# XXXVI.

## *Petr. Dangicourt.*

# De periodis columnarum

in serie numerorum progressionis Arithmeticæ Dyadicè expressorum.

## *Pars Prima.*

## De periodis columnarum in serie numerorum naturalium Diadice expressorum.

### *Cap. I.*

### De designatione Diadica.

DYadica est Arithmetica in qua numerus exprimitur per Notas in eadem linea scriptas, quæ significant numeros rationales integros affirmativos & subintelliguntur multiplicatæ per potentias numeri 2. ordine respondentes, incipiendo a dextra versus sinistram & à potentia infima cujus exponens est 0

Exempli gratia numerus $f\ e\ d\ c\ b\ a$. Significat.

$$f.2^5 + e.2^4 + d.2^3 + c.2^2 + b.2^1 + a\ 2^0$$

$$\text{vel } f.32 + e.16 + d.8 + c.4 + b.2 + a$$

eruntque sedes unitatum, laterum (nempe binariorum), quadratorum (nempe quaternariorum), cuborum (octonariorum), biquadratorum (sedenariorum) &c. *Altior* autem dicetur sedes potentiæ cujus exponens est major.

Et Notæ tales adhibentur ut non possint resolvi in simpliciores notas secundum præscriptam legem

(1) Itaque Nota debet esse minor quam 2.

Nam si nota velut $a$ esset 2 vel major quam 2 & adhiberetur $a.2^e$ posset ex $a$ fieri $2 + b$ (ubi $a$ existente 2 fiet $b = 0$) & $a.2^e$ fieret $2.2^e + b.2^e$ seu $1.2^{e+1} + b.2^e$ ubi si $b$ major quam 2 vel æqualis rursus

rursus resolvi potest; & si bis occurrat eadem potentia ipsius 2, velut $2^m + 2^m$ fit $= 1.\, 2^{m+1}$ itaque $a.\, 2^c$ posset resolvi in simpliciores, contra desideratum.

(2) Nota debet esse o vel 1.

Neque enim datur alius numerus rationalis integer affirmativus minor quam 2 qualis esse debet (*per* 1)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | &c. |
| Significant | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | &c. |

Nam 1000 (per definitionem) $= 1.8 + 0.4 + 0.2 + 0.1$ quod (quia $0.4 = 0$ & $1.8 = 8$) $= 8 + 0 + 0 + 0$ quod (quia $8 + 0 = 8$) $= 8$ idemque est in cæteris.

(4) In sedibus altioribus, altissima unitatem habente, poni potest o vel omitti.

Nam $000dcba = 0\,2^6 + 0\,2^5 + 0\,2^4 + dcba = 0 + 0 + 0 + dcba = dcba$.

(5°) Si numerus sit addendus ad numerum sedes respondentes invicem sunt addendæ.

Scilicet unitates unitatibus, binarii binariis, quaternarii quaternariis &c.

(6) Itaque in additione numerus ita subscribitur numero, ut sedes sedi respondenti subscribatur, veluti

$$\begin{array}{r} 10011 \\ 10110 \end{array}$$

## *Cap. II.*
## De additione unitatis ad numerum.

(7) Si unitas additur ad o mutatur hæc o in 1 in eadem *sede* & nihil transfertur in sedem immediate sequentem, potentiæ scilicet proximæ altioris.

Nam $0 + 1 = 1$, itaque $\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$

(8) Si unitas additur ad 1, mutatur hæc 1 in o in eadem sede & ex hac nota o *transfertur* 1 in sedem immediate sequentem, scilicet ibi addi debet.

Nam $1 + 1 = 2 = 2^1$ quod est (*per definitionem*) $b.2 + a.2^0 + 0 = 1.2 + 0.1$ id est Dyadica expressione 10, nempe

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

(9) Si unitas addatur ad notam, mutatur nota in oppositam in eadem sede, & similis 1. additur in sede immediate sequente. Nam nota non est nisi 0 vel 1 (*per* 2) jam si unitas addatur ad 0, ex 0 fit 1 in eadem sede, & in sequentem transfertur 0 (*per* 7) sin unitas addatur ad 1, tunc ex 1 fit 0 in eadem sede & 1 transfertur in sequentem (*per* 8.) notas autem 0 & 1 vocamus oppositas, itaque si ponamus $b$ oppositam ipsi $a$ fiet

$$\begin{array}{r} a \\ 1 \\ \hline ab \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ \hline 01 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

(10) Si numerus sit augendus unitate, numerus novus ita differt a priore, ut notæ sequentes primam 0 maneant omnes, cœteræ mutentur in oppositas.
Nam si prima nota 0, sit nota prima omnino, neque præcedatur per unitates, sola mutabitur, & erit operatio

$$\begin{array}{r} cba0 \\ 1 \\ \hline cba1 \end{array}$$

Sin præcedatur per unitates & ipsa mutabitur, & notæ quæ eam præcedunt, & erit (*per* 8.) operatio talis

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} c & b & a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & . & . & . & . & . & 1 \\ \hline c & b & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Scilicet 1 + 1 est 10, scribe 0 in eadem sede & transfer 1 in proxime sequentem quod designatur puncto subnotato; rursus in secunda sede unitas puncto designata addatur ad unitatem jam ibi existentem scribetur 0 in eadem sede & unitas puncto transfertur in sequentem nempe tertiam & ita continuabitur donec puncto designetur addenda unitas in sede ubi jam amplius nulla est unitas id est ubi (*per* [illegible]) poni intelligitur 0 cui cum additur 1 (*per* 7) dat 1 in ea sede, nec quicquam ideo mutatur in sequentibus sedibus.

# Cap. III.

## De tabula numerorum naturalium Diadica.

TAbula ſeriei numerorum naturalium eſt quæ ſequitur, quemadmodum demonſtrabitur infra Cap. 5.

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 10 | 2 |
| 11 | 3 |
| 100 | 4 |
| 101 | 5 |
| 110 | 6 |
| 111 | 7 |
| 1000 | 8 |

Eadem tabula continuata, columnis interſlincta & in locis vacuis ſuppleta per aſcriptas (*ſecundum* 4) notas 0, erit

| | |
|---|---|
| 0000 | 0 |
| 0001 | 1 |
| 0010 | 2 |
| 0011 | 3 |
| 0100 | 4 |
| 0101 | 5 |
| 0110 | 6 |
| 0111 | 7 |
| 1000 | 8 |

Si numeri integri minoribus proxime majores immediate ſubjiciantur incipiendo à 0, 1 & ita pergendo per 2. 3. 4. &c. idque aliquamdiu continuetur, addendo ſemper unitatem noviſſimo numero ad producendum numerum ſequentem, fit *ſeries*, quæ vocatur numerorum naturalium; quodſi exprimantur Dyadice, & ita ordine major minori ſubſcribatur ut notæ ejusdem ſedis in eadem linea recta collocentur, nempe notæ unitatum in eadem linea, ſimiliterque notæ binariorum in eadem linea itidemq; quaternariorum &c. ita ut lineæ pagina erecta ſint verticales atq; adeo parallelæ inter ſe, quemadmodum factum eſt in tabula adjecta: Tum his poſitis, notæ ejusdem ſedis dicentur componere *columnam*, eritque prima a dextris columna unitatum, proxima binariorum, tertia quaternariorum, quarta, octonariorum, & ita porro. Atque ita numerus ordinalis columnæ unitate excedit exponentem potentiæ à 2 cujus eſt ſedes, & quævis columna continebit notas ſedis ſibi reſpondentis cujusq; numeri tabulam ingredientis, nempe columna prima omnes primas numerorum quorumcunq; notas. Columna ſecunda omnes ſecundas, & ita porro, itaque & quævis columna incipiet a ſede reſpondente numeri tabulæ primi. Is autem eſt o vel quod idem eſt (*per* 4) oo aut ooo aut oooo &c. itaq; ſedes numeri primi quælibet habet notam o. unde & conſequens eſt quamvis columnam incipere à nota o. Nota autem in columna immediate datam notam præcedens dicetur proxime *ſuperior*, & proxime ſequens dicetur proxime *inferior*, quævis autem columna propriam conſtituit ſuarum notarum ſeriem, eamque periodicam, ut mox patebit.

Seriei partes dicentur *intervalla*, & *æquales* ſunt partes cum æqualis eſt numerus terminorum ſeriei eam componentium. Periodi ſunt intervalla æqualia, inter ſe ſimilia, ſeu eosdem eodem ordine terminos habentia, ſe immediate excipientia, & *ſeries* dicitur *periodica* quæ ex periodis conſtat ſive omnino ut *abcd. abcd abcd &c. &c.* ſive poſt aliquot terminos demtos, velut *abcdef. cdef. cdef. cdef.* &c. Etſi autem in hac ſerie periodus non tantum aſſumi posſit *cdef* ſed & *defc* vel *efcd* vel *fcde*, nam quodlibet horum intervallorum continue redit. Solet tamen aſſumi *periodus quam proxime ad initium ſeriei*, & ita omisſis *ab* fiet periodus *cdef*. Si periodus habeat numerum terminorum parem, dividi poteſt in duo intervalla æqualia, quæ dicentur *ſemiperiodi* Columna quævis ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum non alios habet terminos quam ipſas notas dyadicas o vel 1 & reperietur eſſe ſeries periodica, periodus autem in illis incipit ſtatim ab initio ſeriei, & quævis periodus ejus conſtat ex duabus ſemiperiodis *notarum oppoſitarum* ita ut notæ o una medietate reſpondeant eodem ordine notæ 1 in alia medietate, vel contra. Veluti ſi periodus eſſet 00001111, ita prima nota intervalli ſeu ſemiperiodi prioris opponetur notæ primæ ſemiperiodi poſterioris, ſecunda ſecundæ, tertia tertiæ, &c. Idem eſt, ſi ſit periodus 01, 0101, etſi tales periodi, ubi o & 1 permiſcentur, in columnis ſeriei numerorum naturalium non occurrant. Hæc in anteceſſum notamus, ut intelligantur vocabula & phraſes quibus in progreſſu utemur; rem autem ſe ſic habere mox demonſtrabitur.

Cap. IV.

## Cap. IV.

# De columna prima & secunda tabulæ numerorum naturalium Dyadicæ.

(11) Nota quævis sequens primæ columnæ formatur per unitatem additam ad notam proxime superiorem.

| | | |
|---|---|---|
| F | . . . . . | *a* |
| G | . . . . . | *b'* |
| H | . . . . . | *a'* |

Nam nota quævis primæ columnæ velut *b* formatur per formationem sui numeri. Numerus autem sequens G formatur per additionem unitatis ad numerum præcedentem F (ex natura seriei naturalium) id est (*per* 5) ad *a* notam unitatum in ipso, quæ est nota primæ columnæ (*per designationem dyadicam*) & proinde est proxime superior. Nota *b* formanda in prima columna. Hæc ergo nota formatur per additionem unitatis ad proxime superiorem *a* .

