_M$  im Modellraum zu den Längenabmessungen  $l_O$  im Original, so ergeben sich physikalisch ähnliche Schallfelder. Es gilt die Ähnlichkeitsregel ( $m_l$  Maßstabsfaktor, Maßstab)

$$\frac{\lambda_M}{\lambda_O} = \frac{l_M}{l_O} = m_l$$

mit Index O: Original, Index M: Modell.

Wird in diese Gleichung für den Maßstab  $m_l$  für die Wellenlängen  $\lambda_M / \lambda_O$  jeweils der Quotient von Schallgeschwindigkeit  $c$  und Frequenz  $f$  eingesetzt

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

dann folgt daraus der Zusammenhang zwischen dem Längen- und dem Frequenzmaßstab:

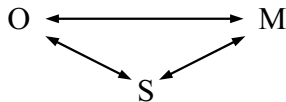
$$m_l = \frac{\lambda_M}{\lambda_O} = \frac{c_M \cdot f_O}{f_M \cdot c_O} \stackrel{c_M=c_O}{=} \frac{f_O}{f_M} = \frac{1}{m_f}.$$

Wenn sich also im Modellraum wie im Originalraum das Medium „Luft“ befindet, das heißt die Schallgeschwindigkeit in beiden Ausführungen gleich groß ist, dann sind der Längenmaßstab und der Frequenzmaßstab zueinander reziprok, also gilt

$$f_M = \frac{1}{m_l} f_O$$

Bei einem Modellmaßstab  $m_l$  von 1:20 muß also der Frequenzbereich im Modell auf das Zwanzigfache zu höheren Frequenzen hin transformiert werden, um im Modell physikalisch ähnliche Verhältnisse wie im Original zu erhalten.

Das Beispiel des raumakustischen Modells zeigt, daß offensichtlich bestimmte Umrechnungsbeziehungen, die sogenannten Modellgesetze,



gelten, um das Modell M nach den Vorgaben des Originals O zu gestalten, das Modell entsprechend physikalisch ähnlich zu betreiben und um die im Modell erhaltenen experimentellen Ergebnisse auf das Original übertragen zu können. Das sind zweckgerichtete Handlungen durch das Subjekt S.

Ganz allgemein kann man für die Existenz physikalischer Ähnlichkeit und damit für physikalisch ähnliche Modellierungen formulieren:

Physikalische Ähnlichkeit beim Vergleich zweier Systeme besteht dann, wenn die Maßstabsfaktoren  $m$  existieren und diese für jeweils homologe Größen gleich groß sind

$\Rightarrow m = \text{idem.}$

Gleichbedeutend kann diese Bedingung der physikalischen Ähnlichkeit auch so formuliert werden:

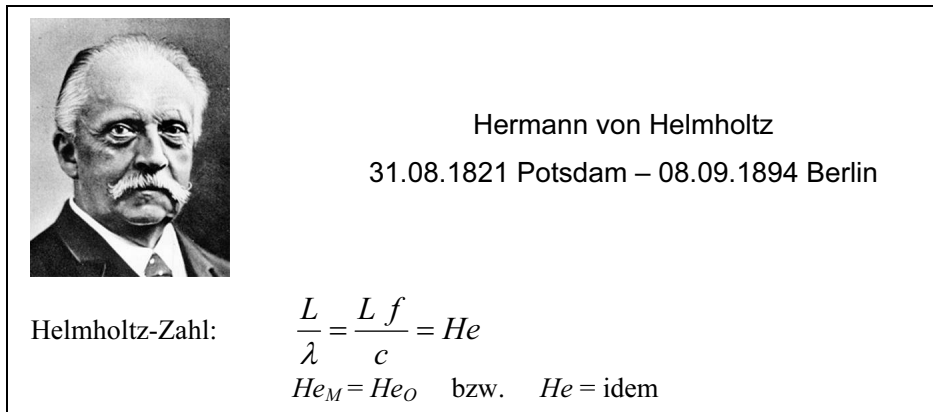


Abbildung 8  
Hermann von Helmholtz und die Helmholtz-Zahl

Physikalische Ähnlichkeit besteht dann, wenn Ähnlichkeitskennzahlen  $\pi$  existieren und diese beim Übergang vom Original in das Modell (und umgekehrt) denselben Zahlenwert haben

$\Rightarrow \pi = \text{idem}$ .

Diese Ähnlichkeitskennzahlen sind, wie wir noch sehen werden, einfache dimensionslose Kombinationen physikalischer Größen.

Eine exakte Modellübertragung, das heißt ein physikalisch vollkommen ähnliches Modell, liegt dann vor, wenn alle  $\pi$ -Variablen (Ähnlichkeitskennzahlen) der oben genannten Bedingung genügen. Das ist in der Praxis der Modelltechnik meist nicht möglich. Man spricht dann von partieller Ähnlichkeit. Zum Beispiel können bei starken Verkleinerungen nicht alle Details geometrisch ähnlich im Modell nachgebildet werden, zum Beispiel die Oberflächenrauigkeit von Wänden.

In der Akustik ist für die physikalisch ähnliche Modellierung die *Helmholtz-Zahl* als Ähnlichkeitskennzahl von entscheidender Bedeutung (Abb. 8).

Zwei Schallausbreitungsvorgänge sind physikalisch ähnlich, wenn bei beiden Vorgängen das Verhältnis von charakteristischer Länge und Wellenlänge des Schallvorganges bzw. die dimensionslose Kombination der Größen Länge, Frequenz und Schallgeschwindigkeit denselben Zahlenwert hat:

$\Rightarrow He_M = He_O$  bzw.  $He = \text{idem}$

Diese dimensionslose Kennzahl wird als Helmholtz-Zahl bezeichnet, erstmals verwendet 1970 von Lothar Cremer, dem damaligen Professor für Technische Akustik an der Technischen Universität Berlin (Cremer, 1970 und Cremer & Hubert, 1971). Hermann von Helmholtz (1821–1894) hat unter anderem auf den Gebieten der Strömungsmechanik und der Akustik bedeutende Leistungen erbracht: die Helmholtz-

schen Wirbelsätze, die Helmholtzsche Bedingung der Drehungsfreiheit in strömenden Fluiden, die Helmholtzsche Form der Wellengleichung, das Reziprozitätsgesetz in der Akustik, der Helmholtz-Resonator, die „Die Lehre von den Tonempfindungen“ (1886).

Hermann von Helmholtz hat sich bereits mit Modellen der physikalischen Ähnlichkeit und der Modellierung befaßt, siehe dazu: Helmholtz (1873). In dieser Arbeit hat Helmholtz die Grundlagen der physikalischen Ähnlichkeit formuliert; hinsichtlich der strömungsmechanischen und akustischen Ähnlichkeit schreibt er:

„Bei dieser Lage der Sache wollte ich auf eine Verwendung der hydrodynamischen Gleichungen aufmerksam machen, welche erlaubt, Beobachtungsergebnisse, die an einer Flüssigkeit und an Apparaten von gewisser Grösse und Geschwindigkeit gewonnen worden sind, zu übertragen auf eine geometrisch ähnliche Masse einer anderen Flüssigkeit und Apparate von anderer Grösse und anderer Bewegungsgeschwindigkeit.

Schallschwingungen einer compressiblen Flüssigkeit werden in weiteren Räumen mechanisch ähnlich verlaufen können, wie schnellere Oscillationen einer weniger compressiblen Flüssigkeit in engeren Räumen.“

„Schnellere Oszillationen in engeren Räumen“ heißt also: bei Verkleinerung der Geometrie muß der Frequenzbereich zu höheren Frequenzen hin transformiert werden. (Der Bezug auf die Kompressibilität des Fluids zeigt auch bereits, daß neben der Frequenz und der charakteristischen Abmessung die Schallgeschwindigkeit des Fluids in den Ähnlichkeitsbetrachtungen berücksichtigt werden muß.)

Ich verweise hier auch auf die Wiederentdeckung und hochinteressante Auswertung dieser Helmholtzschen Arbeit durch Werner Albring (1966).

Für die Modellabbildung und Modellübertragung sind im *Fachgebiet der Strömungsmechanik* die folgenden dimensionslosen Größenkombinationen von besonderer Bedeutung:

$$\begin{array}{ll} \text{Reynolds-Zahl} & Re = \frac{v}{\nu} l \\ \text{Euler-Zahl} & Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Mach-Zahl} & Ma = \frac{v}{c} \\ \text{Froude-Zahl} & Fr = \frac{v}{\sqrt{gl}} \end{array}$$

Im *Fachgebiet der Akustik* wird neben der Helmholtz-Zahl insbesondere die

$$\text{Strouhal-Zahl} \quad Sr = \frac{fl}{v},$$

verwendet, benannt nach dem tschechischen Physiker Vincent Strouhal. Er untersuchte die Schallerzeugung am umströmten Zylinder, die „singenden“ Telegraphendrähte oder Äolsteine. (Er arbeitete an der Universität Würzburg bei dem Experimentalphysiker Friedrich Kohlrausch von 1875–1878.)

Und für alle diese Ähnlichkeitskennzahlen, die auf ein bestimmtes, zu modellierendes Problem zutreffen, muß die Zwangsbedingung der Konstanz jeder dieser dimensionslosen Kennzahl zwischen Original und Modell eingehalten werden. Für diesen Fall können dann physikalisch ähnliche, gegenständliche Modelle ausgelegt und gebaut werden, zum Beispiel Modelle von Räumen, Modelle von Gebäuden und Schiffsstrukturen. Dann können diese Modelle im Experiment physikalisch ähnlich betrieben werden. Und dann erfolgt schließlich – mit Anwendung wiederum dieser Ähnlichkeitskennzahlen – die Rückübertragung der Modellmeßwerte auf das noch nicht gegenständlich existierende Original.

Die Liste der heute bekannten und für die physikalisch ähnliche Modellierung verwendeten Ähnlichkeitskennzahlen ist lang; sie umfaßt bei Beschränkung auf die wesentlichen Kennzahlen der Mechanik, Strömungsmechanik, Thermodynamik und Akustik etwa 50 dimensionslose Kenngrößen.

