XXXV.

J. Chunonis.

De potentiis quibuscunque

Numerorum integrorum ex additione certorum Terminorum seriei naturalis imparium concinnandis.

NUmerorum, sive illi in serie seu progressione naturali, sivè in arithmeticâ, geometricâ vel harmonicâ, vel quavis aliâ considerentur, bene multæ & innumeræ forsan sunt, eæque non inelegantes neque otiosæ planè proprietates. Multarum ejusmodi proprietatum cognitionem aliis acceptam ferimus, cum vero tantum absit ut omnia exhausta sint ut potius multò plura adhuc restent detegenda, liceat Nobis *Numerorum integrorum ab unitate incipientium & in continua serie, naturali ordine constitutorum* quasdam proprietates, quæ ad concinnandas per additionem ex hac serie *omnium numerorum integrorum potentias quasvis* pertinent in medium afferre, prout illæ Nobis eam seriem considerantibus & examinantibus sese obtulerunt.

§. 1 Sit series *numerorum imparium integrorum ab unitate ordine naturali* continue crescentium; Ex hac numeri pares additione unitatis ad quemvis imparium, eliciuntur, ut hoc modo ex hac serie, interpositis paribus jam inventis, *omnes omninò numeri* ordine naturali prodeant, qui *numeri* sunt *primæ potentiæ* seu *latera* horum numerorum.

Series imparium 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13 &c.

$1+1=2. \quad 3+1=4. \quad 5+1=6$ &c.

Quod si hi numeri pares inventi collocentur inter impares, habentur omnes numeri naturales.

§ 2. Notissimum est jam dudum ex ejusmodi serie imparium integrorum omnia *quadrata* seu *potentias secundas* numerorum integrorum ordine naturali sese subsequentium inveniri, addendo semper numerum sequentem numeris præcedentibus omnibus: Sic 1. primus terminus seriei est potentia secunda numeri 1

$1+3$

$1 + 3$ duo primi termini $= 4$, sunt potentia secunda numeri 2.
$1 + 3 + 5 = 9 =$ quadrato numeri 3.
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 =$ quadrato numeri 4.
& sic porrò in infinitum

§. 3. Sed posse etiam ex eâdem serie numerorum imparium omnium numerorum integrorum *reliquas potentias quasvis in infinitum, sive exponentes illarum sint pares, sive impares*, servatâ certâ additionis lege elici, hoc quidem hactenus non est animadversum.

§. 4. Quod ipsum, quâ constanti lege fiat in potentiis quarum exponentes sunt *pares* (ex. gr. $p^4 . p^6 . p^8$. &c. & generaliter p^x, sumendo x pro quovis exponente pari) primo loco in §§ sequentibus indicabimus ac demonstratum dabimus, postmodum etiam ad potentias imparium exponentium (v. gr. $p^3 . p^5 . p^7$. vel generaliter p^z sumendo z pro quolibet exponente impari) in quibus itidem constans sese methodus offert, progressuri.

Theorema I.

Numeri cujuscunq; integri potentia quævis cujus exponens est par, conficitur ex summa terminorum seriei imparium ab unitate incipiendo continuè sumtorum, quorum terminorum numerus est $=$ potentiæ ejusdem *numeri* cujus exponens est *dimidius* quæsitæ.

§. 6. Ad hujus Theorematis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia, quæ supponimus jam cognita.

Lem. I. Si in serie imparium numerus aliquis impar sit y^{mus} ab initio (unitate sumpta pro primo) erit $2y - 1$ valor illius numeri imparis; ut, numerus decimus impar erit $20 - 1 = 19$. numerus centesimus impar, erit $200 - 1 = 199$.

Lem. II Summa numerorum progresſionis arithmeticæ prodit si dimidium summæ ex primo & ultimo termino, multiplicetur per numerum terminorum.

Demon-

Demonstratio Theorematis I.

§. 7. Sint numeri impares quotcunq; continue sumti ab initio seu ab unitate, ita ut multitudo eorum sit potentia aliqua veluti n^e, & erit numerus impar ultimus (*per Lemma* 1.) $2n^e - 1$. Porro numeri impares continue sumti sunt in progressione arithmetica, & Summa numerorum progressionis arithmeticæ habetur si dimidium Summæ ex ultimo & primo, multiplicetur per numerum terminorum (*per Lemma* 2.) primus autem hoc loco est 1, ultimus vero $2n^e - 1$, ergo summa ex primo & ultimo est $2n^e$ cujus dimidium est n^e, quo multiplicato per numerum terminorum qui itidem (*ex Hypothesi*) *est* n^e prodit n^{2e}. Itaque n^{2e} seu potentia quævis cujus exponens est par, est summa imparium continuè inde ab unitate sumtorum, quorum multitudo est n^e seu potentia ejusdem numeri n, sed dimidii exponentis $n^{\frac{2e}{2}} = n^{2e}$ Q. E D.