(12) In prima columna notæ 0 & 1 alternant

| | | |
|---|---|---|
| a | 0 | 1 |
| b' | 1' | 0' |
| à' | 0' | 1' |

Nam nota primæ columnæ quævis (præter omnium primam) velut *b* formatur per 1 additam ad notam proxime superiorem *a*. Itaque (*per* 9) *b* est opposita ipsi *a* & eodem modo ex *b* addita 1 formatur opposita ipsi *b* nempe (*ex hypothesi*) *a*, alternant ergo *a* & *b*, id est, (*per* 2) 0 & 1 vel 1 & 0

(13) Periodus primam columnam Tabulæ numerorum naturalium dyadice expressorum constituens est 0 1

Nam ubique in ea alternant 0 & 1 (*per præcedentem*) & 0 est prima omnium primæ columnæ notarum, quia primus numerus in serie naturalium est 0, cujus nota primæ sedis est 0 itaque periodus incipit à 0, & fit 0 1

(14) Periodus primæ columnæ constat ex duabus semiperiodis oppositis

Nam constat 0 1 ex 0 & 1 quarum notæ sunt oppositæ

(15) Prima columna nihil transfert ex prima sua periodo in secundam columnam

Nam primus tabulæ numerus est o secundus est 1 qui numeri nullam habent notam sedis secundæ. Itaque nihil transferunt in secundam columnam. His autem absolvitur prima periodus, cum (*per* 13) non sit nisi binorum terminorum

(16) Prima columna transfert unitatem in columnam proxime sequentem ex quaque sua nota o præter primam ⅽ & non ex sua nota 1

| 2 Col. | 1 Col. | 2 Col. | 1 Col | 2 Col. | 1 Col. |
|---|---|---|---|---|---|
| . | a | . | 0 | . | 1 |
| a | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| . | b | 1 | 1 | . | 0 |

Nam primæ columnæ quævis nota o (præter primam) formatur (*per* 11) ex additione unitatis ad notam ejus proxime superiorem non ad o (nam $0 + 1 = 1$) ergo (*per* 2) ad 1 jam $1 + 1 = 10$ (*per* 3) ubi ex o transfertur 1 in columnam secundam. Sed 1. in prima columna non formatur additione ad 1, sed ad o, unde fit 1 (*per* 8) ex quo nihil transfertur.

(17) Prima columna transfert unitatem in secundam ex initio cujusque suæ periodi demtâ periodo prima

Nam (*per* 16) transfert ex quavis o demta prima o, sed quævis o est initium periodi (*per* 13).

(18) Prima columna ex quavis sua periodo post primam transfert primum 1 deinde o in secundam columnam.

Nempe (*per* 16) ex o transfert 1 ex 1 transfert o

(19) Secunda columna tabulæ seriei numerorum Diadice expressorum habet periodum 0 0 1 1

Sit nota quædam columnæ secundæ *b* in numero cujus nota prima seu nota primæ columnæ ipsi *b* respondens sit 1 Ergo (*per* 12) nota proxima inferior primæ columna erit o quæ (*per* 16) transfert unitatem in secundam. Ergo in secunda ad *b* addetur 1 & (*per* 9) fiet opposita *a* inde (*per* 12) sequitur 1 in columna prima quæ (*per* 16) nihil transfert in secundam. Ergo in secunda manet *a* quod jam periodus dictæ columnæ primæ o 1 (*per* 13) fecit in *b* proxime præcedentem secundæ, nempe ut bis produxerit ipsi oppositam *a*, id eodem modo sequens periodus

| 2 Col | 1 Col. |
|---|---|
| b | 1 |
| a | 0' |
| a | 1' |
| b | 0' |
| b | 1' |

facit

faciet in *a* proxime præcedentem, ut bis producat ei oppositam nempe *b* & ita porro; itaque alternant *bb*, *aa* adeoque & 0011 vel 1100 Sed periodus columnæ secundæ incipit à 00 quia duo numeri in serie naturalium primi nempe 0 & 1 vacant in secunda sede Itaque ibi ponitur 0 (*per* 4). Itaque periodus erit 0011.

(20) Periodus Secundæ columnæ constat ex duabus semiperiodis quarum quælibet est notarum similium & notæ unius sunt oppositæ notis alterius

Nam periodus secundæ columnæ 0011 constat ex duabus semiperiodis, 00 & 11 quæ sunt quales diximus.

(21) Periodus secundæ columnæ est dupla periodi columnæ primæ.

Nam Periodus secundæ columnæ est [*per* 19] est 0011. Sed primæ [*per* 13] est 01 Illa notarum quatuor, hæc notarum duarum.

## *Cap. V.*

### De columnis Tabulæ numerorum naturalium in universum.

[22] Quævis columna incipit à 0

Nam cum primus numerus tabulæ sit 0 vacant omnes sedes sequentes in eodem numero seu [*quod idem est per* 4] habent notam 0. Quævis autem columna continet notas sedis respondentis numerorum tabulæ quorumcunque [*per tabulæ constructionem.*] Itaque incipit à *sede* respondente numeri primi, Id est a 0

[23] In columna tabulæ quacunque sequente non fit mutatio nisi quia ex prima transfertur unitas

Nam continuata tabula, seu cum additur 1 immediate fit mutatio in columna prima nempe unitatum [*per* 5] nec in sequentibus nisi per translationem unitatis ex prima.

[24] In columna quacunque sequente non fit mutatio, nisi cum ex proxime præcedente transfertur 1

Nam mutatio fit in sequentibus cum prima transfert in secundam, secunda in tertiam, tertia in quartam & ita porrò. Itaque quævis columna translationem recipit ex proxime præcedente.

[25] In columna sequente non fit mutatio nisi fiat mutatio in omnibus præcedentibus.

Quod

Quod patet ex iisdem.

[26] Columna non transfert nisi ex sua nota o & ea quidem quæ fit addendo 1 ad proxime superiorem 1

Nam hæc sola additio notæ ad notam facit plusquam 1 nempe 10 [*per* 3]. Ubi in prima manet o sed transfertur 1 in columnam sequentem

[27] Continuando tabulam numerorum naturalium, in columnis sequentibus eam quæ prima notam habet o notæ novissimæ permanent in cæteris mutantur in oppositas.

## Pars tabulæ naturalium.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | . | . | . | . | . | . | . | . |
| | . | . | . | . | . | . | . | . |
| | . | . | . | . | . | . | . | . |
| F | c | b | a | o | 1 | 1 | 1 | 1 |
| G | c | b | a | 1 | o | o | o | o |

Nam continuatio tabulæ est additio unitatis ad numerum ultimum F, ut formetur numeres novis G & tam mutatio in columnis tabulæ est eadem quæ mutatio notarum in sedibus numeri ultimi. Porro in numero cui additur 1 permanent [*per* 10] notæ post primam o cæteræ in oppositos mutantur.

[28] Itaque iisdem positis non mutatur nota columnæ sequentis, nisi musat sit quævis nota respondens columnæ præcedentis per additionem unitatis *respondentem* hic intelligo quæ in eundem numerum cadit.

[29] In quavis columna tabulæ sequente tot se sine interruptione consequuntur notæ similes, quot non sunt formatæ per translationem unitatis ex columna eam proxime præcedente.

Nam [*per* 24.] in columna non fit mutatio nisi per hanc translationem

[30] Tabulæ columna in qua ubique alternis se excipiunt [adeoque periodum constituunt] duo intervalla æqualia unum ex meris o alterum ex meris 1 non transfert unitatem ex sua periodo prima

Non ex 1 [*per* 26] non ex o nisi quam proxime præcedit 1 [*per eandem* 26] Sed talis o non est in prima periodo. Quia in prima periodo est prima o. Ea autem [*per* 22] præcedit omnes 1, sed cæteræ o in o in periodo eandem immediate ſequuntur (*ex hypotheſi*) ergo omnes o primæ periodi præcedunt omnem 1 ejusdem.

(31) Columna,qualem deſcripſimus, non transfert unitatem niſi ex prima o periodi ſuæ cujuscunque præter primam.

Ea enim nota o ſola immediate ſequitur notas (*ex hypotheſi*) itaque (*per* 26) ex ea ſola transfertur.

(32) Columna propoſita, qualem deſcripſimus, quot habet notas ſuæ periodi, tot habet notas eis reſpondentes inter ſe ſimiles in columna proxime ſequente.

Columnæ proxime ſequentis nota immediate periodum columnæ propoſitæ præcedens eſto *a*. Ea nota *a*, translatione facta ex o primæ periodi columnæ propoſitæ, (*per* 26) tranſit in oppoſitum *b* reſpondentem eidem *o*, quæ nota *b* reperitur in omnibus locis columnæ dictæ proxime ſequentis reſpondentibus periodo columnæ propoſitæ quia (*per* 26) non ante mutatio fit quam in loco reſpondente primæ *o* periodi ſequentis Itaque omnibus notis periodi columnæ propoſitæ reſpondet *b* in proxime ſequente.

| | |
|---|---|
| a | 1 |
| b | o |
| b | o |
| b | 1 |
| b | 1 |
| b | o |

(33) Columna propoſita, qualem deſcripſimus,habet ſequentem aliam talem, cujus periodus eſt dupla periodi prioris.

Nam (*per* 32) columnæ propoſitæ periodus habet reſpondentem ubique notam *b* in columna proxime ſequente, & rurſus (*per* 32) ejusdem columnæ propoſitæ periodus immediate ſequens habet reſpondentem notam *a* in eadem columna proxime ſequente, ſed *a* eſt oppoſita ipſi *b*, quia (*per* 26) naſcitur ex *b*, addita unitate translata ex prima *o* periodi ſequentis, & proinde (*per* 9) *b* mutatur in oppoſitum *a* & eodem modo poſt ultimam *a* redeunt ipſæ *b*, ut ante. Itaque columna proxime ſequens, habet periodum conſtantem ex duobus intervallis æqualibus, una merarum notarum *b*, altera merarum notarum *a*, poſitarum alternatim, & proinde intervallorum alterum, eſt ex meris *o*, alterum ex meris 1; ſunt autem intervalla duo alternantia æqualia inter ſe, & ita periodum faciunt, quia unumquodque periodo columnæ propoſitæ æquale eſt. Itaque unumquodque eſt ſemiperiodus

| | |
|---|---|
| a | 1 |
| b | o |
| b | o |
| b | 1 |
| b | 1 |
| a | o |
| a | o |
| a | 1 |
| a | 1 |
| l | o |
| &c. | |

riodus columnæ ſuæ, cujus proinde periodus eſt dupla periodi columnæ præcedentis.

(34) Tabulæ numerorum naturalium dyadice expreſſorum columna quævis, conſtat ex intervallis alternantibus æqualibus, priore ex meris *o*, altero ex meris 1, quæ adeo ſemiperiodi ſunt notarum oppoſitarum periodum conſtituentes

Nam talis eſt columna 1 (*per* 13) talis eſt etiam columna 2 [*per* 19] Ergo talis eſt etiam columna hanc proxime ſequens [*per* 33] & rurſus hanc proxime ſequens, & ſic porro in infinitum. Prius autem intervallorum, eſt ex meris *o*, nam [*per* 22] quævis columna incipit ab *o*.

(35) Numerus notarum periodi cujusque columnæ, in eadem tabula eſt numerus progresſionis Geometricæ duplæ, exponentem habens, numerum ordinalem columnæ.

Nam periodi in columna prima notæ ſunt 2, ſeu $2^1$ [*per* 13] in ſecunda $2^2$ ſeu 4. in ſequente ſemper numerus duplicatus [*per* 33] itaque tot ſunt duplicationes quot columnæ, ſeu numerus notarum periodi, eſt potentia ipſius 2 cujus exponens eſt numerus columnæ ordinalis; Hinc tandem tabula prodit ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, qualem exhibuimus capite 3.

## *Pars Secunda.*

## De Periodis Columnarum ſeriei numerorum progresſionis Arithmeticæ dyadice expreſſorum.

### *Definitiones.*

*a b c d e f g h i k l m n*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | * | | | * | | | * | | * |
| | | | | 1 | | | 2 | | | 3 | | 4 |

1. SI ſeries terminorum velut *a b c d e f* . . . *n* ſit data, & in uno terminorum, velut *d*, incipiat numeratio aliqua, exempli cauſa *d e f*, quæ finit in aliquo termino veluti *f*, & terminus *f* ſolus deſignetur, cæteris omisſis, talis numeratio appellatur *ſaltus*, qui nempe fit in deſignando.