Diese Ähnlichkeitskennzahlen sind mit den Namen bedeutungsvoller Wissenschaftler der Physik und anderer Wissenschaftsdisziplinen verbunden. Als Beispiele seien genannt:

Archimedes-Zahl	Bingham-Zahl	Biot-Zahl
Cauchy-Zahl	Damköhler-Zahl	Eckert-Zahl
Euler-Zahl	Fourier-Zahl	Froude-Zahl
Galilei-Zahl	Gay-Lussac-Zahl	Grashof-Zahl
Hagen-Zahl	Helmholtz-Zahl	Knudsen-Zahl
Mach-Zahl	Nußelt-Zahl	Poisson-Zahl
Prandtl-Zahl	Rayleigh-Zahl	Reynolds-Zahl
Rossby-Zahl	Schmidt-Zahl	Sherwood-Zahl
Sommerfeld-Zahl	Stanton-Zahl	Stokes-Zahl
Strouhal-Zahl	Taylor-Zahl	Weber-Zahl

Einige davon waren Mitglieder der Preußischen Akademie der Wissenschaften (Abb. 9).

Wir verwenden also heute in der Modelltechnik zum Beispiel die Hagen-Zahl, die Prandtl-Zahl und die Sommerfeld-Zahl.

Nach meinen Erfahrungen zur strömungsmechanischen und zur akustischen Modelltechnik sollte unbedingt auf die allgemeinen fünf Grundregeln der Modellierung hingewiesen werden, da sie so häufig vergessen werden (sie gelten übrigens für jede Art von Modellen und für alle Fachgebiete, die mit Modellen arbeiten):

The five „DON'Ts“ of modelling

1. Don't believe that the model is the reality.
2. Don't extrapolate beyond the region of fit.
3. Don't distort reality to fit the model.
4. Don't retain a discredited model.
5. Don't fall in love with your model.

(S. W. Golomb, in: Simulation 14, 1970)

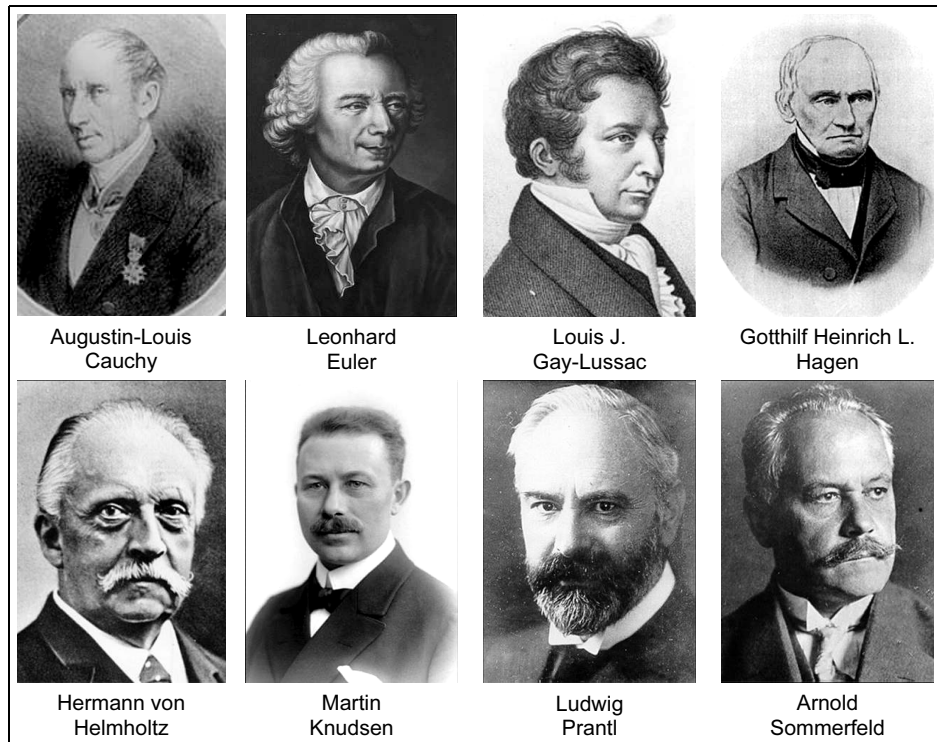


Abbildung 9  
Akademie-Mitglieder (BBAW, Archiv)

Neben der physikalisch ähnlichen Modellierung eines Konzertsaaes in Form der Semper-Oper in Dresden sollen noch einige weitere Beispiele für derartige gegenständliche Modelle aus der Technik in den Abbildungen 10 bis 12 gezeigt werden. Zum Abschluß dieser Ausführungen zu den physikalisch ähnlichen Modellen sollen einige Verallgemeinerungen zu dieser Art der physikalisch ähnlichen Modellierung formuliert werden:

- Diese physikalisch ähnlichen Modelle sind zwar Strukturmodelle, aber es handelt sich dabei vor allem um funktionsfähige Modelle.
- An diesen Modellen wird unmittelbar experimentiert, systematisch simuliert, exakt gemessen, an und mit diesen Modellen wird „gearbeitet“.
- Die Modelle sind sehr anschaulich.
- Es werden nicht nur Geometrien modelliert (im allgemeinen: Verkleinerung, in einigen Fällen aber auch Vergrößerungen), sondern auch Zeiten, Frequenzen, Strömungsgeschwindigkeiten, Werkstoffgrößen, Temperaturen, Erregerkräfte und anderes mehr.

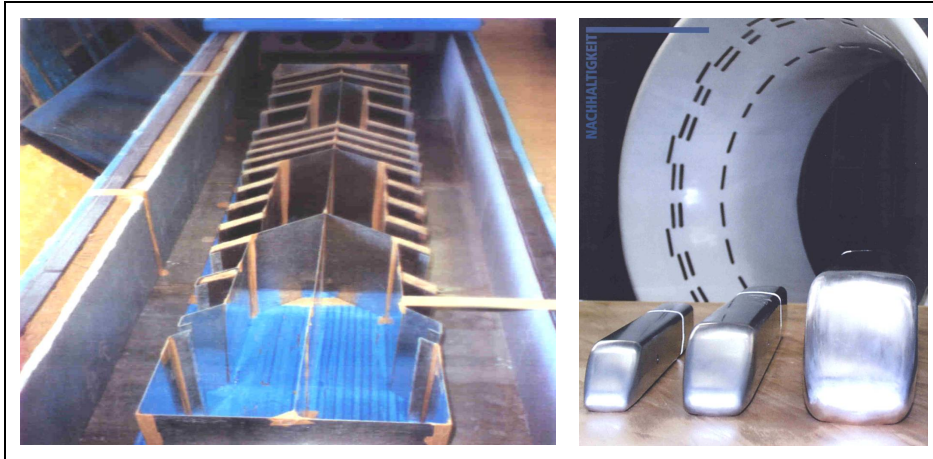


Abbildung 10  
Schalldämpfer für ein Gasturbinenkraftwerk  
im Modell (nach Gruhl, Müller BBM)

Abbildung 11  
Zugmodelle im Windkanal  
(Loose et al., DLR)

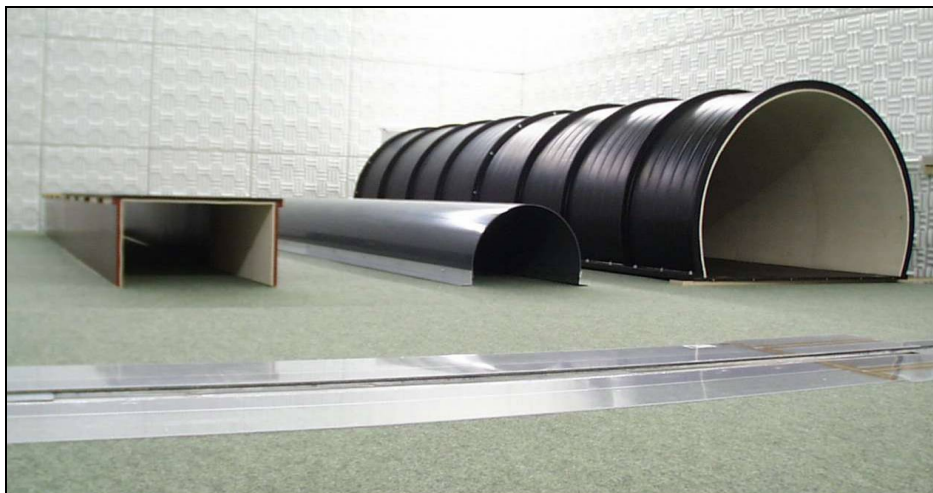


Abbildung 12  
Modelle für Straßentunnel (nach Chudalla, BAST)

- Die Modelle unterliegen Zwangsbedingungen für ihre geometrische und physikalische Gestaltung: für die Ähnlichkeitskennzahlen gilt:  $\pi = \text{idem}$ .
- Die Ergebnisse der im Modell durchgeführten Experimente werden mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation  $\pi = \text{idem}$  auf die Funktionsgrößen umgerechnet, die für das fiktive Original erwartet werden können.
- In der Praxis kann meist nur partielle Ähnlichkeit realisiert werden.

Nunmehr soll die zweite wichtige Modellierungsart in den Technikwissenschaften, die der physikalisch analogen Modelle, erläutert werden.

### *Physikalisch analoge Modelle*

Wie wir gesehen hatten, laufen bei den physikalisch ähnlichen Modellen im Original und im Modell gleichartige physikalische Vorgänge ab, also zum Beispiel erfolgt im Modell und im Original eines Konzertsaaes ein Schallausbreitungsvorgang in Luft. Im Gegensatz dazu beruhen die physikalisch analogen Modelle auf strukturellen oder funktionellen Ähnlichkeiten zwischen *unterschiedlichen* physikalischen Systemen. Analoge Modelle sind „durch Um- und Neukodierung aller materieller Beschaffenheiten charakterisiert; es findet eine Merkmalsverfremdung statt.“ (nach Stachowiak).

Diese analoge Modellierung soll am Beispiel des Helmholtz-Resonators erläutert werden. In Abbildung 13 sind dargestellt:

- die Fotografie eines Helmholtz-Resonators,
- das gegenständliche Schema, als Abbild der realen Anordnung,
- das akustische Schema, das den schwingenden Luftpfropfen als Masseelement  $M_a$ , die Reibung  $Z_{a,R}$  des schwingenden Pfropfens im Hals des Resonators und das Luftvolumen im kreisförmigen Hohlraum als akustische Feder  $N_a$  zeigt,
- die analoge Netzwerkdarstellung (mit den Bildern elektrischer Bauelemente).