§. 8. Rem ipsam exemplis quibusdam clariorem reddimus.

(1) In potentiis quartis seu biquadratorum, ubi terminorum ab initio addendorum multitudo est = quadrato numeri cujus biquadratum quæritur, per additionem imparium formandum.

I. Primus terminus Seriei imparium est p^4. seu potentia quarta numeri 1.

$1 + 3 + 5 + 7$ seu quatuor primi termini additi $= 16$ sunt p^4 numeri 2.

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$ primi novem termini additi $= 81$, sunt potentia quarta numeri 3.

Primi sedecim termini additi faciunt potentiam quartam numeri 4.

Primi 25 termini additi faciunt p^4 numeri 5.

Et sic porro de omnibus reliquis.

(2) In potentiis Sextis seu Quadratis Cuborum, ubi terminorum ab initio addendorum numerus æquatur Cubo numeri, cujus potentia sexta quæritur.

I Primus terminus seriei imparium est potentia sexta seu p^6 numeri 1.

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ hoc est octo priores termini additi dabunt $64 = p^6$ numeri 2.

Viginti septem termini primi seriei additi dabunt $729. = p^6$ numeri 3.

64 primi termini additi dabunt $4096 = p^6$ numeri 4.

Et ita porro in infinitum.

(3) Similia exempla pro aliis potentiis paribus dare ſupervacaneum ducimus, ex his enim quæ adduximus patet quomodo procedendum ſit in infinitum.

§. 9. Accedimus nunc ad potentias quarum exponentes ſunt impares (v. gr p^3 p^5. p^7. *&c.* p^z. ſumendo z pro quovis exponente impari in infinitum) quas ex ſerie imparium numerorum certa & conſtanti Lege per additionem conficere docebimus.

Theorema II.

§. 10. Singulorum numerorum naturalium integrorum *potentia qualibet cujus exponens eſt impar* (v. g. n^z ſumendo n pro numero quolibet cujus potentia impar z quæritur) conficitur ex additione certorum terminorum Seriei imparium qui ſe ſe continuè ſubſequuntur, quos *producentes* nominamus, quorum multitudo eſt ſemper æqualis $n^{\frac{z-1}{2}}$. Cum vero illi *termini addendi non ſumantur ab initio* ſeriei uti fit in potentiis parium exponentium, verùm *omiſſo certo terminorum præcedentium numero vel multitudine*; hos terminos *omittendos*, *qui duplicis ſunt generis* ſequentibus *duabus formulis* generalibus determinamus. 1. *Omittuntur* omnes termini *producentes*, *ex quibus* ſimili additione, ſimiles potentiæ z numerorum omninò omnium integrorum dato n minorum (nempe 1^z, 2^z, 3^z, 4^z &c. $\overline{n-1}^z$) ea ratione quam jam explicuimus emerſerunt, quorum terminorum itaque multitudo (ſi n. e gr. ſumatur $= 6$) eſt æqualis $\left(1^{\frac{z-1}{2}} + 2^{\frac{z-1}{2}} + 3^{\frac{z-1}{2}} + 4^{\frac{z-1}{2}} + \overline{n-1}^{\frac{z-1}{2}}\right)$

2. *Omittuntur etiam* certi termini quos *ocioſos* vocamus, quoniam nec in concinnandâ potentiâ dati numeri n nec in ullius alterius datô n minoris vel majoris numeri potentiâ ſimili producendâ adhibentur, ſed ante terminos producentes tam ipſius n^z quàm ſimilium potentiarum numerorum omnium dato n minorum *alternatim expungendi* ſunt, e. gr. *a*. *b* *c* *d* *&c.* in formula ſequenti, *a*, $1^{\frac{z-1}{2}}$, *b*, $2^{\frac{z-1}{2}}$, *c*, $3^{\frac{z-1}{2}}$, *d*, $4^{\frac{z-1}{2}}$, *&c.* Conficitur vero numerus ſeu multitudo terminorum alternatim ocioſorum ſeu expungendorum *ex ſerie triangularium* incipiente per Ziphram (0. 1. 3. 6. 10. *&c.* cujus ſe-

jus seriei termini, *multiplicandi sunt* ordine singuli per singulos alterius seriei, ex cujus terminorum continuâ additione ad omnes præcedentes fiunt numerorum naturalium potentiæ quorum exponens est $\frac{z-3}{2}$ seu *unitate minor exponente* $\frac{z-1}{2}$ *producentium.*

Exemplis rem clariorem reddemus & loco demonstrationis, quæ prolixior futura esset, nunc quidem ad inductionem provocamus.