(2 *Nu*-)

2. *Numerus saltûs* est numerus terminorum numeratorum, verbi gratia, 3 est numerus saltus *d e f*, finiti in *f* Itaque probe oportet distinguere numerum *saltûs* à numero *saltuum*.

3. *Terminus in quem* fit saltus, seu in quem cadit saltus est, terminus in quo numeratio saltum faciens finit, nempe *f* in exemplo proposito *d e f*.

4. *Terminus a quo* fit saltus, est is, qui immediate præcedit primum numerationis terminum: talis in exemplo præsenti foret *c* proxime præcedens *d* primum terminum saltus *d e f*, & dici potest, saltum progredi à *c* in *f*.

5. *Termini transmissi per saltum* sunt termini omissi in designatione: tales in exemplo præsenti sunt *d e* quia solus designatur terminus *f*.

6. *Saltus continuari* dicuntur, cum terminus *in quem* primi saltus fit terminus *a quo* saltus secundi

*d e f g h i*

* *

exempli gratia, *f* terminus *in quem* saltûs *d e f*, est terminus *à quo* saltus *g h i*.

7 *Saltus cum serie incipere* dicuntur, cum primus terminus primi saltus est primus terminus seriei. Ita saltus incipiunt cum serie proposita.

* *a b c d e f g h i*

* * *

1 2 3

Quia primi saltus *a b c* primus terminus *a* etiam est primus terminus seriei. Tum quidem terminus *a quo* primi saltus est *

8. *Saltus ante seriem incipere* dicuntur, cum aliquis terminus primi saltus, præcedere ponitur omnes terminos seriei; ponendo, vel fingendo seriem retro continuari

☽ ☉

* * * *a b c d e f g*

* * *

1 2 3

Sic si saltus sit trium terminorum, cadantque saltus in *a*, *d*, *g*, incipient saltus ante seriem, seu ante primum seriei terminum *a*, veluti in ☽, ubi est primus terminus primi saltus ☽ ☉ *a*.

9. *Saltus post seriem incipere* dicuntur, cum primus terminus

primi ſaltus eſt terminus aliquis ſeriei poſt primum ; ita, ſi ſaltus cadant in *e*, *h*, *l* & primus ſaltus ſit *c d e*, patet eum incipere in *c* qui poſterior eſt primo ſeriei termino *a*.

10. *Saltus cum ſerie finire* dicuntur, cum ultimus ſaltus cadit in ultimum terminum ſeriei.

11. *Saltus ſeriem complere* dicuntur, cum primus terminus primi ſaltus eſt primus terminus ſeriei & ultimus terminus ultimi ſaltus eſt ultimus terminus ſeriei. Veluti ſi ſeries eſſet *a b c d e f g h i*

1 2 3

cujus ſeriei primus terminus *a* eſt primus terminus primi ſaltus *a b c* & ultimus terminus ſeriei *i* eſt ultimus terminus ultimi ſaltus *g h i*.

*Obſervatio.* Quicquid hactenus de ſerie dictum eſt, etiam de periodo cujusvis ſeriei periodicæ intelligi poteſt. Cum ipſa periodus ſit ſeries, ſimiliter & certus numerus talium periodorum aliqua ſeries erit.

12. In omni ſerie periodica, *ſaltus* dicuntur transire, periodos cum numerus ſaltus (ſeu numerus terminorum ſaltus) eſt major numero periodi, & transeundo de periodo in periodum, ſaltus cum periodis non finiuntur.

*a b c d. a b c d. a b c d. a b c d. a b c d. a b c d. a b c d*

1 2 3

Ita in exemplo adjecto, ubi ſaltus primus cadit in *c* tertium terminum ſecundæ periodi & non in ultimum *d*, dicitur primus ſaltus transire & prætergredi primam periodum & cadere in ſecundam : Similiter primus & ſecundus ſaltus perveniunt usque in quartam periodum, non tamen in ultimum ejus terminum, quare dicuntur ipſi, tres periodos prætergredi. Ac denique primus ſecundus & tertius ſaltus perveniunt usque in ſextam periodum, non tamen in ultimum ejus terminum, quare dicuntur primus ſecundus & tertius ſaltus, quinque periodos prætergredi. Sed ſi adhuc adjiceretur una periodus, unusque ſaltus, finirent ſaltus cum periodis. Quare dicerentur quatuor ſaltus priores complere ſeptem periodos.

Cap. I.

## Cap. I.

### De saltibus æqualibus inter se percurrentibus terminos seriei, sive periodica sit, nec ne.

§. 1. SI saltus æquales inter se incipiant cum serie finita & continuentur in ea quantum possibile est, numerus saltuum, & terminorum in quos ipsi cecidere, erit æqualis quotienti, qui prodit dividendo numerum terminorum seriei per numerum saltus; & residuum divisionis erit numerus terminorum qui supersunt in serie post ultimum saltum.

*a b c d e f g h i k l m n*

1 2 3 4

Exempli gratia, si numerus saltus sit 3 & numerus terminorum seriei *a b c* -- *n* sit 13, dividatur 13 per 3, prodit quotiens 4. numerus saltuum 1, 2, 3, 4, & quia post omnes saltus superest terminus unus *n*, residuum divisionis est 1.

Nam saltum conficiendo, demimus tot terminos quot in saltu numerantur, ergo saltus sunt subtractiones. Quare si numerus terminorum seriei dividatur per numerum saltus, quotiens (*ex natura divisionis*) indicabit numerum subtractionum vel saltuum possibilium, & residuum divisionis, indicabit numerum terminorum in serie post ulmum saltum residuorum.

§. 2. Ergo in serie quacunque, si numerus terminorum seriei est divisibilis sine reliquo per numerum saltus (saltibus inter se æqualibus & cum serie incipientibus) dico, saltûs complere seriem. Et si saltus compleant seriem, numerus terminorum seriei erit divisibilis sine residuo per numerum saltus.

§. 3. Si saltus æquales inter se, in serie periodica incipiant cum periodo aliqua, & numerus saltus sit major numero terminorum periodi, numerus periodorum quas saltus comprehendit (id est vel complet vel transgreditur) æquabitur quotienti prodeunti ex divisione numeri saltus per numerum periodi: numerus autem terminorum, quibus saltus excedit periodos erit residuum divisionis.

Exempli gratia. In serie periodica *a b c d, a b c d a b c d. a b c d &c.*

1 2 3

 ubi

ubi numerus periodi *abcd* est 4 si numerus saltus sit 5 dividatur 5 per 4 quotiens erit 1 & residuum 1. Itaque primus saltus continet unam periodum & præterea unum terminum vel (quod idem est) primus saltus prætergreditur primam periodum & finit in primo termino secundæ. Similiter, si 10 summa duorum primorum saltuum dividatur iterum per 4 numerum periodi, quotiens erit 2 & residuum 2, Itaque duo saltus transeunt duas periodos & finiunt in secundum terminum tertiæ periodi, & sic de cæteris.

Patet ex natura divisionis ut præcedens.

§. 4. Ergo si quidam dati saltus inter se æquales compleant quasdam periodos cujusvis seriei periodicæ, summa terminorum in saltibus contentorum erit divisibilis sine residuo per numerum periodi, & contra; si summa terminorum in saltibus contentorum est divisibilis sine residuo per numerum periodi, saltus complebunt periodos

§. 5. Si in serie periodica saltus æquales inter se post completum intervallum seu numerum periodorum minimum quem complere possunt, continnentur utcunque, complentes sæpius novum numerum periodorum priori æqualem; cadent semper in terminos similes & in eodem ordine positos, in quos cecidere, cum primum periodorum numerum complerent.

Exempli gratia, in serie periodica

A B C D

*abcd. abcd. abcd. abcd. abcd. abcd. abcd. abcd. abcd. abcd* &c.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

ubi quatuor saltûs priores complent minimum periodorum numerum AB quem complere possunt; dico, saltûs sequentes, complendo quemque numerum periodorum sequentem BC, CD &c. priori AB æqualem, casuros semper in terminos *cbad* in eodem ordine similes primis terminis *cbad* in quos quatuor saltus priores cecidere cum primum intervallum AB complerent. Nam quia priores quatuor saltus finiunt in ultimum terminum prioris intervalli AB, saltus sequentes incipient cum unoquoque intervallo sequenti BC, CD &c. priori AB æquali, sed cum termini cujusvis intervalli sequentis BC, CD &c sint *ex natura periodica*, eodem ordine similes terminis prioris AB, saltus sequentes cadent semper in terminos eodem ordine

simi-

ſimiles terminis in quos quatuor ſaltus priores ceciderunt cum primum intervallum AB complerent.

§. 6. Hinc ſequitur 1 in omni ſerie periodica ſeriem notarum vel terminorum in quos ſaltus æquales cadunt eſſe ſeriem periodicam novam; In exemplo præcedenti, ſi omnes *c b a d*, in quos ſaltus ſemper cadunt excerpuntur, oritur ſeries periodica nova *cbad. cbad. cbad* &c.

§. 7 Hinc ſequitur 2° in ſerie periodica periodum ſeriei terminorum in quos ipſi cadunt conſtare ex terminis in quos cadunt complendo numerum periodorum ſeriei propoſitæ minimum quem complere poſſunt. Vel (quod idem eſt) periodum ſeriei terminorum in quos ſaltus æquales inter ſe cadunt, in omni ſerie periodica conſtare ex terminis ſeriei propoſitæ in quos cadunt ſaltus minimo numero poſſibili, periodos ejus quaſdam complentes In exemplo præcedenti, termini *c b a d* in quos cadunt ſaltus complendo numerum periodorum minimum quem complere poſſunt, formant periodum *c b a d* ſeriei terminorum in quos ſaltus cadunt *c b a d. c b a d. c b a d.* &c.

Vel, quod idem eſt, ſi numerus 4 ſaltuum 1. 2. 3. 4 ſit minimus numerus ſaltuum complentium intervallum ex periodis integris ſeriei propoſitæ compoſitum, quatuor termini *c b a d* in quos ipſi cadunt, dabunt periodum *c b a d* ſeriei terminorum in quos ſaltus cadunt *c b a d. c b a d. c b a d* &c.

## Cap. II.

### De Periodis columnarum in ſerie numerorum progreſſionis Arithmeticæ Dyadice expreſſorum, ſive differentia communis ſit numerus par, ſive impar.

§. 8. Series notarum in quas cadunt ſaltus inter ſe æquales in columna ſeriei numerorum naturalium, eſt columna ejuſdem ordinis in ſerie quadam progreſſionis Arithmeticæ cujus differentia communis eſt numerus ſaltus.

Hoc evidens eſt, natura progreſſionis naturalis & Arithmeticæ, quia ſi in ſerie numerorum naturalium ſaltus æquales fiant, prodit ſeries progreſſionis Arithmeticæ qualem dixi; Idem eſt de columnis, exempli gratia.

| Saltus | Series numerorum naturalium. | | Series numerorum progressionis Arithmeticæ. | |
|---|---|---|---|---|
| | 0000 | 0 | | |
| | 0001 | 1 | | |
| 1 | 0010 | 2 | 0010 | 2 |
| | 0011 | 3 | | |
| | 0100 | 4 | | |
| 2 | 0101 | 5 | 0101 | 5 |
| | 0110 | 6 | | |
| | 0111 | 7 | | |
| 3 | 1000 | 8 | 1000 | 8 |
| | 1001 | 9 | | |
| | 1010 | 10 | | |
| 4 | 1011 | 11 | 1011 | 11 |

§. 9. Si in columna seriei numerorum naturalium sumatur vel assignetur numerus par semiperiodorum, prima & ultima semiperiodus inter se oppositæ erunt. Id est si prima constet ex meris o ultima constabit ex meris 1; & contra, si prima constet ex meris 1 ultima constabit ex meris o.