Damit können Gesetzmäßigkeiten für elektrische Netzwerke auf die Berechnung des Helmholtz-Resonators übertragen werden.

Verallgemeinert ausgedrückt, wird diese analoge Modellierung infolge der Isomorphie der physikalischen Strukturen realisiert (nach Lenk):

- Die reale physikalische Struktur wird auf ein allgemeines lineares Netzwerk abgebildet.
- Auf dieses werden die Rechenmethoden und Ergebnisse der elektrischen Netzwerktheorie übertragen.
- Mit dieser Analogie können mechanische, akustische, pneumatische, hydraulische, magnetische, elektrische Systeme und insbesondere deren Kopplungen dargestellt und berechnet werden.



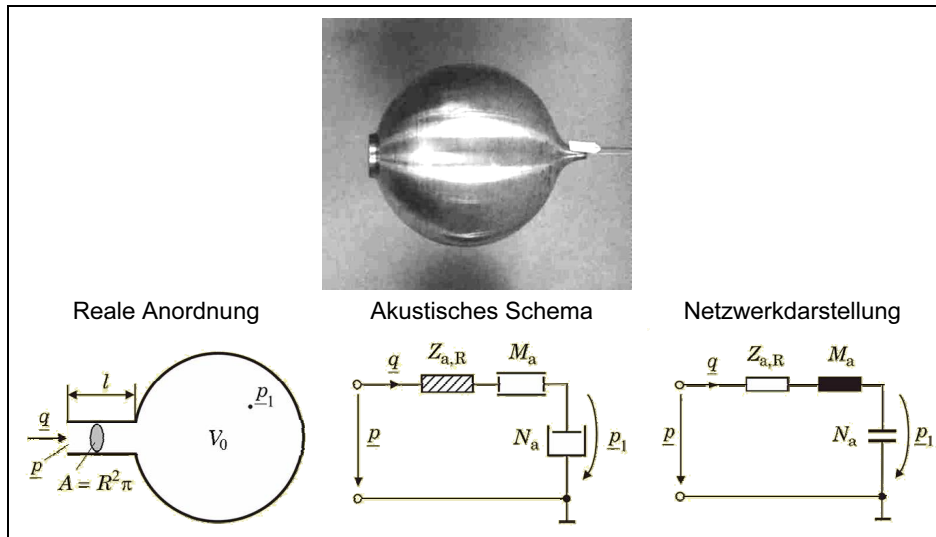


Abbildung 13  
 Behandlung des Helmholtz-Resonators mit einer Analogie (nach Lenk)

Zuordnung zwischen Koordinaten bzw. Bauelementen			
Spannung	$\underline{u}$	$\circ \text{---} \circ$	$\underline{p}$ Druck
Strom	$\underline{i}$	$\circ \text{---} \circ$	$\underline{q}$ Volumenfluss
Induktivität	$L$	$\circ \text{---} \circ$	$M_a$ akustische Masse
Kapazität	$C$	$\circ \text{---} \circ$	$N_a$ akustische Nachgiebigkeit
Widerstand	$R$	$\circ \text{---} \circ$	$Z_{a,r}$ akustische Reibung

$\circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ$ $\underline{u} = j\omega L \underline{i}$	$\underline{p} = j\omega M_a \underline{q}$	$\circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ$ $\underline{p} = j\omega M_a \underline{q}$
$\circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ$ $\underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \underline{i}$	$\underline{p} = \frac{1}{j\omega N_a} \underline{q}$	$\circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ$ $\underline{p} = \frac{1}{j\omega N_a} \underline{q}$
$\circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ$ $\underline{u} = R \underline{i}$	$\underline{p} = Z_{a,r} \underline{q}$	$\circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ$ $\underline{p} = Z_{a,r} \underline{q}$
Knoten der Schaltungsstruktur $\sum_{\neq} \underline{i}_v = 0$	$\sum_{\neq} \underline{q}_v = 0$	Knotenpunkt des akust. Netzwerks
Masche der Schaltungsstruktur $\sum_{\bigcirc} \underline{u}_v = 0$	$\sum_{\bigcirc} \underline{p}_v = 0$	Masche des akust. Netzwerks

Abbildung 14  
 Analogie zwischen akustischen und elektrischen Netzwerken (nach Lenk)

Abbildung 14 zeigt die Zuordnung zwischen den akustischen und elektrischen Größen und Bauelementen, und zwar im oberen Teil die Analogie der physikalischen Größen und Bauelemente, im unteren Teil die analogen Entsprechungen bis hin zu den analogen Knotenpunkts- und Maschensätzen.

Ein weiteres Beispiel für diese sogenannte elektromechanische Analogie wird in den Abbildungen 15 und 16 dargestellt.

Dieser PKW-Schalldämpfer wird auf ein allgemeines Netzwerk abgebildet.

Mit einem Netzwerkanalyseprogramm können Simulationen zum Einfluß der Geometrie auf den Frequenzverlauf der Schalldämpfung dieses Schalldämpfers durchgeführt werden.

Nummehr ein zweites Beispiel für eine analoge Modellierung, und zwar die sogenannte *Flachwasseranalogie*. Dabei wird die Schallausbreitung in Luft analog zu den Oberflächenwellen auf einer Wasseroberfläche (bei geringer Wassertiefe) gesetzt, also zwei völlig unterschiedliche physikalische Vorgänge.

Die Analogiebeziehungen zwischen diesen beiden Wellenvorgängen ergeben sich, wenn die dafür zuständigen Differentialgleichungen (Kontinuitäts-, Bewegungs- und Energiegleichung) dimensionslos dargestellt und miteinander verglichen werden. Die Gleichungen haben dieselbe Struktur, als Analogiebeziehungen erhält man zum Beispiel:

Schallausbreitung ebene Gasströmung	Oberflächenwellen auf dem Wasser
Dichte-, Temperaturverhältnis	Wassertiefenverhältnis
Druckverhältnis	Quadrat des Wassertiefenverhältnisses
Schallgeschwindigkeit	Wasserwellengeschwindigkeit
$c_G = \sqrt{\kappa RT}$	$c_W = \sqrt{gh}$
MACH-Zahl	FROUDE-Zahl
Schallausbreitung	Ausbreitung der Oberflächenwellen auf dem Flachwasser

Da sich die Wellengeschwindigkeiten des Luftschalls und der Oberflächenwellen auf dem Wasser größenordnungsmäßig etwa um den Faktor 1.000 unterscheiden, laufen bei Konstanz der Helmholtz-Zahl die Wellenvorgänge auf der Wasseroberfläche (Flachwasser) etwa tausendmal langsamer ab als die Schallausbreitung in Luft. Damit ergeben sich ausgezeichnete visuelle Beobachtungsmöglichkeiten auf der Wasseroberfläche. Die (unsichtbare!) Schallausbreitung in Luft kann damit analog als Ausbreitung von Oberflächenwellen auf dem Wasser mit bloßem Auge beobachtet werden.

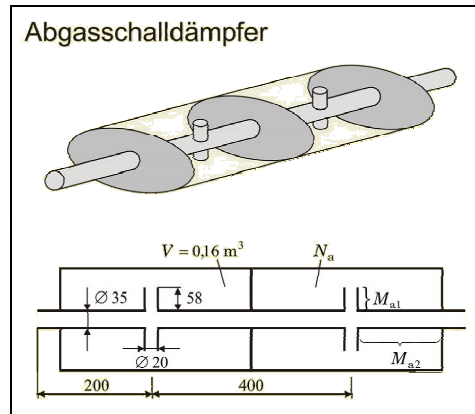


Abbildung 15

Abgasschalldämpfer: fiktives Original, Abmessungen im Modell (nach Lenk et al.)

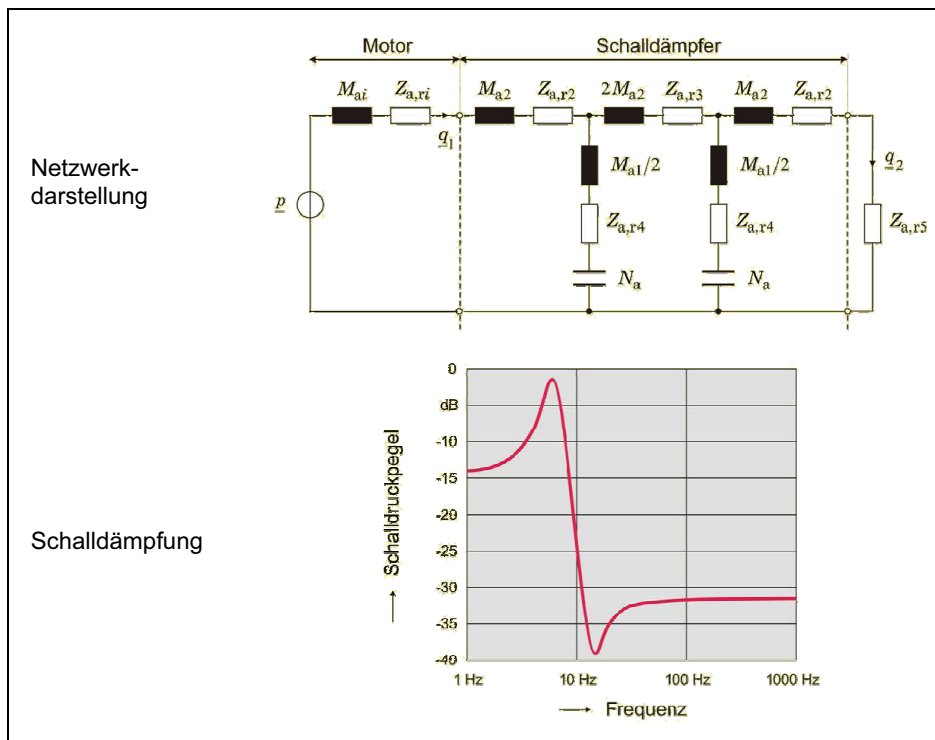


Abbildung 16

Abgasschalldämpfer: Netzwerkdarstellung, Schalldämpfung (nach Lenk et al.)