§. 11. Exemplum 1. *Pro Cubis* seu *potentiis tertiis* ubi exponens $z=3$. Hic terminorum *otiosorum* alternatim expungendorum *multitudo* fit ex *triangularibus* (0. 1. 3. 6. 10, &c. multiplicatis (hoc est in hoc casu destructis) per *seriem* ex cujus additione fiunt potentiæ quorum exponens est $\frac{3-3}{2} = \frac{0}{2} = 0$ quæ series est nulla, nam potentia cujus exponens est 0 est unitas, jam series ex cujus additione fiant unitates nulla datur, adeoque *hic nulli sunt otiosi* sed termini addendi pro concinnandis potentiis tertiis omnium numerorum naturalium sese subsequuntur omnes in continua serie, *multitudo* verò terminorum *addendorum* semper est $=n$ secundum formulam $n^{\frac{z-1}{2}} = n^{\frac{3-1}{2}} = n^1 = n$

Unde.

Si $n=1$ Primus terminus producens seriei imparium $=1$, est cubus numeri 1

Si $n=2$ Duo sequentes termini additi $3+5=8$, faciunt cubum numeri 2

Si $n=3$ Tres postea sequentes additi. $7+9+11=27$, Cubo numeri 3

Si $n=4$ Quatuor postea sequentes additi. $13+15+17+19=64$, cubo numeri 4

Si $n=5$ Quinque post hos sequentes, additi, $21+23+25+27+29=125$, cubo numeri 5

Et sic porrò in infinitum, ita, ut pro cubo cujuslibet numeri dati addantur tot termini quod numerus datus continet unitates hoc est $n^{\frac{z-1}{2}} = n^{\frac{3-1}{2}} = n^1 = n$, *omissis producentibus præcedentibus* ad numerorum minorum similes potentias jam adhibitis.

§. 12.

§. 12. Ex: 2. Pro *Surſolidis* ſeu potentiis quintis ubi $z = 5$. Numerus terminorum *ocioſorum* fit ex triangularibus multiplicatis per ſeriem ex cujus terminorum additione fiunt *potentiæ primæ* ſeu ipſi numeri naturales, nam $\frac{z-3}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$, exponenti primæ potentiæ

Triangulares - - -	0.	1.	3.	6.	10.	15,	&c.
Series ex qua fiunt Potentiæ primæ ſeu Numeri naturales - -	1	1	1	1	1	1	&c.
Numerus terminorum aut multitudo Alternatim ocioſorum -	0	1	3	6	10	15	&c. qui ſunt ipſi triangulares.

Numerus vero terminorum *producentium* eſt $= n^{\frac{z-1}{2}} = n^{\frac{5-1}{2}}$ ſeu procedit ſecundum numeros quadratos ex. gr.

Terminus ocioſus ante primum producentem eſt $= 0$

Primus Terminus producens ſeriei imparium $= 1$, ſurſolido numeri 1

Unus terminis ſequens ſeriei $= 3$, erit otioſus

4. Termini ſequentes additi, $5 + 7 + 9 + 11 = 32$, ſurſolido numeri 2

Tres Termini ſequentes (13. 15. 17.) erunt ocioſi.

9. Termini ſequentes additi, $19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 = 243$ ſurſolido numeri 3

Sex Termini ſequentes ſunt ocioſi (37. 39. 41. 43. 45. 47.)

16. Termini ſequentes additi $49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 = 1024$ ſurſolido numeri 4

Et ſic porro in infinitum

§. 13. Exemplum 3. Pro *ſeptimis potentiis* ubi exponens $z = 7$ & terminorum producentium numerus eſt ſucceſſivè æqualis potentiis, quorum exponens eſt $\frac{z-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$ ſeu cubis.

Terminorum vero alternatim ocioſorum numerus fit ex triangularibus mulbus multiplicatis per seriem ex cujus terminis additis fiunt potentiæ quorum exponens est $\frac{z-3}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$ seu quadratorum,

Triangulares - -	0.	1.	3.	6.	10	&c.	
Series ex qua fiunt quadrata - -	1.	3.	5.	7.	9	&c.	
Multiplicando producuntur ociosi - -	0	3	15	42	90	&c.	ex. gr.