Sit numerus par semiperiodorum comprehensus inter A & B continens quatuor semiperiodos secundæ columnæ seriei numerorum

A naturalium ; dico, semiperiodum ad A, esse oppositam
o semiperiodo ad B. Nam patet, numerum parem se-
o miperiodorum continere periodos integras, quare si se-
1 miperiodus ad A est prima periodi, ea ad B erit secun-
1 da periodi, & contra, si semiperiodus ad A est secunda
o periodi, ea ad B erit prima periodi
o Atqui *per 34 primæ partis* prima semiperiodus perio-
1 di & secunda sunt in quavis columna numerorum na-
1 turalium oppositæ inter se; ergo semiperiodus ad A est
B opposita semiperiodo ad B.

§. 10. Hinc in quavis columna numerorum naturalium, si saltus compleant vel finiant numerum parem semiperiodorum quarum prima constat ex meris o ultimus saltus cadet in notam 1 & contra caderet in notam o si prima ex meris 1 constaret.

Exem-

Exempli gratia. Si saltûs 1, 2, 3, 4. compleant numerum parem semiperiodorum inter A & B comprehensum, & continentem sex semiperiodos secundæ columnæ quarum prima ad A constat ex meris 0; dico, ultimum saltum 4 cadere in 1.

| | | |
|---|---|---|
| A | * | |
| | 0 | |
| | 0 | |
| | 1 | 1 |
| | 1 | |
| | 0 | |
| | 0 | 2 |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | 0 | 3 |
| | 0 | |
| | 1 | |
| | 1 | 4 |
| B | | |

Nam *per definitionem* 10 & 11, cadet in ultimam notam semiperiodi ad B; Atqui hæc ultima nota ad B est 1, quia, semiperiodo ad A constante (*per hyp.*) ex meris 0, semiperiodus ad B constabit per præcedentem ex meris 1.

§. 11 Si in columna seriei numerorum naturalium, assignetur numerus par semiperiodorum, quæ ultimam proxima sequetur semiperiodus, primæ similis erit. Id est, si prima constat ex meris 0, proxima post ultimam etiam constabit ex meris 0; & illa constante ex meris 1, etiam hæc ex meris 1 constabit.

Sit numerus par semiperiodorum inter A & B comprehensus, continens quatuor semiperiodos secundæ columnæ; dico, primam semiperiodum versus A, esse similem ei, quæ sequitur ultimam versus B

| | | |
|---|---|---|
| | * | |
| A | 0 | |
| | 0 | |
| | 1 | 1 |
| | 1 | |
| | 0 | |
| | 0 | 2 |
| | 1 | |
| | 1 | |
| B | --- | |
| | 0 | 3 |
| | 0 | |

Nam liquet, numerum parem semiperiodorum periodos integras continere, quare [*ex natura periodica*] post earum revolutionem, semiperiodus proxima ultra B, est primæ ad A similis.

§ 12. Ergo in quavis columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, si saltus quidam 1, 2, 3 transeunt numerum parem semiperiodorum A B, quarum prima ad A ex meris 0 constat, ultimus saltus 3 cadet in 0, & contra, caderet in 1, si prima semiperiodus ad A, ex meris 1 constaret.

Nam [*per def* 12] cadet hic ultimus saltus in quandam notam semiperiodi immediate ultra B, atqui hæc nota erit 0, quia, semiperiodo ad A constante [*per hypothesin*] ex meris 0, semiperiodus immediate ultra B constabit [*per præced.* ] ex meris 0.

§. 13. Si in columna numerorum naturalium dyadicè expressorum aſſignetur numerus impar ſemiperiodorum, prima & ultima ſemiperiodus erunt ſimiles inter ſe

| | | |
|---|---|---|
| C | | |
| | 0 | |
| | 0 | |
| | 0 | 1 |
| | 0 | |
| | 1 | |
| | 1 | 2 |
| | 1 | |
| | 1 | |
| d | 0 | 3 |
| | 0 | |
| | 0 | |
| | 0 | 4 |
| D | | |

Sit numerus impar ſemiperiodorum C D continens tres ſemiperiodos tertiæ columnæ ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum; dico, ſemiperiodum primam ad C eſſe ſimilem ſemiperiodo ultimæ ad D, id eſt, ſi prima ad C conſtat ex meris 0, & ultima ad D conſtabit etiam ex meris 0, at illa conſtante ex meris 1, hæc etiam ex meris 1 conſtabit.

Nam ſi demta ultima ſemiperiodo ad D fiat intervallum Cd, illud continebit unam vel plures periodos integras, quia numerus ſemiperiodorum inter c & d comprehenſarum erit par. Quare [*ex natura periodica*] poſt revolutionem periodorum inter C & d comprehenſarum, erit ſemiperiodus inter d & D comprehenſa ſimilis primæ ad C.

§. 14. Ergo ſi quidam ſaltus 1, 2, 3, 4, compleant vel finiant numerum imparem ſemiperiodorum cujusvis columnæ ſeriei numerorum naturalium dyadicè expreſſorum, quarum prima ad C conſtet ex meris 0; cadet ultimus ſaltus 4 in 0; & contra, caderet in notam 1, ſi prima ſemiperiodus ad C ex meris 1 conſtaret.

Nam [*per def.* 10] cadet in ultimam notam ſemiperiodi ad D.

§. 15. Si in columna ſeriei numerorum naturalium, aſſignetur numerus impar ſemiperiodorum, quæ ultimam proxime ſequitur ſemiperiodus, erit primæ oppoſita.

Sit numerus impar ſemiperiodorum inter C & D comprehenſus continens 3 ſemiperiodos [ex. gr. tertiæ columnæ) dico ſemiperiodum inter D & F comprehenſam eſſe oppoſitam primæ ad C.

Nam

Nam semiperiodus inter D & F comprehensa, est *per prop 34. primæ partis* opposita ultimæ semiperiodo ad D, quam proxime sequitur, quare erit etiam opposita primæ ad C, quia [*per præced.*] prima semiperiodus ad C & ultima ad D sunt inter se similes.

C o
o
o 1
o
1
1 2
1
1
o 3
o
o
D o 3
1
1
1 5
F 1

§. 16. Ergo si saltus quidam 1, 2, 3, 4, 5 transeant numerum imparem semiperiodorum cujusvis columnæ seriei numerorum naturalium, quarum prima ad C constat ex meris, o ultimus saltus 5 cadet in 1; & contra, caderet in o, si prima semiperiodus ad C ex meris 1 constaret.

Nam [*per definitionem* 12] cadet in quandam notam semiperiodi quæ D F, ultimam intervalli C D sequitur, atqui primâ semiperiodo ad C, ex meris o constante, omnes notæ semiperiodi D F erunt [*per præced.*] 1, ergo cadet in 1. Sed simili ratione caderet in o, si prima semiperiodus ad C ex meris 1 constaret.

§. 17. Si quævis semiperiodus, intervalli E F ex semiperiodis integris cujusvis columnæ seriei numerorum naturalium compositi & saltibus æqualibus inter se & minoribus semiperiodo columnæ completi, dividatur successive per numerum notarum saltus, adjiciendo Dividendis sequentibus residuum præcedentium, quotientes indicabunt alternative numerum notarum tum o, tum 1, in quas saltus cecidere, cum intervallum supradictum compleverint.

E *
o
o
1 o
o
o
2 o
o
o
3 1
1
1
4 1
1
1
5 1
1
o
6 o
o
o
7 o
o
o
F. 8 o

Nam quia [reipsa] una quæque semiperiodus est series, quotiens quivis [*per* 1] indicabit numerum notarum in quas saltus ceciderunt in semiperiodo ad quam ipse pertinet, sed cum [*per* 34 *primæ partis*] singulæ semiperiodi cujuslibet columnæ numerorum naturalium constent alternative una ex meris o, altera ex meris 1, liquet, quotientes indicare alternative numerum notarum tum o, tum 1, in quos saltus ceciderunt, cum intervallum supradictum compleverint.

Exempli gratia. In intervallo E F ex tribus semiperiodis integris quartæ columnæ seriei numerorum naturalium composito, & 8 saltibus æqualibus completo,

 ubi

ubi 3 numerus notarum ſaltus, eſt minor 8 numero ſemiperiodi; Si 8,

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | |
| 8 | 2 | (0) |
| 3 | | |
| 1 | | |
| 10 | 3 | (1) |
| 3 | | |
| 9 | 3 | (0) |
| 3 | | |

numerus notarum o, primam ſemiperiodum ad E conſtituentium, dividatur per 3 numerum notarum ſaltus, tunc quotiens erit 2, reſiduum 2 addendum numero 8 notarum [1] ſecundæ ſemiperiodi facit 10, quem numerum rurſus divido per 3, numerum notarum ſaltus, quotiens eſt 3, reſiduum 1, quod addo numero 8 notarum o tertiæ ſemiperiodi, facit 9, quem numerum denique divido rurſus per 3 quotiens eſt 3 reſtat nihil. Itaque tot diviſionibus peractis, quot intervallum E F continet ſemiperiodos, habeo tres quotientes nempe 2, 3, 3 indicantes alternative numerum notarum tum o, tum 1, in quas ſaltus cecidere, cum tres ſemiperiodos intervalli EF compleverint.

Nam quia primus quotiens eſt 2, dico primo, (*per* 1) numerum notarum in quas ſaltus cecidere in prima ſemiperiodo eſſe 2 & ſecundò, cum hæc prima ſemiperiodus conſtet ex meris o, dico notas in quas ſaltus ceciderunt in ea fuiſſe 2 (o). Similiter, quia ſecundus quotiens eſt 3 & ſecunda ſemiperiodus ex meris 1 conſtat, dico, notas in quas ſaltus in ea cecidere fuiſſe 3 (1). Denique, quia tertius quotiens eſt 3, & tertia ſemiperiodus ex meris o conſtat, dico notas in quas ſaltus cecidere in tertia ſemiperiodo fuiſſe 3 (o). Ergo ſaltus cum compleverint intervallum E F cecidere in 2 (o) 3 (1) & 3 (o) nempe in notas 00111000.

§. 18. Hinc oritur methodus inveniendi periodum vel ſemiperiodum cujuslibet columnæ ſeriei numerorum progreſſionis Arithmeticæ, cujus differentia communis eſt minor numero notarum periodi columnæ ejusdem ordinis in ſerie numerorum naturalium.

Nam ſi intervallum E. F ex ſemiperiodis integris quartæ columnæ ſeriei numerorum naturalium compoſitum, ſit minimum quod ſaltus complere poſſunt, notæ in exemplo præcedenti repertæ, nempe 00111000 conſtituent periodum quartæ columnæ ſeriei numerorum progreſſionis Arithmeticæ cujus differentia communis eſt 3, numerus ſaltus. Cum enim [*ex hypotheſi*] intervallum E F ex tribus ſemiperiodis integris quartæ columnæ ſeriei numerorum naturalium compoſitum, ſit minimum quod ſaltus complere poſſunt; notæ ſupradi-

| | |
|---|---|
| | G |
| | 0 |
| | 0 |
| | 0 |
| | 0 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| 1 | 0 |
| | 0 |
| | 0 |
| | 0 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 0 |
| 2 | 0 |
| | 0 |
| | 0 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 0 |
| | 0 |
| 3 | 0 |
| | 0 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 1 |
| | 0 |
| | 0 |
| | 0 |
| 4 | 0 H |

prædictæ nempe 00111000 constituent [*per* 7] periodum seriei notarum in quas saltus cecidere in columna quarta seriei numerorum naturalium: atqui [*per* 8 *hujus partis*] series notarum in quas saltus æquales cadunt in columna numerorum naturalium est columna ejusdem ordinis in serie quadam progressionis Arithmeticæ cujus differentia communis est numerus saltus. Ergo notæ, nempe 00111000, constituent periodum columnæ quartæ cujusdam seriei numerorum progressionis Arithmeticæ, cujus differentia communis est 3 numerus saltus.