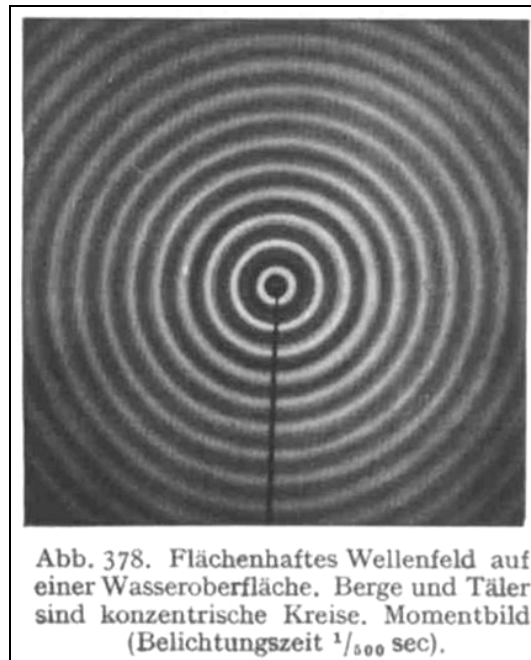


Abbildung 17  
Ausbreitung von Kugelwellen (nach Pohl)

Diese analoge Modelltechnik wird in der Gasdynamik und in der Akustik angewendet. Ich will mich hier auf die akustischen Vorgänge beschränken.

Aus dem Physik-Lehrbuch von Pohl ist in Abbildung 17 die Ausbreitung von kreisförmigen Wellen auf der Wasseroberfläche als Analogon zur Kugelwellenausbreitung in Luft dargestellt. In einer Wellenwanne mit geringer Wassertiefe werden mit einem punktförmigen Tauchkörper Oberflächenwellen erzeugt. Das Ufer der Wanne ist flach gebösch, um störende Reflexionen vom Rand zu vermeiden.

Diese Flachwasseranalogie für Schallausbreitungsvorgänge läßt sich auch für die raumakustische Gestaltung eines Konzertsaaes nutzen, wie das in den 1920er Jahren in der akustischen Fachliteratur und später von Lothar Cremer beschrieben worden ist. (Derartige Modelle sind sehr anschaulich, sie werden aber heute nicht mehr verwendet.)

Abbildung 18 zeigt das zweidimensionale Raummodell eines Konzertsaaes. Die Beobachtung der Oberflächenwellen ist nur in der Schnittebene möglich. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wasserwellen beträgt 30 cm/s, die Wassertiefe ist 7–8 mm. Es wird jeweils ein kurzer Wellenzug erzeugt. Dabei können einzelne Reflexionen zeitlich gut verfolgt werden.

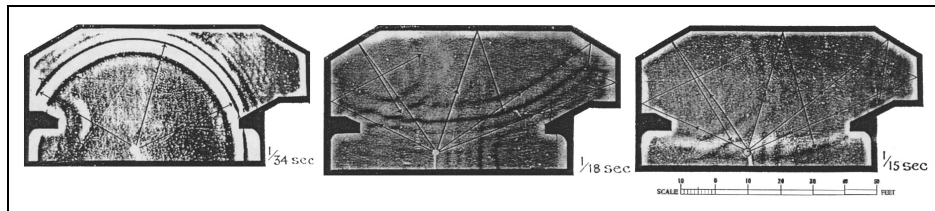


Abbildung 18

Schallausbreitung in einem zweidimensionalen Raummodell, Schnitt durch einen Konzertsaal, Modell im Flachwassertank (nach Davis & Kaye)

In Abbildung 19 wird eine große Bildfolge gezeigt.

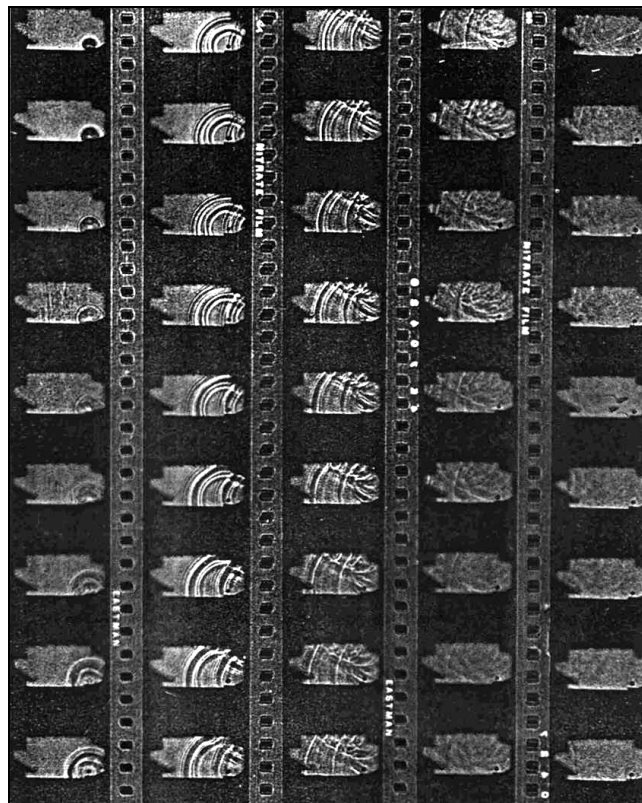


Abbildung 19

Schallausbreitung in einem zweidimensionalen Raummodell, Schnitt durch einen Konzertsaal (nach Davis & Kaye) [Bildfolge von links oben nach rechts unten]

Die Aufnahme der Wellenbilder in zeitlich versetzten Augenblicken ergibt einen Überblick über die Ausbreitung der Wellenfronten (nach: Davis & Kaye, 1927).

Die Wasserwellenanalgie ist auch zur analogen Darstellung der Schallabstrahlung von Hubschrauberrotoren verwendet worden.

Abbildung 20 zeigt das zweidimensionale Wellenfeld an der Wasseroberfläche, die Beobachterebene ist die Rotorebene. Aus der zeitlichen Abfolge der Oberflächenwellen ist einerseits die Wellenlängenkompression vor der Vorderkante des Propellerblattes, andererseits die Wellenlängenexpansion hinter der Hinterkante des Blattes deutlich erkennbar.

Auch hier sollen zum Abschluß der Ausführungen zu den physikalisch analogen Modellen einige Verallgemeinerungen zu dieser Art der Modellierung formuliert werden:

- Die analogen Modelle sind zwar von verschiedener physikalischer Grundqualität. Sie besitzen aber die gleiche Struktur in den beschreibenden Differentialgleichungen bzw. in den Funktionsschemata, in den Schaltbildern und Netzwerkdarstellungen.



Abbildung 20  
Schallabstrahlung eines Hubschrauberrotors im Unterschallbereich,  
Anwendung der Wasserwellenanalgie (nach Wright)

- Sie koppeln damit Erkenntnisgebiete aus sehr unterschiedlichen Bereichen der Physik, das heißt beispielsweise Gesetze der Elektrotechnik mit Gesetzen der Mechanik und der Akustik. Im Helmholtz-Resonator schwingt Luft, im Modell des zugehörigen elektrischen Netzwerkes fließt ein elektrischer Strom. Im Raumschallfeld breiten sich Schallwellen aus, im analogen Modell sind auf der Oberfläche des Flachwassers Oberflächenwellen zu beobachten.
- Die Modelle unterliegen Zwangsbedingungen für ihre geometrische und physikalische Gestaltung (Analogiebeziehungen).
- Die analogen Modelle können als gegenständliche Modelle oder als ideelle Netzwerkmodelle gestaltet werden; heute werden sie meist als Computermodelle realisiert.
- Das Arbeiten mit dem analogen Modell bedeutet die Auslegung des analogen Modells, die Durchführung von Experimenten bzw. Rechnungen am Modell sowie die Rückübertragung der Ergebnisse vom Modell auf das zu gestaltende, noch nicht vorhandene Original.

Mit der analogen Modellierung kann in ausgezeichneter Weise ein System optimal gestaltet werden (siehe im oben genannten Beispiel die Optimierung eines Abgasschalldämpfers).

### *Funktionsmodelle*

Vom Original wird ein Funktionsmodell geschaffen, das den in der betreffenden Struktur stattfindenden Vorgang modelliert. Damit kann einseitig die Funktion des Phänomens optimiert werden, zu dem dann die passende Struktur entwickelt werden muß. Derartige Funktionsmodelle werden zum Beispiel in der Form eines synthetischen Schallfeldes angewendet, das als elektroakustisch erzeugtes Modellschallfeld eines Konzertsaaes dient (Abb. 21).

In einem großen schallreflexionsarmen Raum („schalltoter“ Raum) wird mit großen Lautsprecheranordnungen ein synthetisches Schallfeld erzeugt. Dieses wird einer Testperson angeboten, und zwar von vorn das nachhallfreie Testsignal (Musikstück), von den Seiten und von oben über Verzögerungseinrichtungen einzelne Anfangsreflexionen (Seiten- und Deckenschall) und von allen Seiten ebenfalls verzögert dann der diffuse Nachhall. Die Vorteile dieses Modellierungsverfahrens sind:

- Die einzelnen Komponenten des Schallfeldes können systematisch variiert werden, zum Beispiel Einfallsrichtung, Verzögerungszeit, Nachhallzeit, Klangfarbe. Dabei können diese Einflußgrößen mit elektroakustischen Mitteln leicht und schnell geändert werden.
- Der Einfluß dieser Änderungen auf die raumakustische Qualität wird dann unmittelbar subjektiv durch Probanden bewertet, zum Beispiel Raumeindruck, Durchsichtigkeit, Klangfarbe und anderes mehr.



Abbildung 21  
Großer schallreflexionsarmer Raum mit synthetischem Schallfeld  
(Institut für Akustik und Sprachkommunikation, TU Dresden)

Diese Methode wird in der raum- und psychoakustischen Forschung in umfangreicher Weise genutzt.