Terminus ociosus ante primum producentem (prout semper) est $= 0$

1 Terminus primus producens seriei imparium $= 1$ est p^7 numeri 1

3 Termini sequentes ociosi (3. 5. 7.)

8 Termini sequentes additi $9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 128 = p^7$ numeri 2

15 Termini sequentes à 25 ad 53, ociosi.

27 Termini sequentes additi à 55 ad $107 = 2187$ potentiæ septimæ numeri 3

42 Termini sequentes à 109 ad 191 sunt ociosi.

64 Termini sequentes additi, à 193 ad 319, $= 16384$ p^7 numeri 4

10 Termini sequentes à 321 ad 499 sunt ociosi

125 Termini sequentes additi a 501 ad $749 = 78125$ p^7 numeri 5

Et sic porro in infinitum

§. 14. Exemplum 4. Pro *Nonis potentiis* ubi exponens $z = 9$ In hac *addendi* sumuntur ex formulâ consueta generali cujus exponens $= n^{\frac{z-1}{2}} = n^4$ adeoque sequuntur numeros potentiæ quartæ

Otiosi vero sumuntur ex formulâ generali cujus exponens $= \frac{z-3}{2} = 3$ hoc est sequuntur Δlares multiplicatos per seriem ex qua fiunt cubi.

Triangulares - -	0.	1.	3.	6.	10.	15	&c.
Series pro cubis -	1.	7.	19.	37.	61.	91	&c.
Multiplicando prodit series ociosorum -	0.	7.	57.	222.	610.	1395.	&c.

 Ex. gr.

Ex. gr.

Terminus ociosus ante primum producentem, prout semper est $= 0$

Primus Terminus seriei $= 1$ est potentia nona numeri 1

7 Termini sequentes ociosi

16 Termini sequentes additi dant p^9 numeri 2

57 Sequentes ociosi

81 Termini sequentes additi dant p^9 numeri 3

Et sic porrò in infinitum

§. 15. Exemplum 5. Pro Potentiis *Decimis Septimis* ubi exponens $z = 17$ & Termini *addendi* sequuntur formulam solitam $n^{\frac{z-1}{2}} = n^3$

seu potentias octavas, *ociosi* vero sequuntur numeros triangulares multiplicatos ordine (ex formula $\frac{z-3}{2} = 7$) per numeros seriei ex qua fiunt potentiæ septimæ, quorum exponens (ut in omnibus aliis potentiis producendis) est unitate minor exponente potentiarum secundum quas numerantur termini producentes

Itaque

Terminus ociosus ante primum producentem est $= 0$.

Primus Terminus producens seriei imparium $= 1 = p^{17}$ numeri 1

127 Sequentes termini sunt ociosi.

256 Sequentes termini additi sunt producentes p^{17} numeri 2

6177 Sequentes termini rursus sunt ociosi.

6561 Sequentes termini additi dabunt p^{17} numeri 3

85182 Sequentes termini ociosi.

65536 Sequentes termini additi $= p^{17}$ numeri 4

617410 Sequentes ociosi.

390625 Sequentes termini additi $= p^{17}$ numeri 5

3027165 Sequentes ociosi.

1679616 Termini sequentes additi $= p^{17}$ numeri 6

11415747 Sequentes ociosi.

5764801 Termini sequentes additi $= p^{17}$ numeri 7

Ut autem *valorem* hujus potentiæ Decimæ-septimæ numeri alicujus ex gr. 7. inveniamus, addenda est *multitudo terminorum producentium* qui pro similibus potentiis numerorum omnium integrorum

rum, dato minorum, conficiendis adhibentur, nempe 1 + 256 + 6561 + 65536 + 390625 + 1679616 = 2142595

Et huic Summæ addenda *multitudo* terminorum ocioſorum omnium ante producentes potentiæ decimæ ſeptimæ numeri 7. ſeu ante 7^{17}, nempe 0 + 127 + 6177 + 85182 + 617410 + 3027165 + 11415747 quorum ſumma eſt = 15151808

Tum *multitudo* terminorum omnium præcedentium, *Producentium* nempe & *ocioſorum, ante producentes* ex quibus quæritur 7^{17}, prodit. 17294403

Valor autem *termini ultimi* ſeu 17294403^{tii} Secundum. *lemma* 1, §. 6. eſt. 34588805

Ergo *valor proximè ſequentis* termini ſeu *primi addendorum producentium eſt* 34588807.

Et *ultimi termini addendorum producentium* (qui eſt in ordine 23059204^{mus} ſeriei imparium, & invenitur addendo ad 17294403 multitudinem terminorum producentium pro 7^{17} habenda 5764801) *valor* per dictum *lemma* eſt 46118407

Summa valoris primi & ultimi terminorum *producentium* ad 7^{17} obtinendam 80707214

Cujus *dimidium* 40353607

Multiplicatum (Sdm. *lemma* 1. §. 6.) per *multitudinem* ſeu numerum *terminorum producentium.* 5764807

Producit potentiam decimam ſeptimam numeri 7 = 232630513987207.

XXXVI.