§. 19 In columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, si fiant saltus inter se æquales & majores semiperiodo columnæ, & per numerum semiperiodi dividatur separatim numerus primi, summa duorum priorum, summa trium priorum summa quatuor priorum &c. saltuum complentium intervallum G H ex integris periodis vel semiperiodis compositum, primus, secundus, tertius &c. quotiens prout fuerit vel par vel impar, & divisio habuerit residuum vel non, indicabit naturam notæ, an sit vel (0) vel (1), in quam primus, secundus, tertius &c. saltus cecidit.

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 9 | 9 | -2 |
| 9 | 4 | |
| | 2 | |
| 18 | 18 | -4 |
| 9 | 4 | |
| | 3 | |
| 27 | 27 | -6 |
| 9 | 4 | |
| 36 | 36 | -9 |
| | 4 | |

Nam [*per* 4. *hujus partis*] prout divisio habuerit residuum, vel non, dabit numerum semiperiodorum vel prætergressarum vel finitarum. Itaque, prout hæ semiperiodi fuerint in numero pari vel impari, reperietur [*per* 10, 12, 14, 16 *hujus partis*] natura notæ, an sit (0) vel (1), in quam cecidit saltus.

Exempli gratia, si quatuor saltus æquales dati 1, 2, 3, 4, quorum quilibet continet 9 notas, compleant intervallum G H ex semiperiodis integris tertiæ columnæ seriei numerorum naturalium compositum: divido 9 numerum primi saltus, per 4 numerum semiperiodi columnæ; quotiens 2 habet residuum, quare [*per* 4. *hujus partis*] primus saltus transit 2 semiperiodos. Sed quia 2 numerus semiperiodorum prætergressarum quarum prima ad G constat ex meris *o*, est par; primus saltus cadit (*per* 12 *hujus partis*) in notam (o).

Postea divido 18, summam duorum priorum saltuum, rursus per 4. numerum semiperiodi; quotiens 4 est par,& habet residuum, quare (*per* 4 & 12 *hujus partis*) duo saltus priores transgrediuntur numerum parem semiperiodorum, quarum prima ad G constat ex meris (o). Ergo secundus saltus cadit in (o).

Tum divido 27, summam trium priorum saltuum, per 4 numerum semiperiodi, quotiens 6 est par, & habet residuum: quare (*per* 4) tres priores saltus transeunt numerum parem semiperiodorum quarum prima ad G ex meris *o* constat. Ergo (*per* 14 *hujus partis*) tertius saltus cadit in *o*.

Denique divido 36, summam quatuor saltuum, rursus per 4 numerum semiperiodi; quotiens 9 est impar & non habet residuum quare (*per* 4 *hujus partis*) quatuor saltus finiunt numerum imparem semiperiodorum quarum prima ad G ex meris (o) constat; Ergo (*per* 16 *hujus partis*) quartus saltus cadit in notam (o).

Ergo tandem quatuor 1, 2, 3, 4, cadunt in quatuor notas (o) nempe oooo.

§. 20. Hinc oritur methodus inveniendi periodos cujuslibet columnæ seriei numerorum progressionis Arithmeticæ, cujus differentia communis est major semiperiodo columnæ ejusdem ordinis in serie numerorum naturalium. Nam, exempli gratia, si numerus quatuor saltuum 1, 2, 3, 4 supradictorum sit numerus minimus saltuum complentium intervallum quoddam GH ex semiperiodis integris tertiæ columnæ seriei numerorum naturalium compositum, quatuor notæ, in exemplo præcedenti repertæ oooo, in quas quatuor hi saltus ceciderunt, cum intervallum supradictum GH compleverint, constituent periodum columnæ tertiæ cujusdam seriei numerorum progressionis Arithmeticæ, cujus differentia communis est 9, numerus saltus.

Cum enim, *ex hypothesi*, numerus quatuor saltuum supradictorum, sit minimus saltuum complentium intervallum quoddam GH ex semiperiodis integris tertiæ columnæ seriei numerorum naturalium constans, quatuor notæ oooo, in quas hi quatuor saltus cadunt, constituent (*per* 4 *hujus partis*) semiperiodum seriei notarum in quas

saltus

saltus cadunt in supradicta tertia columna numerorum naturalium, atqui (*per 8 hujus partis*) series notarum in quas saltus æquales inter se cadunt in columna seriei numerorum naturalium, est columna ejusdem ordinis in serie quadam numerorum progressionis Arithmeticæ, cujus differentia communis est numerus notarum saltus. Ergo ipsæ quatuor notæ, nempe oooo, constituent semiperiodum tertiæ columnæ in quadam serie numerorum progressionis Arithmeticæ, cujus differentia communis est numerus 9 notarum saltus.

## *Cap. III.*

## De periodis columnarum in serie qualibet numerorum progressionis Arithmeticæ, cujus differentia communis est numerus impar.

§. 21. In qualibet columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, numerus periodorum impar quivis HI, dividi potest in duos numeros semiperiodorum æquales & impares HC, CI.

Nam numerus semiperiodorum est (*ex natura rei*) duplus numeri periodorum.

§. 22. In qualibet columna numerorum naturalium dyadice expressorum, si numerus impar periodorum inter H & I comprehensus dividatur per præcedentem in duos numeros semiperiodorum impares & æquales inter se HC, CI, semiperiodi primi HC erunt eodem ordine oppositæ semiperiodis secundi CI. Id est 1, 2ª, 3ª &c. Semiperiodus intervalli HC erit respective opposita 1ª, 2ª, 3ª &c. Semiperiodo intervalli secundi CI.

| | |
|---|---|
| H | o |
| | o |
| | 1 |
| | 1 |
| | o |
| C | o |
| | 1 |
| | 1 |
| | o |
| | o |
| | 1 |
| | 1 |
| I | |

Nam quia numerus semiperiodorum HC est impar, semiperiodus ultra C, quæ est prima intervalli secundi CI erit (*per 15 hujus partis*) opposita primæ semiperiodo intervalli HC. Sed quia *per 34 primæ partis* in qualibet columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, semiperiodi sunt alternative oppositæ, prima semiperiodus intervalli prioris HC opposita primæ semiperiodo intervalli CI 2ª, 3ª, 4ª &c. semiperiodus prioris intervalli HC erit etiam respective opposita 2ª, 3ª, 4ª, &c. semiperiodo intervalli CI.

§. 23. Hinc in columna seriei numerorum naturalium, si saltus æquales inter se compleant singulos quosque numeros semiperiodorum impares, & æquales inter se HC, CI numerum imparem periodorum inter H & I comprehensum constituentes, notæ in quas cadent complendo secundum CI, erunt eodem ordine oppositæ notis, in quas cecidere, cum primum intervallum HC complerent.

Exempli gratia, si saltus 1, 2, 3, 4, quorum quisque continet tres notas, compleant numerum imparem periodorum in HI comprehensum continentem 3 periodos secundæ columnæ, saltus 3, 4 cadunt in intervallo CI in notas (1. 0) eodem ordine oppositas notis (0 1,) in quas saltus 1, 2, cecidere, cum intervallum primum HC complerent.

§. 24. In quavis columna numerorum naturalium dyadice expressorum, omnis numerus periodorum impar inter H & I comprehensus continet notas numero pari vel quod idem est numerus notarum intervalli HI erit par. Nam quia *ex hypothesi* intervallum HI est ex periodis integris columnæ seriei numerorum naturalium, numerus notarum ejus constabit ex numero periodi repetito. Atqui, cum *per 35 primæ partis* numerus periodi cujuslibet columnæ numerorum naturalium, sit aliquis numerus progressionis Geometricæ duplæ a binario, erit per 32$^{am}$ libri 9 Euclidis par vel pariter par tantum.

§. 25. Hinc in quavis columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, si numerus impar datus metitur numerum notarum intervalli HI ex periodis integris numero impari compositi, metietur etiam numerum notarum cujusque intervallorum HC, CI inter se æqualium, & ex semiperiodis integris constantium.

Hoc liquet *ex 30 lib. 9 Euclidis*. Nam cum (*ex hypothesi*) HC, CI sint dimidia æqualia intervalli HI, numerus notarum in quovis erit medietas numeri notarum inter H & I comprehensarum.

§. 26. Ergo si, in columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, saltus æquales, numero saltûs impari, compleant numerum imparem periodorum inter H & I comprehensum; etiam quemque duorum numerorum æqualium HC, CI ex semiperiodis compositorum complebunt.

Exempli gratia. Si numerus saltûs sit impar 3 & saltûs 1, 2, 3, 4. compleant numerum imparem trium periodorum inter H & I comprehenprehenſum; dico, quodque dimidium H C, C I ſimul compleri, nempe H C ſaltibus 1, 2, & C I ſaltibus 3, 4.

Nam (*per* 1$^{am}$ *hujus partis*) ſi numerus ſaltus metitur numerum notarum cujusvis intervalli H vel ſeriei H C, C I, erit hoc intervallum ſaltibus completum.

§. 27. Hinc notæ in quas ſaltus æquales cadent in ſecundo intervallo C I, erunt eodem ordine oppoſitæ iis, in quas priores ſaltus cecidere in primo intervallo H C

Nam (*per* 23. *hujus partis*) ſi ſaltus æquales, numero ſaltus impari, compleant unum quodque intervallorum æqualium, conſtituentium numerum imparem periodorum inter H & I comprehenſum; ſaltus ſequentes cadent in ſecundo C I, in notas eodem ordine oppoſitas, in quas priores cecidere in priore H C.

§. 28. Ergo ſi periodus ſeriei notarum in quas ſaltus æquales inter ſe, numerô ſaltûs impari, cadunt in columna ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, conſtat ex notis, in quas ipſi cadunt complendo numerum imparem periodorum dictæ columnæ H I, habebit ipſa ſemiperiodos ſuas inter ſe oppoſitas.

Nam liquet, primam ſemiperiodum conſtare ex notis in quas ſaltus cadunt in priore intervallo H C, & ſecundam ex notis in quas cadunt in ſecundo C I.

§. 29. In columna ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, numerus notarum minimus, quem numerus periodi & numerus ſaltus, cum ſit impar, metiantur, eſt eorum producto æqualis.

| Saltus | | |
|---|---|---|
| | 0 | H |
| | 0 | |
| 1 | --1 | |
| | 1 | |
| | 0 | |
| 2 | --0 | |
| | 1 | |
| | 1 | |
| 3 | --0 | |
| | 0 | |
| | 1 | |
| 4 | --1 | I |

Ex. gr. in ſecunda columna ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, ubi numerus notarum periodi eſt 4, ſi numerus ſaltus eſt impar 3, minimus numerus quem 3 & 4 metiuntur, erit numerus 12, notarum inter H, I comprehenſarum.