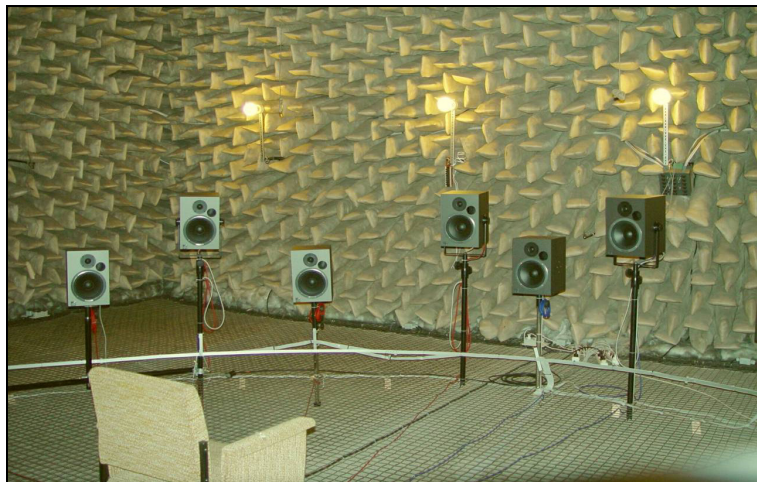


Abbildung 22  
Versuchsaufbau zur subjektiven Ermittlung der scheinbaren Quellbreite  
(nach Blau und AVMZ, TU Dresden)



Zum Beispiel werden in einem solchen synthetischen Schallfeld Forschungen zur Untersuchung der scheinbaren Quellbreite eines Orchesters durchgeführt (nach Blau, Abb. 22), also lautet die Fragestellung: Wie breit wirkt akustisch das Orchester? Diese scheinbare Quellbreite ist eine Komponente des akustischen Raumeindrucks. Damit können Aspekte des akustischen Eingehülltsein, der akustischen Wärme in einem Konzertsaal beurteilt werden.

Das synthetische Schallfeld als Modellschallfeld führte, wie M. Schroeder aus Göttingen schreibt, unausweichlich zur Technik der elektroakustisch gestalteten Akustik des Raumes. Dabei ist ein Ziel die veränderliche Akustik für verschiedene Musikarten und für Sprache. Für Mehrzwecksäle geht heute die Tendenz dahin, den Raum für Sprache zu konzipieren und den für die Musik benötigten Nachhall künstlich zu erzeugen.

Das scheint die Zukunft der Raumakustik zu sein: Mehr und mehr elektronisch erzeugter Schall auch im Konzertsaal und im Opernhaus! Das ist die „elektronische Architektur“, W. Kraak spricht vom „geklonten“ Raum!

Natürlich gibt es zu solchen Entwicklungen auch kritische Stimmen, so schreibt W. Kraak: „Die Architektur, die Akustik, die Historie geben den Sälen ihre Identität. Für den Konzertsaal ist die Akustik des Raumes sogar identitätsbestimmendes Merkmal. Da geht es nicht um Wohlklang, es geht um Echtheit. Die Abscheu vor der „künstlichen Akustik“ im Konzertsaal mag vergleichbar mit der vor Klonen in der Biologie sein.“ Kraak fährt dann fort: „Es gibt noch ein weiteres Problem bei der ‘elektronischen Architektur’: die Irritation, der Entfremdungseffekt, wenn in einem Raum, die aus dem Anblick des Raumes erwartete Akustik mit der gehörten nicht übereinstimmt. Stellen wir uns vor, in einem kleinen, stark gedämpft erscheinenden Konzertsaal wird die Akustik einer großen gotischen Kirche mit langem Nachhall simuliert“. Abschließend formuliert W. Kraak die Frage: „Ist vielleicht die unterschiedliche Beziehung zu natürlichem Raumschall und elektroakustisch erzeugtem Sekundärschall ein Problem der Generationen oder des Alters?“

Lassen Sie mich zum Abschluß dieser Ausführungen zu den Funktionsmodellen auch hier kurz das Wesentliche zusammenfassen:

Beim Funktionsmodell wird aus der Realität nur der Vorgang an sich modelliert. Damit kann einseitig die Funktion des Phänomens optimiert, auch subjektiv beurteilt werden. Für die Praxis müssen jedoch Funktion und Struktur gemeinsam hinsichtlich der Optimierung des realen Vorganges betrachtet werden.

### *Computermodelle*

Bei physikalischen-mathematischen Modellierungen ist die übliche Vorgehensweise die folgende: Reale Vorgänge werden über die physikalische Modellierung in mathematischen Beziehungen abgebildet. Die zugehörigen Gleichungen beschreiben das zeitliche und räumliche Verhalten der physikalischen Größen. Diese mathema-

tischen Gleichungen werden nunmehr mit numerischen Verfahren gelöst; die Lösungen müssen mit Hilfe von Experimenten, das heißt also Messungen für reale Vorgänge, validiert werden.

Die Computersimulation besteht also aus der Verbindung von physikalisch-mathematischer Modellierung, der Erarbeitung des zugehörigen Computermodells und der Durchführung der eigentlichen Simulation. Diese nutzt den Computer mit seinen Fähigkeiten der Speicherung (hohe Speicherkapazität), der großen Rechengeschwindigkeit und der Visualisierung der Daten.

Das Besondere der Computermodellierung zeigt sich nun im folgenden Aspekt. Die physikalisch-mathematische Modellierung beschreibt den realen Prozeß durch „kontinuierliche“ Gleichungen. Im Computermodell werden nunmehr diese Gleichungen – der Arbeitsweise des Computers angepaßt – in Raum und Zeit diskretisiert. Das heißt, daß diese Gleichungen nur auf einem Raum-Zeit-Gitter, also für ausgewählte Punkte in Raum und Zeit definiert werden. Je feiner dieses Raum-Zeit-Gitter ist, das heißt, je engermaschiger der räumliche Abstand der Gitterpunkte und je kürzer die Zeitintervalle sind, desto besser kann der physikalische Vorgang in den kleinsten Dimensionen aufgelöst werden. Für den Grenzfall des unendlich feinen Gitters würde man dann das kontinuierliche Geschehen als exakte mathematische Lösung für das physikalische Modell erhalten.

Bei der Praktizierung der Computermodellierung und Computersimulation spielt die anschauliche Erklärung von Phänomenen eine entscheidende Rolle. Dabei werden häufig Anschauungsartefakte eingesetzt, wie zum Beispiel masselose Bällchen, Energiebällen, Kugelmodelle und anderes mehr. Diese Hilfsmittel überwinden den hohen Abstraktionsgrad der Modellierung. Damit kann das Modellverhalten als abgebildetes Wirklichkeitsverhalten häufig besser erklärt werden.

Die Computermodellierung und die Computersimulationen werden durchaus zwiespältig beurteilt, im Folgenden einige Kernpunkte dieser Bewertung:

- Einerseits ermöglichen erst die Rechnerleistungen der Computer, die Modelle der realen Phänomene der Natur komplexer und damit realistischer zu gestalten, andererseits sind diese Modelle durch rechnererzeugte Eigenschaften geprägt (z. B. das Raum-Zeit-Gitter), deshalb gibt es bei diesen Computermodellen hin und wieder größere Probleme, zum Beispiel Instabilitäten, Einfluß der Ungenauigkeiten und anderes mehr.

Ein Beispiel dafür möchte ich Ihnen aus der numerischen Strömungsakustik kurz schildern: Bei der Schallerzeugung durch Strömungen, zum Beispiel beim Abgasstrahl eines Flugzeugtriebwerkes, ist die ins Fernfeld abgestrahlte Schalleistung sehr viel kleiner als die eigentliche Strömungsleistung. Da aber die Strömung die Schallquelle ist, muß diese Strömung mit sehr hoher Genauigkeit berechnet werden, um die um Größenordnungen kleinere Schalleistung einigermaßen genau erfassen zu können. Wird dies nicht erreicht, so äußern sich die Ungenauigkeiten der numerischen Berechnung der Strömung als akustische

Quellmechanismen. Das heißt, das Rechenverfahren selbst erzeugt unphysikalischen Schall, man spricht vom sogenannten „numerischen Lärm“. Scherzhaft ausgedrückt: Die Rechenmethode ist lauter als die Strömung selbst (nach Crighton). Hier schafft der Computer also neue Realitäten!

- Computersimulationen erfordern die ständige Entwicklung und Pflege der Computertechnik, der Programmierung, der Algorithmen, und der zweckmäßigen Visualisierungsmöglichkeiten. Besonders mit der sinnvollen Aufbereitung und Darstellung der Ergebnisse muß man der „neuen Unübersichtlichkeit“, dem „Datenfriedhof“, der durch die Computersimulationen geschaffen wird, entgegenwirken. Dabei hat man häufig den Eindruck, daß diese zahlreichen Computerprobleme das eigentlich zu lösende Problem sind und nicht das „traditionelle“ wissenschaftliche Problem, also die Untersuchung des modellierten physikalisch-technischen Vorganges der Realität.
- Schließlich besteht der Eindruck, daß bei Computermodellierungen und der Visualisierung der Ergebnisse meist eine große Euphorie besteht, die Wirklichkeit direkt und genau abbilden zu können. Bei zahlreichen Beispielen sind jedoch die gegenwärtig prognostischen Qualitäten und die Genauigkeiten quantitativer Aussagen eher noch bescheiden und keinesfalls so, wie der Einsatz von Computern sowie die Modellierungs- und Simulationsfreaks uns dies glauben machen wollen.
- Bei der Computermodellierung und den Computersimulationen sind zwar Validierungen oder zumindest Verifizierungen entscheidend für das weitere Vorgehen, sie werden aber meist nur dürftig abgehandelt.

Im Folgenden sollen einige Aspekte der Computermodellierung und der Computersimulationen in der Raumakustik erläutert werden.

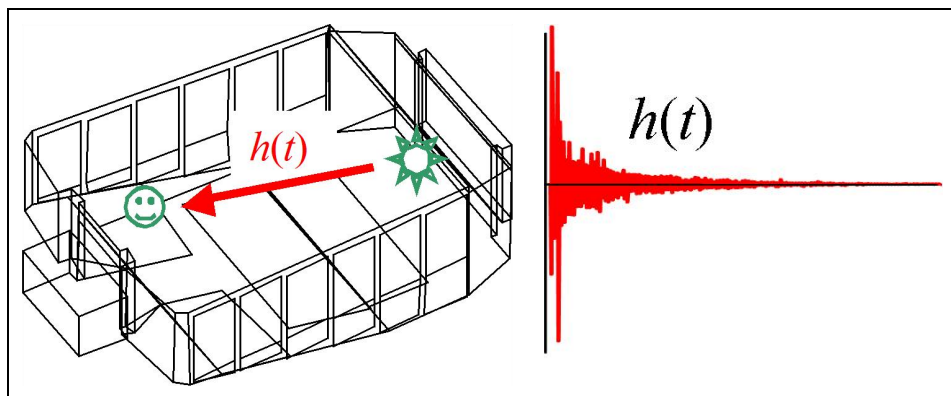


Abbildung 23  
Computermodellierung in der Raumakustik (nach Vorländer)

In Abbildung 23 ist links die Schallausbreitung im Raum von der Quelle zum Empfänger symbolisch dargestellt. Der Raum wird als akustisches System behandelt. Am Quellort wird ein Schallimpuls ausgesendet, der beim Empfänger registriert wird. Diese Impulsantwort  $h(t)$ , im rechten Bild dargestellt, enthält alle akustisch relevanten Informationen des Raumes. Die Schallausbreitung in Räumen kann durch derartige Impulsantworten beschrieben werden. Aus den Impulsantworten werden die raumakustischen Kriterien für jeden Hörerplatz ermittelt.

Computermodellierungen für Schallausbreitungsvorgänge in Räumen gehen davon aus, daß sich die Schallenergie im Raum in Form von Schallstrahlen geradlinig ausbreitet.

Die zwei wichtigsten raumakustischen Rechenverfahren sind das Verfahren mit Spiegelschallquellen und das Schallteilchen-Verfahren.

Beim *Spiegelschallquellenverfahren* werden die Schallreflexionsvorgänge mit Hilfe von Spiegelschallquellen dargestellt. Der Computer erfaßt an jedem ausgewählten Hörerplatz die Beiträge aller Reflexionen, und zwar die Intensität und die Einfallsrichtung. Das Spiegelschallquellenverfahren ist ein deterministisches Verfahren.

Dagegen ist das *Verfahren mit Schallteilchen* eine statistische Methode (siehe Abb. 24). Von der Schallquelle wird mit einer „Schallteilchenkanone“ eine große Anzahl von Teilchen als punktförmige Schallenergeträger ausgeschiedet. Bei der Reflexion an den Raumbegrenzungsflächen wird die Schallabsorption berücksichtigt. Die Publikumsfläche wird in Detektorfelder, das heißt Platzbereiche, unterteilt, für die im Computer Eintreffzeit, Eintreffrichtung und Energie der Schallteilchen registriert werden. Daraus folgen dann die gewünschten raumakustischen Kriterien. Den Wertebereichen dieser Kriterien werden meist Farben zugeordnet, so daß sich die akustische Qualität der verschiedenen Platzbereiche eines Saales durch diese Art der Visualisierung sehr anschaulich darstellen läßt. Ein Beispiel dafür wird in Abbildung 25 gezeigt.

Im Ergebnis einer Computermodellierung und -simulation wurde für einen Konzertsaal für jeden Platzbereich das sogenannte Klarheitsmaß  $C_{80}$  berechnet. Dieses Maß beinhaltet die eintreffende Schallenergie in den ersten 80 ms im Verhältnis zur danach eintreffenden Schallenergie. Das Klarheitsmaß charakterisiert (nach Ahnert) die zeitliche und klangliche Differenzierbarkeit der einzelnen Teilschallquellen innerhalb eines komplexen Schallereignisses. Als optimaler Bereich für diese Größe wird zum Beispiel von Fasold ein Wertebereich von  $-1$  dB bis  $+3$  dB angegeben, also hier in Abbildung 25 der grüne Bereich.

Mit dem Verfahren der raumakustischen Computermodellierung und Computersimulation kann am Rechner die virtuelle Akustik des Raumes durchgespielt werden: dabei können geometrische und akustische Details variiert werden, zum Beispiel der Einfluß zusätzlicher Reflektoren, die Aufgliederung der Seitenwände, der Einbau abgehängter Decken. Damit ist es möglich, den Architektenentwurf eines Raumes einer raumakustischen Simulation zu unterwerfen und damit im Entwurfstadium am Modell die akustische Qualität des Raumes zu optimieren.

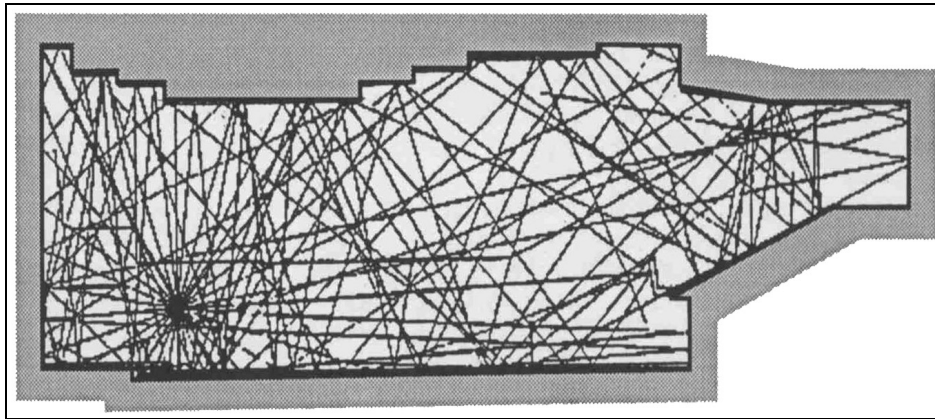


Abbildung 24  
Schallteilchen-Verfahren der Computermodellierung in der Raumakustik (nach Stephenson)

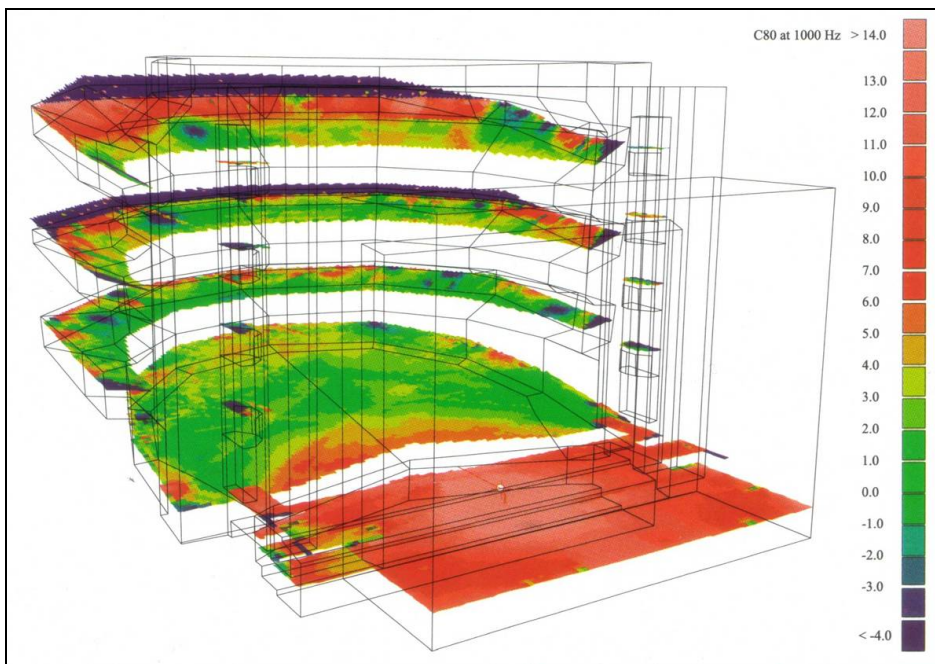


Abbildung 25  
Ergebnis einer Computermodellierung und Simulation (nach Odeon & Rindel)

Die Anwendung der Computermodellierung in der Raumakustik wird zur Zeit folgendermaßen eingeschätzt:

- Die Resultate sind rascher verfügbar als die von experimentellen Modelluntersuchungen.
- Mit genügendem Aufwand und unter Nutzung von Kombinationsmöglichkeiten verschiedener Rechenverfahren sind ausreichend genaue und verlässliche Ergebnisse erreichbar.
- Es ist möglich, auf der Basis der Ergebnisse der Computermodellierung in den Saal „hineinzuhören“, ohne daß dieser tatsächlich existiert. Dieser Vorgang wird als Auralisation, das heißt Hörbarmachung, bezeichnet. Dabei werden im Rechner die mit den Außenohrübertragungsfunktionen behandelten Raumimpulsantworten mit einer trockenen, das heißt möglichst nachhallarmen Musik- oder Sprachaufnahme gekoppelt. Das entsprechende Ausgangssignal entspricht in guter Näherung dem Höreindruck am betreffenden Platz im Auditorium (Fasold & Veres). Damit kann der zu erwartende Klangeindruck vorab beurteilt werden. Im Sinne der oben genannten Modellierungsvarianten wird also hier an die physikalisch-mathematische Modellierung und die Computermodellierung nunmehr in Form der Auralisation noch die Funktionsmodellierung angehängt.

Es sollen hier noch die vier konkreten Modellierungsarten in der Raumakustik vergleichend eingeschätzt werden (siehe Abb. 26):

- Die Modellierung mit der physikalisch analogen Modelltechnik in der Wasserwanne ist historisch und modellmethodisch interessant, aber heute für technische Lösungen überholt und damit bedeutungslos.
- Das synthetische Schallfeld im schalltoten Raum ist für wissenschaftliche Untersuchungen und für psychoakustische Beurteilungen von Feinheiten des Raumschallfeldes von großer Bedeutung.
- Praktisch werden für raumakustische Vorhersagen vorrangig Computermodellierungen und in komplizierten Fällen auch gegenständliche, physikalisch ähnliche Modelle verwendet.

Computermodellierungen und Computersimulationen sind nach Fasold in der Anfangsphase der Planung eines Auditoriums das geeignetere Verfahren, um möglichst rasch grundsätzliche Entscheidungen zur „Primärstruktur“ des Raumes, gemeinsam mit dem Architekten, fällen zu können. Details zur „Sekundärstruktur“ des Raumes dagegen können (heute noch) akustisch treffsicherer mit der Methode der Modellmeßtechnik gefunden werden. Für die Planung größerer Auditorien bietet der komplexe und kombinierte Einsatz der Computermodellierung und der raumakustischen Modellmeßtechnik große Vorteile und gewährleistet eine hohe Planungssicherheit hinsichtlich der „guten Akustik“ des Raumes.

An dieser Stelle sollen noch einige Bemerkungen zur *Computermodellierung in der Strömungsmechanik und Aeroakustik* angeschlossen werden.