Liquet *ex* 36$^{a}$ *libri* 7 *Euclidis*, nam quia numerus periodi cujusvis columnæ ſeriei numerorum naturalium eſt aliquis numerus progreſſionis Geometricæ duplæ a binario (*per* 35 *primæ partis*,) erit ipſe per *corollarium* 31$^{a}$ *lib.* 9 *Euclidis* primus ad numerum imparem ſaltus.

§. 30. Hinc in qualibet columna ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, minimus numerus periodorum vel ſemiperiodorum continentium notas numero menſurabili per numerum ſaltus, cum eſt impar, eſt æqualis dicto numero notarum ſaltus, & minimus numerus ſaltuum continentium notas numero menſurabili (id eſt, diviſibili ſine reſiduo) per numerum periodi vel ſemiperiodi, eſt æqualis eidem illi numero notarum periodi vel ſemiperiodi.

H 0
0
1 1
1
0
2 0
1
1
3 0
0
1
I 4 1

*Exempli gratia*, in columna ſecunda ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, ubi numerus periodi eſt, 4, ſi numerus ſaltus ſit impar 3, dico minimum numerum periodorum, continentium notas numero diviſibili ſine reſiduo per 3 numerum ſaltus, eſſe intervallum HI, ex tribus periodis integris compoſitum, & minimum numerum ſaltuum continentium notas numero diviſibili ſine reſiduo per 4 numerum notarum periodi, eſſe numerum quatuor ſaltuum 1, 2, 3, 4.

§. 31. Ergo in quavis columna ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, ſi ſaltus ſint æquales inter ſe, & numerus notarum ſaltus ſit impar, numerus periodorum minimus, quem ſaltus complere poſſint, eſt æqualis eidem numero notarum ſaltus, & minimus numerus ſaltuum complentium quaſdam periodos, erit æqualis eidem numéro notarum periodi.

Exempli gratia, in ſecunda columna ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, ubi numerus periodi eſt 4, ſi numerus ſaltus ſit impar 3, dico, numerum periodorum minimum quem ſaltus complere poſſint, eſſe numerum trium periodorum inter H & I comprehenſarum, & minimum numerum ſaltuum complentium quaſdam periodos integras, eſſe numerum quatuor ſaltuum 1, 2, 3, 4.

Nam (*per 2. hujus partis*) ſi ſaltus æquales inter ſe, compleant numerum periodorum inter H & I comprehenſum, numerus notarum in periodis contentarum erit diviſibilis ſine reſiduo per numerum ſaltus; & ſi ſaltus dati 1, 2, 3, 4. compleant quaſdam periodos integras, numerus notarum in ſaltibus contentarum, erit (*per 4 hujus partis*) diviſibilis ſine reſiduo per numerum notarum periodi.

§. 32. Ergo in quavis columna ſeriei numerorum naturalium

dyadi-

dyadice expressorum, porro, si saltus sint æquales inter se, & numerus saltus sit impar, Periodus seriei notarum in quas saltus cadunt, constabit ex notis in quas ipsi cadunt, complendo tot periodos ipsius columnæ, quot notæ in saltu numerantur, id est, complendo numerum periodorum ipsius columnæ æqualem numero impari saltus. Vel constabit ex notis in quas cadunt saltus numero æquali numero notarum periodi ipsius columnæ, id est, ex notis in quas cadunt tot saltus quot notæ in periodo ipsius columnæ numerantur.

Exempli gratia, in secunda columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, si saltus 1, 2, 3, 4. &c. sunt æquales inter se & numerus notarum saltus sit impar 3, dico, periodum seriei notarum in quas saltus cadunt, constare ex notis 1001 in quas ipsi cadunt, complendo numerum imparem trium periodorum inter H & I comprehensum, vel constare, ex eisdem notis 1001 in quas cadunt (quia numerus periodi secundæ columnæ seriei numerorum naturalium est 4) quatuor saltus 1, 2, 3, 4.

| | |
|---|---|
| | 0 H |
| | 0 |
| 1 | 1 |
| | 1 |
| | 0 |
| 2 | 0 |
| | 1 |
| | 1 |
| 3 | 0 |
| | 0 |
| | 1 |
| 4 | 1 I |

Nam (*per* 4 *hujus partis*) periodus seriei notarum in quas saltus æquales inter se cadunt in quavis serie periodica, constat ex notis, in quas ipsi cadunt complendo numerum periodorum seriei propositæ minimum quem complere possint: Vel constat ex notis in quas cadunt saltus minimo numero possibili periodos quasdam integras seriei propositæ complentes.

§. 33. Hinc primò, periodus seriei notarum in quas cadunt saltus æquales inter se (numerô saltus imparî) in quavis columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, habebit semiperiodos suas inter se oppositas.

Nam (*per* 28 *hujus partis*) si periodus seriei notarum in quas saltus cadunt in quavis columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, constat ex notis, in quas ipsi cadunt, complendo numerum imparem periodorum ipsius columnæ; habebit suas semiperiodos inter se oppositas.

§. 34. Hinc secundò, periodus seriei notarum in quas saltus æquales inter se cadunt in quavis columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum (numerô saltus imparî) quoad numerum notarum erit æqualis periodo dictæ columnæ.

Nam (*per* 32) periodus feriei notarum in quas faltus æquales inter fe cadunt in columna numerorum naturalium dyadice expresſorum, numerô faltus impari, conſtat ex notis in quas cadunt tot faltus, quot notæ in periodo columnæ numerantur.

§ 35. Periodus cujusvis columnæ feriei numerorum progresſionis Arithmeticæ, cujus differentia communis eſt numerus impar conſtat ex notis columnæ ejusdem ordinis feriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum in quas faltus æquales inter fe (numero faltus, æquali numero differentiæ communis) cadunt, complendo numerum ejus periodorum æqualem numero differentiæ communis, id eſt, complendo tot periodos ejus, quot differentia communis indicabit. Vel conſtat ex notis columnæ ejusdem ordinis feriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, in quas cadunt tot faltus quot funt notæ in periodo ejus.

Exempli gratia, periodus columnæ fecundæ feriei numerorum progresſionis Arithmeticæ, cujus differentia communis eſt numerus impar 3, conſtabit ex notis 1001 in quas faltus æquales inter fe (numerò faltus æquali differentiæ communi) cadunt in columna fecunda feriei numerorum naturalium, complendo tot periodos ejus, quot differentia communis indicat, nempe tres, inter H & I contentas. Vel conſtabit ex eisdem notis 1001 in quas cadunt (quia numerus periodi fecundæ columnæ feriei numerorum naturalium eſt 4) quatuor faltus 1, 2, 3, 4.

Hoc liquet (*ex* 32 *hujus partis*) nam (*per* 8 *hujus partis*) feries notarum in quas faltus æquales cadunt in columna feriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, eſt columna ejusdem ordinis in quadam ferie numerorum progresſionis Arithmeticæ cujus differentia communis eſt numerus faltus.

§. 36. Periodus cujusvis columnæ feriei numerorum Arithmeticæ progresſionis cujus differentia communis eſt numerus impar habet femiperiodos fuas oppoſitas inter fe.

Hoc liquet (*ex* 33 & 8. *hujus partis*)

§. 37. Periodus cujusvis columnæ feriei numerorum progresſionis Arithmeticæ cujus differentia communis eſt numerus impar, quoad numerum notarum æqualis eſt periodo columnæ ejusdem ordinis in ferie numerorum naturalium.

Hoc liquet (*ex* 34 & 8 *hujus partis*)

§. 38. Invenire periodum cujusvis columnæ feriei numerorum

rum progresſionis Arithmeticæ, cujus differentia communis eſt numerus impar, minor numero notarum periodi columnæ ejusdem ordin s in ſerie numerorum naturalium dyadice expreſſorum.

Quia (*per* 35 *hujus partis*) periodus cujusvis columnæ ſeriei numerorum progresſionis Arithmeticæ cujus differentia communis eſt numerus impar, conſtat ex notis columnæ ejusdem ordinis in ſerie numerorum naturalium in quas ſaltus æquales inter ſe, numero ſaltus æquali differentiæ communi, cadunt, cum compleant tot periodos ejus quot differentia communis indicat; praxis 17ᵃ & 18ᵃ hujus partis dabit ſolutionem.

Exempli gratia, ſi quæram periodum quartæ columnæ ſeriei numerorum progresſionis Arithmeticæ cujus differentia communis ſit numerus impar 3, dico, (*per* 32 *hujus partis*) periodum quæſitam conſtare ex notis in quas ſaltus æquales (numerô ſaltꝰ æquali differentiæ communi) cadunt in columna quarta ſeriei numerorum naturalium, complendo (quia differentia communis eſt 3) tres periodos ejus.

Quare (*per* 17. *hujus partis*) divido quamque ſemiperiodum intervalli E F ex tribus ſemiperiodis integris quartæ columnæ numerorum naturalium compoſiti per 3, numerum differentiæ communis, addendo dividendis ſequentibus reſiduum præcedentium, & tres quotientes nempe 2 (0) 3 (1) 3 (0) dabunt primam ſemiperiodum quæſitam 00111000. Tum quia (*per* 36 *hujus partis*) periodus cujusvis columnæ ſeriei numerorum progresſionis Arithmeticæ, cujus differentia communis eſt numerus impar, habet ſemiperiodos ſuas inter ſe oppoſitas, altera ſemiperiodus quæſita conſtabit ex notis eodem ordine oppoſitis notis primæ, nempe ex notis 11000111. Itaque habebit periodus integra quæſita nempe 0011 000111000111.

* E
0
0
1 0
0
0
2 0
0
0
3 1
1
1
4 1
1
1
5 1
1
0
6 0
0
0
7 0
0
0
8 0 F

2
8 | 2 (0)
3

11
10 3 (1)
3

9
3 3 (0)
3

Notandum eſt in hoc exemplo, ſaltus ſupponi incipere cum columna ſeriei numerorum naturalium, ſed

```
☽
*
1 o E
  o
  o
2 o
  o
  o
3 o
  o
  1
4 1
  1
  1
5 1
  1
  1
6 1
  o
  o
7 o
  o
  o
8 o
  o
  o F
```

quia ipsi persæpe incipiunt ante vel post illam, adjiciam adhuc duo exempla, ad illos duos casus resolvendos.