Vier Modellierungsvarianten:

Experimentelle raumakustische Modellmesstechnik:  
mit physikalisch ähnlichen Modellen und Auralisation

Experimentelle raumakustische Modellmesstechnik:  
mit physikalisch analogen Modellen

Computersimulation mit dreidimensionalen Raum-  
modellen und Auralisation

Synthetisches Schallfeld im schalltoten Raum als  
Funktionsmodellschallfeld eines Konzertsaaes

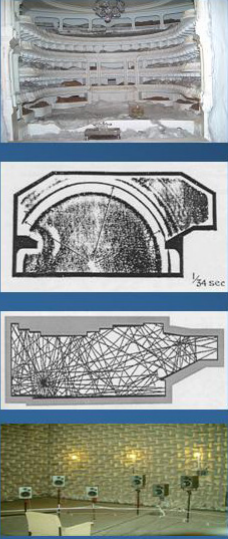


Abbildung 26  
Vergleich der Modellierungen in der Raumakustik

Als die Geburtsstunde der Computermodellierung und Computersimulation in der Strömungsmechanik wird der Vortrag von John von Neumann im Juni 1945 zum Thema „High-Speed Computing Devices and Mathematical Analysis“ betrachtet, in welchem er erstmalig von der numerischen Hydrodynamik als einem Schwerpunktgebiet zukünftiger Forschung sprach, auszuführen auf elektronischen Digitalrechnern. Er schlug vor, die analytischen durch numerische Methoden zu ersetzen und die Entwicklung der Digitalrechner und ihre Nutzung zu fördern. (nach W. E. Nagel). Das Ziel J. v. Neumanns war der digitale, der numerische Windkanal.

Aus meinem spezielleren Fachgebiet der Strömungsakustik will ich Ihnen ein Beispiel zur Computermodellierung beim Vorgang der Schallerzeugung durch Strömungen vortragen.

Da gibt es zunächst die Vision der *direkten numerischen Simulation*, das heißt, die zuständigen Strömungsgleichungen werden mit Hilfe der Computermodellierung direkt gelöst. Das ist mit den heute zur Verfügung stehenden Computern noch auf relativ niedrige Geschwindigkeiten, einfache Strömungsgeometrien und räumlich begrenzte Strömungsgebiete beschränkt. Deshalb werden gegenwärtig weitestgehend *Hybridverfahren* praktiziert. Bei diesen Verfahren werden zur Berechnung des Schallfeldes Modelle der Strömung und des Schallfeldes miteinander kombiniert.

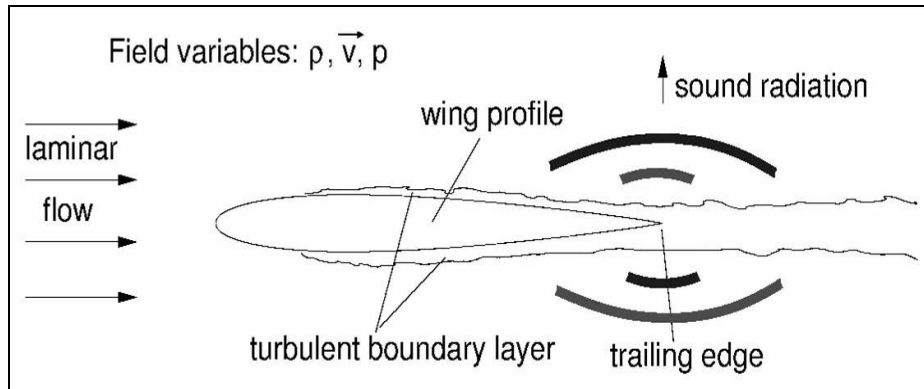


Abbildung 27  
Prinzipbild für den Hinterkantenlärm (nach Brooks)

Als Beispiel sei hier der Hinterkantenlärm von einer umströmten Strebe (als Modell für einen Flugzeugtragflügel) dargestellt.

Das Bild zeigt die Umströmung eines Profils und die Schallabstrahlung der Turbulenz, der Wirbel, an der Hinterkante. Dieser Modellvorgang wird nun weiter geometrisch-physikalisch-mathematisch modelliert, um die Schallabstrahlung von der Hinterkante des überströmten Profils berechnen zu können. Der Tragflügel wird zunächst geometrisch als Platte abgebildet, die Mach-Zahl der Strömung ist relativ klein.

Für die physikalisch-mathematische Modellierung werden die Navier-Stokes-Gleichungen, ihre Reynolds-gemittelte Form, die Euler-Gleichungen sowie Bausteine und Verfahren der numerischen Strömungsmechanik (CFD: Computational Fluid Dynamics), der stochastischen Quellmodellierung (SNGR: Stochastic Noise Generation and Radiation) und der numerischen Aeroakustik (CAA: Computational Aeroacoustics) verwendet, die zum Teil mit dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, entwickelt und realisiert worden sind.

Die Visualisierung in Abbildung 28 zeigt die turbulenten Wechseldrücke und die abgestrahlten Schallwellen. Die Darstellung ist ein Abbild der geometrischen, physikalischen, mathematischen und optischen Modellierung des realen Vorganges der Schallerzeugung und Schallabstrahlung bei der Hinterkante eines überströmten Profils. Die sehr anschauliche Darstellung sagt jedoch nichts über den Wahrheitsgehalt dieser multiplen Modellierung aus; diese Validierung ist einzig und allein nur durch das Experiment im aeroakustischen Windkanal möglich!



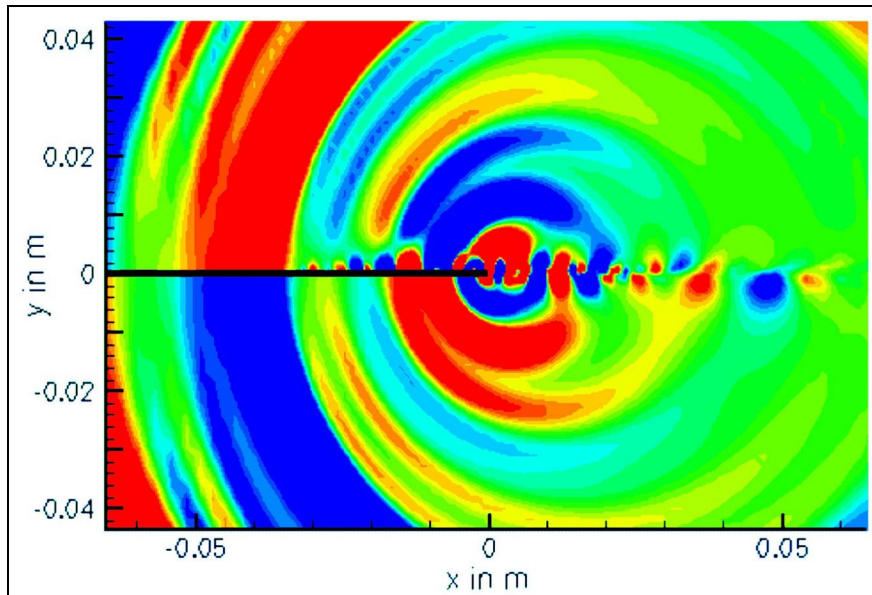


Abbildung 28

Numerische Berechnung des Hinterkantenlärms an der überströmten Platte (nach Bauer)

Zum Abschluß dieser Ausführungen zur Computermodellierung sollen auch hier einige Verallgemeinerungen zu dieser Art der Modellierung formuliert werden.

- Es handelt sich um ein physikalisch-mathematisches Modell der Wirklichkeit, das durch mathematische Gleichungen beschrieben wird. Das Computermodell beinhaltet zusätzliche Modellierungsaspekte, zum Beispiel die Raum-Zeit-Diskretisierung, die Visualisierung, die Auralisation.
- Die numerischen Simulationen mit Hilfe des Computermodells schaffen virtuelle Realisationen der Wirklichkeit in der Form der Modellabbildung, die durch Messungen validiert werden müssen.
- Es wird betont, daß der Scharfrichter für die Güte der Computermodellierung einzig und allein das Experiment ist. Bei positivem Ausgang der Validierung können Anwendungen für nicht validierte Fälle und für Prognosen gewagt werden.
- Die mit Hilfe der modernen Computertechnik möglichen Visualisierungen üben eine starke Faszination durch die Bildhaftigkeit des Modellvorganges aus (physikalische Vorgänge in farbiger, bewegter Darstellung, siehe die oben gezeigten Schallwellen von der Hinterkante der überströmten Platte bzw. die prognostischen Wetterabläufe im Fernsehen). Das verführt dazu, hinter den Visualisierungen der Modellergebnisse die Wirklichkeit zu sehen.

- Mit den ständig anwachsenden Leistungen der Computer können die Modelle immer wirklichkeitsnäher gestaltet werden. Die modellbedingten Abstraktionen werden damit schrittweise überwunden, die Anschaulichkeit der visualisierten Lösungen wird immer wirklichkeitsnäher.
- Es gibt jedoch auch Nachteile der Computermodellierung: Das sind zum Beispiel die Schwierigkeiten, die durch die numerischen Verfahren selbst erzeugt werden. Außerdem werden häufig unphysikalische Phänomene produziert, das Computermodell schafft dann neue Wirklichkeiten.

### *Zusammenfassung*

Modelle in den Technikwissenschaften werden weitestgehend aus der Wirklichkeit abgeleitet. Sie gehören sowohl zur Kategorie „Modell von etwas“ (Modell als vereinfachter Vertreter der Außenwelt) als auch zur Kategorie „Modell für etwas“ (Modelle als Hilfsmittel auf dem Weg zur Wirklichkeit).

Die Modelle in den Technikwissenschaften sind fast immer funktionsfähige Arbeitsmodelle, das heißt, an ihnen wird experimentiert, simuliert, gemessen. Es gibt in den Technikwissenschaften auch reine Funktionsmodelle, die von der Struktur der Wirklichkeit vollständig entkleidet sind.

Die Modelle in den Technikwissenschaften unterliegen starken Zwangsbedingungen, sowohl für die modellhaft abgebildeten Strukturen, für die Prozeßbedingungen und für den Prozeßablauf, als auch für die Computersimulationen. Das drückt sich in den Bedingungen der physikalischen Ähnlichkeit, der analogen Beziehungen bzw. der mathematischen Abbildung für die physikalische Modellierung aus. Es gibt dabei nur geringe Einflußmöglichkeiten durch die subjektive Gestaltung. Offensichtlich ist aber diese subjektunabhängige Stringenz der Modellbildung der „Preis“ (der gern gezahlt wird!) für die relativ genauen Lösungen der Probleme der Wirklichkeit mit Hilfe der Modellbildung in den Technikwissenschaften.

Als „Richter“ darüber, inwieweit ein Modell die Wirklichkeit nachbildet, entscheidet in den Technikwissenschaften einzig und allein das Experiment, also die meßtechnische Nachprüfung an der Wirklichkeit.

Die Modellbildung in den Technikwissenschaften ist nicht einkanalig. Es gibt zahlreiche, grundsätzlich unterschiedliche Möglichkeiten der Modellbildung, von denen einige in der Vorlesung dargestellt worden sind. Für das Beispiel der Raumakustik des Konzertsaaes sind vier Modellierungsmöglichkeiten und deren Besonderheiten vorgeführt worden. Bei solchen komplexen Problemen ist es meist zweckmäßig, verschiedenartige Möglichkeiten der Modellbildung zu versuchen und die dabei gewonnenen Erkenntnisse kumulativ in die optimale Gestaltung des Gegenstandes oder Prozesses einfließen zu lassen.

Was geschieht in den Technikwissenschaften mit den Modellen?

Modelle dienen in den Technikwissenschaften zum Problemlösen, meist stark verknüpft mit dem Ergründen der physikalischen Vorgänge. Sie dienen vor allem auch der Optimierung von Strukturen und Prozessen. Die starke und konkrete Anwendung der Modelltechnik in den Technikwissenschaften ist sicher auch ein Grund dafür, dass die Lösungen zum Modellproblem außerordentlich vielgestaltig und in jeder Modellierungsart besonders weit entwickelt sind.

Modelle in den Technikwissenschaften schaffen neue Probleme. Sie hängen einerseits mit den Verfahren der Modellbildung zusammen (man denke dabei an die Probleme der Computermodellierung, insbesondere der Realisierung der numerischen Verfahren!), andererseits schaffen die verschiedenartigen Modellbildungen häufig aber auch Aspekte einer „neuen Wirklichkeit“, fernab der Realität des eigentlich zu lösenden Problems. Diese meist nicht gewollten Erscheinungen können zunächst sehr hinderlich sein (z. B. der „numerische erzeugte Lärm“ in der numerischen Aeroakustik); sie erweisen sich aber auch als sehr förderlich bei der Weiterentwicklung der Verfahren der Computermodellierung und -simulation.

### *Schlußbemerkung*

Meine sehr verehrten Damen und Herren, die Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften hat im Vorfeld dieses Vorlesungszyklus über Modelle in den Wissenschaften einige Fragestellungen diskutiert, die eingangs zu dieser Vorlesung genannt worden sind. Einige werden hier wiederholt:

- Sind es Vorstellungen und Bestandteile unserer Lebenswelt, unseres täglichen Umgangs, die wir zur Modellbildung verwenden?
- Wer ist der Richter darüber, daß ein Modell sich dem Ziel der Erkenntnis „angenhert“ hat?
- Was macht die Wissenschaft mit den Modellen?
- Muß die Überwindung der Fesselung bei der Modellierung erkaufte werden durch immer abstraktere, unanschaulichere Modelle?

Sie haben heute die Technikwissenschaften, sofern ich mich als einer ihrer Vertreter bezeichnen darf, in der Diskussion zur Modellproblematik gehört, vor allem mit sehr konkreten Beispielen zur Modellierung, und dabei ist versucht worden, einige dieser genannten Fragestellungen zu beantworten. Ich bin der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften jedenfalls sehr dankbar, daß sie in diese Vorlesungsreihe, in diesen Dialog zur Modellproblematik, neben den Geisteswissenschaften und den Naturwissenschaften auch die Technikwissenschaften eingebunden hat.

Ich hoffe, daß ich mit meinen Ausführungen einige Aspekte aus dem Bereich der Technikwissenschaften zum Diskurs über die Modellproblematik hinzufügen konnte.

### *Nachbemerkung*

Diese Vorlesung stellt einen kurzen Zusammenschritt aus einer einsemestrigen Vorlesung zur „Ähnlichkeitstheorie und Modelltechnik“ dar (pro Woche: 2 Stunden Vorlesung, 1 Stunde Rechenübung, 1 Praktikum), die ich an der TU Bergakademie Freiberg (Sachsen) von 1980 bis 1993 und an der TU Dresden von 1994 bis 2004 gehalten habe. Der Vorlesungsinhalt ist sukzessive mit aktuellen Forschungsergebnissen, Erkenntnissen aus Publikationen und Kongreßbeiträgen sowie mit Beispielen von Fachkollegen ständig umgestaltet und ergänzt worden. Diese übliche Verfahrensweise bringt es mit sich, daß nunmehr in einem solchen Text dieser Vorlesung eine direkte Zuordnung der Erkenntnisse und Beispiele zu den „benutzten“ Autoren und deren Publikationen im Nachhinein in den Details nur lückenhaft möglich ist (Soweit dies rekonstruierbar war, sind die betreffenden Literaturstellen nachstehend aufgeführt.). Von folgenden Autoren habe ich – soweit ich mich erinnern kann – fachliche Anleihen genommen bzw. direkt Bilder verwendet:

W. Ahnert, W. Albring, M. Bauer, T. F. Brooks, M. Chudalla, L. Cremer, D. G. Crighton, R. Dietzel, H. Duddeck, W. Fasold, S. W. Golomb, S. Gruhl (Müller BBM), M. Hackeschmidt, S. Harbrodt, H. v. Helmholtz, H. Hertz, W. J. Kaufmann, G. W. Leibniz, A. Lenk, M. J. Lighthill, E. Lotze, H. Neunzert, G. Pfeifer, R. W. Pohl, Lord Rayleigh, M. Roger, G. Schroth, L. Smarr, H. Stachowiak, M. Stege, U. Stephenson, M. Vorländer und andere

Einige dieser Fachkollegen haben mir direkt das verwendete Material zur Verfügung gestellt; diesen und allen anderen Autoren möchte ich hiermit danken.

Hinsichtlich der Literatur zum Problemkreis „Modelle“ wird insbesondere auf die Zusammenstellung in: [http://www.muellerscience.com/MODELL/Literatur/Lit.Modell\(1450-2001\).htm](http://www.muellerscience.com/MODELL/Literatur/Lit.Modell(1450-2001).htm) verwiesen.

### *Literatur*

- Albring, W.: Helmholtz schuf eine Ähnlichkeitstheorie für Strömungen. In: *Maschinenbau-technik* 15 (1966) 3, S. 113–118.
- Blau, M.: Die akustische Wahrnehmung des Raumes bei Musikdarbietungen: Scheinbare Quellbreite als Subkomponente des Raumeindrucks. In: *Wiss. Z. TU Dresden* 51 (2002) 4–5, S. 119–124.
- Brebeck, D., Spandöck, F. et al.: Akustisch ähnliche Modelle als Hilfsmittel für die Raumakustik. In: *Acustica* 18 (1967), S. 213–226.
- Chudalla, M. et al.: Einrichtung einer Halle zur Untersuchung der Schallausbreitung an verkleinerten Modellen von Straßenbauwerken – Messungen an Modellen von Straßentunneln, Bundesanstalt für Straßenwesen, Bast – AP 94661 / V3, Dezember 1999.
- Cremer, L.: The Second Annual Fairey Lecture (1970): The treatment of fans as black boxes. In: *Journal of Sound and Vibration* 16 (1971) 1, S. 1–15.

- Cremer, L. & M. Hubert: Vorlesung über Technische Akustik, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- Davis, A. H. & G. W. C. Kaye: The acoustics of buildings, London: G. Bell and Sons, Ltd., 1927.
- Fasold, W., Sonntag, E. & H. Winkler: Bau- und Raumakustik, Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1987.
- Fasold, W. & E. Veres: Schallschutz und Raumakustik in der Praxis, Berlin: Verlag für Bauwesen, 1998.
- Gramelsberger, G.: Theorie – Simulation – Experiment. Magisterarbeit an der Universität Augsburg, 1996.
- Hackeschmidt, M.: Strömungstechnik. Ähnlichkeit – Analogie – Modell, Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1972.
- Helmholtz, H. v.: Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. In: Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 26. Juni 1873, S. 501–514.
- Kraak, W.: Der geklonte Raum: Zukunft? Illusion? Vortrag DAGA 98, Zürich 1998, Vortragsband, S. 706–707.
- Loose, S., Heimann, D. & D. Strauch: Dem Krach ein Ende – Wege zum leisen Verkehr. In: DLR-Nachrichten, Sonderheft Verkehr, Dezember 2003, S. 46–53.
- Michel, E.: Hörsamkeit großer Räume, Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1921.
- Nagel, W. E. (Hg.): Partielle Differentialgleichungen, Numerik und Anwendungen, Forschungszentrum Jülich, 1996.
- Pohl, R. W.: Mechanik. Akustik und Wärmelehre, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1959.
- Reichardt, W.: Gute Akustik – aber wie? Berlin: VEB Verlag Technik, 1979.
- Schroeder, M.: Die Akustik von Konzertsälen. In: Physikalische Blätter 55 (1999) 11, S. 47–50.
- Schuring, D. J.: Scale models in engineering, Oxford etc.: Pergamon Press, 1977.
- Szücs, E.: Similitude and modelling, Budapest: Akademiai Kiado, 1980.
- Thomas, M.: Die Vielfalt der Modelle in der Informatik, Universität Potsdam, 2003.
- Thüring, M.: Einführung in die Kognitionspsychologie, Skript zur Vorlesung, TU Berlin, 2003.
- Turek, S.: Numerik in der Strömungsmechanik. In: Physikalische Blätter 52 (1996) 11, S. 1137–1139.
- Wetzler, H.: Kennzahlen der Verfahrenstechnik, Heidelberg: Dr. Alfred Hüthig Verlag, 1985.
- Wright, S. E.: Sound radiation from a lifting rotor generated by asymmetric disk loading. In: Journal of Sound and Vibration 9 (1969) 2, S. 223–240.
- Zierep, J.: Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre, Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1982.
- Zwikker, C. & C. W. Kosten: Sound absorbing materials, New York etc.: Elsevier Publishing Company, Inc., 1949.