Primò, si nota in quam cadit primus saltus esset prima intervalli E F tum quidem saltus initium intervallum vel columnam duabus notis fictis ☽ * præcederent. Quare hæ duæ notæ erunt 8 numero notarum primæ semiperiodi versus E addendæ. Itaque primus dividendus evaderet 10. Tum, post hanc præparationem, procedendum erit ut in exemplo præcedenti. Proinde tres quotientes nempe 3 (0) 3 (1) 2 (0) dabunt primam semiperiodum quæsitam 00011100 & altera, constans ut jam dictum, ex notis oppositis eis primæ erit 11100011. Itaque invenitur periodus integra quæsita 00011100, 11100011.

```
 1|
10|3   (0)
 3|

 9|
  |3   (1)
 3|

 2|
 8|2   (0)
 3|
```

Sed si nota, in quam cadit primus saltus esset quinta intervalli E F, tum quia 3, numerus saltus est duabus notis minor numero 5, liquet, quod saltus incipiant duabus notis post intervallum, vel quod idem est, intervallum E, F præcedit primum saltum duabus notis inter E & e comprehensis. Quare illæ duæ notæ erunt à numero 18 notarum primæ semiperiodi versus E, subtrahendæ. Itaque primus dividendus evadet 6, quæ sunt dividendæ ut in exemplo primo per 3 numerum saltus, quotiens est 2 (0) restat nihil, quare nihil addendum est numero 8 notarum (1) secundæ semiperiodi, quem divido similiter per 3 numerum saltus, quotiens est 2 (1) restat 2, quæ addo numero 8 notarum (0) tertiæ semiperiodi facit 10, quæ divido adhuc per 3 numerum saltus, quotiens est 3 (0) restat 1. Quamvis autem omnes semiperiodi

```
  o E
  o
  o e
  o
1 o
  o
  o
2 o
  1
  1
3 1
  1
  1
4 1
  1
  1
5 o
  o
  o
6 o
  o
  o
7 o
  o F
  1
8 1 f
```

```
 6|2   (0)
 3|

 2|
 8|2   (1)
 3|

10|3   (0)
 3|

 3|1   (0)
 3|
```

periodi intervalli E F sint jam divisæ, non dabunt tamen tres quotientes, ut in exemplis præcedentibus, semiperiodum integram quæsitam. Cum enim datæ notæ inter E & e comprehensæ, & præcedentes primum saltum, fuerint a prima semiperiodo ad E subtractæ, liquet, post ultimam semiperiodum versus F, duas notas ex semiperiodo sequenti inter F & f comprehensas intervallo E F esse addendas, quare residuo 1 ultimæ divisionis addo 2, facit 3, quæ denique divido per 3 numerum saltus, quotiens est 1. Proinde quatuor quotientes nempe 2, (0) 2 (1) 3 (0) 1 (1) dabunt primam semiperiodum integram quæsitam 00110001, & habebitur secunda, si sumantur, ut in exemplis præcedentibus, notæ oppositæ primis repertis, nempe 11001110. Unde exurget periodus quæsita 00110001. 11001110.

§. 39. Invenire periodum cujusvis columnæ numerorum progressionis Arithmeticæ, cujus differentia communis sit numerus impar, major numero semiperiodi columnæ ejusdem ordinis, in serie numerorum naturalium dyadice expressorum.

Praxis *prop* 19 & 20 *hujus partis* dabit solutionem. Nam exempli gratia, si quæram periodum tertiæ columnæ seriei numerorum progressionis Arithmeticæ, cujus differentia communis sit numerus impar 9, major 4 numero semiperiodi tertiæ columnæ seriei numerorum naturalium dyadice expressorum; semiperiodus quæsita (*per* 32 *hujus partis*) constabit ex notis dictæ tertiæ columnæ seriei numerorum naturalium in quas cadunt (quia ejus semiperiodus constat ex quatuor notis,) quatuor saltus æquales, numero saltus existente æquali, numero differentiæ communis.

Quare (*per* 19 *hujus partis*) divido separatim numerum 9 primi saltus, 18 summam duorum priorum, 27 summam trium priorum, & denique 36, summam quatuor saltuum, per 4 numerum semiperiodi dictæ tertiæ columnæ seriei numerorum naturalium, & $1^{us}$ $2^{us}$ $3^{us}$ & $4^{us}$ quotiens, prout erit, vel par vel impar, & divisio vel habuerit residuum, vel non habuerit, (*per* 4 *hujus partis*) dabit numerum parem vel imparem semiperiodorum, vel prætergressarum, vel finitarum. Unde colligetur (*per* 10, 12, 14, 16 *hujus partis*) natura notæ in quam $1^{us}$ $2^{us}$ $3^{us}$ $4^{us}$ saltus cecidit. Proinde habebitur prima semiperiodus quæsita.

Cum

o G
o
o
o
1
1
1
1 a
1 o
o
o
o
1
1
1
1 b
o
2 o
o
o
1
1
1
1 c
o
o
3 o
o
1
1
1
1
o
o
o
4 o H

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 9 - - | 9 | 2 |
| 9 | 4 | |
| | 2 | |
| 18 - - | 18 | 4 |
| 9 | 4 | |
| | 3 | |
| 27 - - | 27 | 6 |
| 9 | 4 | |
| | 0 | |
| 36 - - | 36 | 9 |
| | 4 | |

Cum enim tres quotientes priores 2, 4, 6. sint numeri pares, & divisiones habeant residuum, (*per 4 hujus partis*) ideò primus, duo priores, tres priores saltus transibunt numeros pares semiperiodorum Ga, Gb, Gc, quarum prima versus G constat ex meris (o), quare (*per* 10 *hujus partis*) primus, secundus & tertius saltus cadunt in notas (o). Cum autem quartus quotiens sit numerus impar 9, & quarta divisio non habeat residuum, quatuor saltus finiunt numerum imparem semiperiodorum inter G & H comprehensum, quarum prima semiperiodus versus G ex meris o constat. Quare (*per* 12 *hujus partis*) quartus saltus cadit in notam *o*. Itaque invenitur prima semiperiodus quæsita, nempe oooo, & secunda constans (*per* 36 *hujus partis*) ex notis quæ sunt oppositæ notis primæ, erit 1111, unde habebitur periodus integra quæsita oooo1111.

Notandum est, quod in hoc exemplo primus saltus supponatur incipere cum columna seu ejus intervallo primo G H, sed quia res non semper ita se habet, dabo uno exemplo methodum revocandi omnes casus ad regulam generalem jam præscriptam.

Jam *exempli gratia*, si nota *a* in quamcadit primus saltus detur tertia esse primæ semiperiodi

| | | |
|---|---|---|
| | * | g |
| | * | |
| | * | |
| | * | |
| | * | |
| | * | |
| | o | G b |
| | o | |
| 1 | o | a |
| | o | |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | o | |
| | o | |
| | o | |
| 2 | o | c |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | o | |
| | o | |
| | o | |
| | o | |
| 3 | 1 | d |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | o | |
| | o | |
| | o | |
| | o | |
| | 1 | |
| 4 | 1 | h |
| | 1 | |
| | 1 | |
| | o | |
| | o | |
| | o | |
| | o | H |

periodi versus G, liquet illam esse (o), quoniam ipsa prima semiperiodus ex meris (o) constat. Itaque natura notæ in quam cadit primus saltus invenitur sine calculo. Ad inveniendas autem notas in quas cadunt cæteri tres saltûs, oportet ut supponatur secundus saltus incipere cum intervallo GH, seu (quod idem est) oportet, ut secundus saltus incipiens in *a* supponatur incipere in nota G, quod ut supponere possim, adjicio numero 9 secundi saltus, numerum 3 notarum præcedentium inter G & *a* comprehensarum, ita ut numero 9 notarum secundi saltûs *ac* in numerum 12. notarum inter G & *c* (inclusivè) comprehensarum mutatô, poterit ipse secundus saltus supponi incipere in G, seu cum intervallo GH. Quo facto, addo numero 12 supposito, numerum 9 tertii saltus, ut exsurgat summa 21. notarum secundi & tertii saltuum, cui addo numerum 9 quarti saltus, ut exsurgat summa 30. notarum secundi, tertii & quarti, saltuum.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 3 \\ \hline 12 \\ 9 \\ \hline 21 \\ 9 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ 4 & \\ \hline 1 & \\ 21 & 5 \\ 4 & \\ \hline 2 & \\ 30 & 7 \\ 4 & \end{array}$$

Postea illos numeros 12. 21. 30, divido separatim per numerum 4. notarum semiperiodi tertiæ columnæ seriei numerorum naturalium dyadice expressorum. Tum quotientes, prout fuerint vel pares vel impares, & divisiones habuerint residuum vel non, dabunt (*per 3 hujus partis*) numerum semiperiodorum vel prætergressarum vel finitarum. Unde indicabitur, ut in exemplo præcedenti, natura notæ in quam cadunt secundus tertius & quartus saltus. Cum enim primus quotiens sit numerus impar 3, & divisio prima non habeat residuum, secundus saltus absolvit numerum imparem semiperiodorum inter G & *c* comprehensum, quarum prima versus G ex meris (o) constat. Quare (*ex 14 hujus partis*) secundus saltus cadit in notam (o).

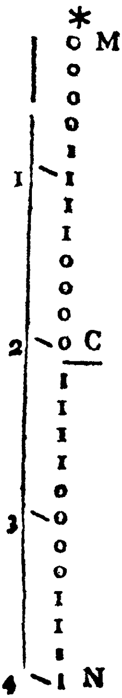
Cum $2^{us}$ quotiens sit numerus impar 5, & divisio habeat residuum, ergo (*per 3 hujus partis*) secundus & tertius saltûs transeunt numerum imparem semiperiodorum, quarum prima versus G ex meris (0) constat, ergo (*per 16 hujus partis*) tertius saltus cadit in notam (1).

Cum $3^{us}$ quotiens sit numerus impar 7, & divisio habeat residuum, secundus tertius & quartus saltus transeunt numerum imparem semiperiodorum, quarum prima versus G ex meris (0) constat, ergo (*per 16 hujus partis*) quartus saltus cadit in notam (1).

Proinde habeo pro prima semiperiodo quæsita notas 0011, & secunda, cum (ut jam dictum) constet ex notis eodem ordine oppositis notis primæ, erit 1100. Unde exurget periodus quæsita 0011. 1100.

## Cap. IV.

### De Periodis columnarum seriei numerorum progressionis Arithmeticæ cujus differentia communis est numerus par.



§. 40. In columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, si numerus impar periodorum saltibus æqualibus inter se numero pari compleatur, etiam unumquodque dimidium illius complebitur. Sit numerus impar periodorum inter M & N comprehensus, continens 3 periodos tertiæ columnæ seriei numerorum naturalium saltibus æqualibus 1, 2, 3, 4. completus; dico unumquodque ejus dimidium MC, CN, similiter compleri, nempe MC saltibus 1, 2, & CN saltibus 3, 4.

Nam quia numerus saltuum (*ex hypothesi*) est par, dividi potest in duos numeros æquales, ut numerus impar periodorum MN in duos numeros æquales semiperiodorum MC, CN.

§. 41. Hinc saltus 3, 4. cadent complendo intervallum CN in notas oppositas notis in quas saltus 1, 2. ceciderunt, cum intervallum primum MC complerent.

Nam (*ex 27. hujus partis*) si saltus æquales inter se compleant unumquodque dimidium numeri imparis periodorum inter M & N comprehensi, cadent in secundo in notas oppositas notis in quas ceciderunt in primo.

§. 42. Ergo in columna seriei numerorum naturalium

ralium dyadice expressorum, si periodus seriei notarum in quas saltus æquales cadunt, constat ex notis in quas cadunt numerô pari complendo numerum periodorum columnæ imparem, habebit ipsa semiperiodos suas ad invicem oppositas.

Exempli gratia, si periodus seriei notarum in quas saltus æquales inter se cadunt in 3ª columna numerorum naturalium constat ex notis 1001 in quas cadunt quatuor saltus 1, 2, 3, 4 (cum 4 sit numerus par habebit ipsa semiperiodos suas nempe 10 & 01 ad invicem oppositas.

Nam liquet, primam constare notis 10 in quas saltus priores cadunt in primo intervallo MC, & secundam ex notis 01 in quas saltus sequentes cadunt in secundo CN.

§. 43. In columna numerorum naturalium dyadice expressorum, si fiant saltus æquales inter se, & numerus notarum saltus sit par $s$, & numerus Periodi columnæ vocetur $p$, & maximus divisor communis numeri saltus $s$ & periodi $p$ vocetur $d$; dico, numerum notarum columnæ minimum quem $s$ & $p$ metiuntur, esse $\frac{sp}{dd}$

Hoc patet *ex 35ª libri 7mi Euclidis.*

§. 44. Hinc in columna seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, si numerus notarum saltus sit par, numerus minimus periodorum continentium notas numero quem numerus saltus $s$ metitur erit $= \frac{s}{d}$ & minimus numerus saltuum continentium notas numero quem numerus periodi $p$ metitur erit $\frac{p}{d}$.

Exempli gratia, in tertia columna numerorum naturalium, ubi numerus notarum periodi est 8, si numerus notarum saltus sit par 6, dico numerum minimum periodorum continentium notas numero quem numerus saltus $s = 6$ metitur, esse MN continens $\frac{s}{d} = \frac{6}{2}$ vel 3. periodos Et minimum numerum saltuum continentium notas numero quem numerus periodi $p$ metitur esse $\frac{p}{d} = \frac{8}{2} = 4$, nempe numerum quatuor saltuum 1, 2, 3, 4.

§. 45. Hinc eisdem positis, in columna numerorum naturalium dyadice expressorum, minimus periodorum numerus quem saltus

tus æquales inter ſe complere poſſunt eſt $= \frac{s}{d}$ Et minimus numerus ſaltuum complentium periodos quasdam integras eſt $\frac{p}{d}$.

Exempli gratia, ſi $\frac{s}{d}$ eſt $= 3$, dico numerum periodorum minimum quem ſaltus complere poſſunt, eſſe M N, conſtantem ex tribus periodis.

Et ſi $\frac{p}{d}$ ſit $= 4$, ſaltus minimo numero poſſibili complentes periodos quasdam, eſſe quatuor ſaltus 1, 2, 3, 4.

Nam (*per 2 hujus partis*) ſi ſaltus æquales inter ſe compleant intervallum vel ſeriem M N, notæ inter M & N comprehenſæ erunt numero quem numerus $s$ metitur, &, ſi ſaltus quidam dati 1, 2, 3, 4. compleant quasdam periodos comprehenſas inter M, & N, continebunt notas numero quem numerus periodi $p$ metitur.

§. 46. Ergo in columna numerorum naturalium dyadice expreſſorum, ſi numerus notarum ſaltus ſit par, periodus ſeriei notarum, in quas cadunt ſaltus, conſtabit ex notis dictæ columnæ in quas cadunt, complendo tot periodos ejus quot indicat $\frac{s}{d}$, vel conſtat ex notis in quas cadunt tot ſaltus quot indicat $\frac{p}{d}$.

Exempli gratia, ſi numerus notarum ſaltus $s$ ſit par 6, periodus ſeriei notarum in quas ſaltus cadunt in tertia columna ſeriei numerorum naturalium conſtabit ex notis 1001 in quas cadunt complendo intervallum M N conſtans ex $\frac{s}{d} = \frac{6}{2} = 3$ periodis. Vel conſtabit ex eisdem notis 1001 in quas cadunt tot ſaltus quot indicat $\frac{p}{d} = \frac{8}{2} = 4$ nempe in quas cadunt quatuor ſaltus 1, 2, 3, 4.

Nam (*per 7. hujus partis*) in quavis ſerie periodica, periodus ſeriei notarum in quas ſaltus æquales inter ſe cadunt, conſtat ex notis, in quas cadunt complendo numerum periodorum ejus minimum, quem

quem ſaltus complere poſſunt: Vel conſtat ex notis, in quas cadunt ſaltus minimo numero poſſibili periodos quasdam ejus complentes.

§. 47. Ergo eisdem poſitis, periodus ſeriei in quas ſaltus æquales cadunt in columna ſeriei numerorum naturalium conſtabit notis numero æquali $\frac{p}{d}$.

§. 48. Iisdem poſitis, $d$ quod eſt diviſor communis maximus numeri notarum ſaltus $s$, & notarum periodi $p$, erit numerus periodi cujusdam columnæ ſeriei numerorum naturalium, & etiam $\frac{p}{d}$ niſi fuerit unitas.

Hoc liquet ex 11 & 13. *libri* 9 *Euclidis*. Nam per 35 *primæ partis*, numerus notarum periodi cujuslibet columnæ in ſerie numerorum naturalium eſt numerus aliquis progresſionis Geometricæ duplæ à binario.

§. 49. Hinc ſi columnæ omnes ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum, diſtribuantur in duas claſſes quarum prima contineat omnes columnas in quibus numerus notarum periodi $p$ metitur numerum notarum ſaltus $s$, & ſecunda columnas cæteras, nempe omnes ultimam columnam primæ clasſis ſequentes, inferetur, quod primò, in quavis columna primæ clasſis $\frac{p}{d}$ fuerit æquale unitati, & ſecundò, quod in $1^a$, $2^a$, $3^a$, $4^a$ &c. columna ſecundæ clasſis $\frac{p}{d}$ fuerit reſpective æquale numero notarum periodi $1^x$, $2^x$, $3^x$, $4^x$ &c. columnæ ſeriei numerorum naturalium dyadice expreſſorum in genere.

Ex. gr. Si numerus notarum ſaltus $s$ ſit par 24, prima clasſis continebit tres columnas priores ſeriei numerorum naturalium, quia unusquisque numerus periodi harum trium priorum columnarum nempe 2, 4, 8. metitur 24, & ſecunda clasſis continebit cæteras columnas tertiam ſequentes.

Dico primò, in prima claſſe $\frac{p}{d}$ eſſe unitatem. Nam quia (*ex hypotheſi*) numerus $p$ notarum periodi metitur $s$ numerum notarum ſaltus; $d$ maximus diviſor communis numerorum $p$ & $s$ erit *ex 36ª libri 7. Euclidis* æqualis numero $p$, unde $\frac{p}{d}$ erit $= \frac{p}{p} = 1$.

Dico 2°, in 1ª, 2ª, 3ª &c. columna ſecundæ clasſis, $\frac{p}{d}$ eſſe numerum periodi 1ª, 2ª, 3ª &c columnæ numerorum naturalium in genere. Hoc liquet (*ex præced.*) quia $\frac{p}{d}$ in tali caſu non eſt unitas.

§ 50. Hinc numerus $\frac{p}{d}$ periodi ſeriei notarum in quas ſaltus cadunt in quavis columna ſeriei numerorum naturalium primæ clasſis erit, unitas, & in 1ª, 2ª, 3ª &c. columna ſecundæ clasſis erit numerus periodi 1ª, 2ª, 3ª, &c. columnæ numerorum naturalium.

2 classis Prima classis

| | |
|---|---|
| 0000000 | 0 |
| 0001000 | 8 |
| 0010000 | 16 |
| 0011000 | 24 |
| 0100000 | 32 |
| 010 000 | 40 |
| 0110000 | 48 |
| 0111000 | 56 |
| 1000000 | 64 |
| 1001000 | 72 |
| 1010000 | 80 |
| 1011000 | 88 |
| 1100000 | 96 |
| 1101000 | 104 |
| 1110000 | 112 |
| 1111000 | 120 |

§ 51. Unde exſurgit, quia (*per* 8 *hujus partis*) ſeries notarum in quas cadunt ſaltus æquales inter ſe in columna ſeriei numerorum naturalium eſt columna ejusdem ordinis in ſerie quadam progresſionis Arithmeticæ cujus differentia communis eſt numerus ſaltus; quòd quando ipſe numerus ſaltus vel differentiæ communis eſt par, columnæ ſeriei numerorum progresſionis Arithmeticæ diſtribuantur in duas claſſes, in quarum prima, periodus cujusvis columnæ ex una nota conſtet, & in ſecunda, numerus periodi 1ª, 2ª, 3ª &c. columnæ ſit æqualis numero periodi columnæ ejusdem ordinis in ſerie numerorum naturalium.

Ex. gr. In tabula ſeriei numerorum progresſionis Arithmeticæ hic adjecta, cujus differentia communis 8 eſt diviſibilis ſine reſiduo per numerum notarum periodi uniuscujusque trium primarum columnarum in ſerie numerorum naturalium nempe per 2, 4, 8. Columnæ diſtribuuntur in duas claſſes, quarum

quarum prima continet tres columnas priores, in quibus periodus constat ex una nota (o), & secunda continet cæteras columnas, tertiam nempe sequentes, ubi numerus periodi est æqualis numero periodi columnæ ejusdem ordinis in serie numerorum naturalium.

§. 52 Eisdem positis, dico, in quavis columna seriei numerorum naturalium secundæ classis, $d$ esse numerum pariter parem maximum, metientem numerum notarum saltus $s$.

Dico primo, $d$ esse numerum pariter parem tantùm. Nam (*per* 48 *hujus partis*) est numerus periodi columnæ seriei numerorum naturalium dyadice expressorum, atqui (*per* 35. *primæ partis*) numerus periodi columnæ seriei numerorum naturalium est aliquis numerus progressionis Geometricæ duplæ a binario, ergo est pariter par tantum (*per* 32 *lib.* 9. *Euclidis.*)

Dico secundò, numerum $d$ esse numerum pariter parem tantum maximum metientem numerum notarum saltus $s$. Si negas, sit $a$ major quam $d$, & $a$ metiatur $s$. Cum numerus $a$ (*ex hypothesi*) & $p$ ut jam dictum sint itidem pariter pares tantùm, $a$ metietur $p$ nisi fuerit major illo. Atqui $a$ non metitur $p$, quia $d$ minor quam $a$ est (*ex hypothesi*) maximus divisor communis numerorum $s$ & $p$. Ergo $a$ est major quam $p$, atqui cum (ut jam dictum) $a$ & $p$ sint itidem pariter pares pares tantum, si $a$ major quam $p$ metiatur $s$, etiam $p$ minor quam $a$ metietur $s$. Columna vero in qua numerus $p$ notarum periodi metitur numerum $s$ notarum saltus, non est ex secunda classe sed prima, contra hypothesin.

§ 53. Hinc sequitur, in quavis columna numerorum naturalium secundæ classis numerum $\frac{s}{d}$ esse imparem.

§. 54. Iisdem suppositis, $\frac{p}{d}$ erit in secunda classe numerus par.

Nam (*per* 49 *hujus partis*) $\frac{p}{d}$ est æqualis numero notarum periodi alicujus columnæ in serie numerorum naturalium dyadice expressorum, qui (*per* 35 *primæ partis*) est aliquis numerus progressionis Geometricæ duplæ a binario.

§. 55. Eisdem positis, periodus seriei notarum, in quas saltus

æqua-

æquales inter ſe cadunt in quavis columna ſeriei numerorum naturalium ſecundæ claſsis, habet ſemiperiodos ſuas ad invicem oppoſitas.

Nam (*per 46 hujus partis*) conſtat ex notis in quas tot ſaltus quot indicat $\frac{p}{d}$ (quod *per præcedentem* eſt numerus par) cadunt in columna complendo numerum ejus periodorum æqualem numero $\frac{s}{d}$ qui (*per 53 hujus partis*) eſt impar.

Atqui (*per 42 hujus partis*) in quavis columna numerorum naturalium, ſi periodus ſeriei notarum, in quas ſaltus æquales inter ſe cadunt, conſtat ex notis, in quas cadunt numero pari. Complendo numerum imparem periodorum ejusdem columnæ, habebit ipſa periodus ſuas ſemiperiodos ad invicem oppoſitas. Ergo &c.

§. 56. Ergo Periodus cujusvis columnæ ſecundæ claſsis in ſerie numerorum progreſsionis Arithmeticæ cujus differentia communis eſt numerus par $s$, habebit ſemiperiodos ſuas ad invicem oppoſitas.

Nam (*per 8 hujus partis*) ſeries notarum in quas ſaltus æquales inter ſe cadunt in columna numerorum naturalium eſt columna ejusdem ordinis in ſerie numerorum progreſsionis Arithmeticæ cujus differentia communis eſt numerus ſaltus $s$.

SERI-